N. Burq
P. Gérard

PROBLÈMES D'ÉVOLUTION

N. Burq
Université Paris Sud, Mathématiques, Bât 425, 91405 Orsay Cedex.
E-mail : `Nicolas.burq@math.u-psud.fr`
Url : `http://www.math.u-psud.fr/~burq`

P. Gérard
Université Paris Sud, Mathématiques, Bât 425, 91405 Orsay Cedex.
E-mail : `Patrick.gerard@math.u-psud.fr`

PROBLÈMES D'ÉVOLUTION

N. Burq, P. Gérard

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES OPÉRATEURS LINÉAIRES

- Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni d'une norme, est un **espace de Banach** s'il est complet.
- Si E, F sont des espaces vectoriels normés, on désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E vers F, que l'on munit de la norme définie par
$$\|T\|_{E\to F} = \sup_{u\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Tu\|_F}{\|u\|_E}.$$
On vérifie que, si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.
- Le but de ce chapitre est de passer en revue trois types de résultats importants concernant les opérateurs linéaires, qui nous seront très utiles dans la suite du cours.

1.1. Théorèmes de prolongement

Théorème 1.1. — *Soient E un espace vectoriel normé, D un sous-espace vectoriel dense de E, F un espace de Banach. Toute application linéaire continue de D vers F a un unique prolongement linéaire continu de E vers F.*

Démonstration. — Soit $T \in \mathcal{L}(D, F)$. Si $u \in E$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D convergeant vers u. Puisque
$$\|Tu_n - Tu_p\|_F = \|T(u_n - u_p)\|_F \leq \|T\|_{D\to F}\|u_n - u_p\|_E,$$
la suite $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F, donc converge puisque F est complet. La limite $\lim_{n\to\infty} Tu_n$ ne dépend pas de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie pour approcher u : en effet, si $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite d'éléments de D approchant u, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$v_{2p} = u_p, \quad v_{2p+1} = \tilde{u}_p, \quad p \in \mathbb{N},$$
est une suite de D approchant u, donc Tv_n a une limite, ce qui assure
$$\lim_{p\to\infty} Tu_p = \lim_{p\to\infty} T\tilde{u}_p.$$

Posons

$$\overline{T}u = \lim_{n\to\infty} Tu_n. \tag{1.1}$$

Alors on vérifie aisément que $\overline{T} \in \mathcal{L}(E, F)$ et prolonge T. Enfin, un prolongement continu de T à E est nécessairement donné par la formule (1.1), ce qui assure l'unicité de $\overline{T}$.

□

Exemple 1.1. — *Intégrale de fonctions réglées à valeurs dans un espace de Banach. Soit F un espace de Banach, et soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On vérifie aisément que l'espace vectoriel $\mathcal{B}([a, b], F)$ des fonctions bornées sur $[a, b]$ à valeurs dans F, muni de la norme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|_F \tag{1.2}$$

est un espace de Banach. Soit D le sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a, b], F)$ constitué des fonctions en escaliers ; on dit qu'une fonction de $[a, b]$ dans F est **réglée** *si elle appartient à l'adhérence E de D dans $\mathcal{B}([a, b], F)$. On peut montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to F$ est réglée si et seulement si elle admet des limites à gauche et à droite en tout point de $[a, b]$. Pour toute fonction en escaliers $f : [a, b] \to F$, on définit aisément l'intégrale*

$$\int_a^b f(x)dx \in F,$$

de sorte qu'on dispose d'une application linéaire

$$\begin{aligned} T : D &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

caractérisée par la formule

$$\int_a^b g(x)vdx = \Big(\int_a^b g(x)dx\Big)v$$

pour toute fonction $g : [a, b] \to \mathbb{K}$ en escaliers, et tout vecteur $v \in F$. La double inégalité

$$\Big\| \int_a^b f(x)dx\Big\|_F \le \int_a^b \|f(x)\|_F dx \le (b-a)\|f\|_\infty \tag{1.3}$$

est, elle aussi, élémentaire. On peut donc appliquer le théorème 1.1 et en déduire un unique prolongement de T à E, ce qui définit, pour toute fonction réglée f de $[a, b]$ vers F, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx \in F$; de plus, la double inégalité (1.3) se prolonge à de telles fonctions. Un cas particulier très important de fonction réglée, que nous utiliserons à plusieurs reprises dans la suite, est bien sûr celui des fonctions continues.

***Théorème 1.2* (prolongement de la convergence).** — *Soient E, F des espaces vectoriels normés, D un sous-espace vectoriel dense de E et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n\|_{E\to F} \leq C \tag{1.4}$$

et que, pour tout élément u de D, la suite $T_n u$ a une limite Tu quand n tend vers l'infini. Alors l'application $T : D \to F$ ainsi définie est linéaire continue, et, si T admet un prolongement $\overline{T} \in \mathcal{L}(E,F)$ (par exemple si F est complet) alors, pour tout $u \in E$,

$$T_n u \to_{n\to\infty} \overline{T}u \tag{1.5}$$

Démonstration. — La linéarité de T est immédiate, et sa continuité provient de l'inégalité

$$\|Tu\|_F = \lim_{n\to\infty} \|T_n u\|_F \leq C\|u\|_E,$$

qui se déduit de (1.4). Supposons qu'il existe un prolongement linéaire continu $\overline{T}$ de T à E. Soit $u \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v \in D$ tel que $\|u - v\|_E \leq \varepsilon$. Alors, pour tout n,

$$\begin{aligned}\|T_n u - \overline{T}u\|_F &\leq \|T_n u - T_n v\|_F + \|T_n v - Tv\|_F + \|Tv - \overline{T}u\|_F \\ &\leq C\|u - v\|_F + \|T_n v - Tv\|_F + \|\overline{T}\|\|v - u\|_F\end{aligned}$$

de sorte que

$$\limsup_{n\to\infty} \|T_n u - \overline{T}u\|_F \leq (C + \|\overline{T}\|)\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui achève la démonstration. □

Exemple 1.2. — *Soit $p \in [1, +\infty[$, et soit $E = L^p(\mathbb{R})$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de puissance p ième sommable. Muni de la norme*

$$\|f\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} \tag{1.6}$$

E admet pour sous-espace dense l'espace D des fonctions continues à support compact.

Pour tout réel h, soit $\tau_h : E \to E$ l'opérateur de translation défini par

$$\tau_h f(x) = f(x - h) \tag{1.7}$$

Alors τ_h est une isométrie de E et, pour toute fonction f continue à support compact

$$\|\tau_h f - f\|_p \to_{h\to 0} 0. \tag{1.8}$$

En appliquant le théorème 1.2 à la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_n = \tau_{h_n}$, où $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque de réels tendant vers 0, on en déduit que (1.8) reste vraie pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$.

1.2. Principe de la borne uniforme

***Théorème 1.3* (Banach-Steinhaus).** — *Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé, et $(T_j)_{j\in J}$ une famille d'opérateurs linéaires de E vers F vérifiant*

$$\forall u \in E, \quad \sup_{j\in J} \|T_j u\|_F < +\infty. \tag{1.9}$$

Alors (1.9) a lieu uniformément sur la boule unité de E, i.e.

$$\sup_{j\in J} \|T_j\|_{E\to F} < +\infty. \tag{1.10}$$

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$A_n = \Big\{u \in E ; \sup_{j\in J} \|T_j u\|_F \leq n\Big\}.$$

L'ensemble A_n est fermé dans E (c'est une intersection de fermés) et l'hypothèse (1.9) assure que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E.$$

Puisque E est complet, il possède la propriété de Baire : une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. En conséquence, l'un des A_n est d'intérieur non vide. Comme $A_n = nA_1$, A_1 est d'intérieur non vide. Puisque A_1 est égal à $-A_1$ et est convexe, $\overset{\circ}{A}_1$ a les mêmes propriétés ; si $u_0 \in \overset{\circ}{A}_1$, on a donc

$$0 = \frac{1}{2}(u_0 - u_0) \in \frac{1}{2}(\overset{\circ}{A}_1 - \overset{\circ}{A}_1) \subset \overset{\circ}{A}_1 \ .$$

Soit alors $r > 0$ tel que la boule fermée de centre 0 et de rayon r soit contenue dans A_1. Pour tout élément u de la boule unité de E, on a donc $ru \in A_1$, et

$$\forall j \in J, \quad r\|T_j u\|_F \leq 1$$

soit

$$\forall j \in J, \quad \|T_j\|_{E\to F} \leq \frac{1}{r}.$$

□

Corollaire 1.3. — *Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé, et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $u \in E$, $T_n u$ ait une limite. Alors*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{E\to F} < +\infty.$$

En particulier, une limite simple d'applications linéaires continues de E vers F est continue.

1.3. Le théorème de l'application ouverte et ses variantes

***Théorème 1.4* (Banach).** — *Soient E, F des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que T est surjective. Alors T est ouverte, i.e. l'image par T de tout ouvert de E est un ouvert de F.*

Démonstration. — Notons B_E, B_F les boules unité fermées de E, F respectivement. Puisque T est linéaire, il suffit de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$rB_F \subset T(B_E). \tag{1.11}$$

Pour tout entier naturel n, notons

$$A_n = \overline{T(nB_E)}.$$

Alors A_n est un fermé de F et

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = F$$

puisque T est surjective. Puisque F est complet, la propriété de Baire assure que l'un des A_n a un intérieur non vide ; puisque T est linéaire $A_n = nA_1$, donc $\overset{\circ}{A}_1 \neq \emptyset$. De plus, $\overset{\circ}{A}_1 = -\overset{\circ}{A}_1$ et $\overset{\circ}{A}_1$ est convexe, donc

$$0 \in \frac{1}{2}(\overset{\circ}{A}_1 - \overset{\circ}{A}_1) \subset \overset{\circ}{A}_1 .$$

Il existe donc $R > 0$ tel que

$$RB_F \subset \overline{T(B_E)}. \tag{1.12}$$

La deuxième étape de la démonstration consiste à passer de (1.12) à (1.11), quitte à choisir $r < R$. En utilisant une fois encore la linéarité de T, on peut traduire la propriété (1.12) sous la forme suivante :

$$\forall v \in F, \forall \varepsilon > 0, \exists u \in E; \|v - Tu\|_F \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|u\|_E \leq \frac{1}{R}\|v\|_F. \tag{1.13}$$

Appliquons cette propriété à $v \in \frac{R}{2}B_F$. Il existe $u_1 \in E$ tel que

$$\|u_1\|_E \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \|v - Tu_1\|_F \leq \frac{R}{4}.$$

En appliquant la propriété (1.13) à $v_1 = v - Tu_1$, il existe $u_2 \in E$ tel que

$$\|u_2\|_E \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \|v - Tu_1 - Tu_2\|_F \leq \frac{R}{8}.$$

On construit ainsi par récurrence une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de E vérifiant

$$\|u_n\|_E \leq 2^{-n} \quad \text{et} \quad \Big\|v - \sum_{k=1}^{n} Tu_k\Big\|_F \leq \frac{R}{2^{n+1}}.$$

Puisque la série des $\|u_n\|_E$ est convergente, la suite des sommes partielles $\big(\sum_{k=1}^{n} u_k\big)_{n\geq 1}$ vérifie le critère de Cauchy. L'espace E étant complet, elle est convergente. Posons

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

Alors $\|u\|_E \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_E \leq 1$ et, puisque l'application T est continue,

$$Tu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Tu_k = v.$$

On a donc montré (1.11) avec $r = \frac{R}{2}$. □

***Corollaire 1.4* (Théorème de l'isomorphisme).** — *Soient E, F deux espaces de Banach. Alors, toute bijection linéaire continue de E sur F a un inverse continu. En particulier, si deux normes rendent un même espace vectoriel complet et sont comparables, elles sont équivalentes.*

En effet, si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective et $U \subset E$ est ouvert, $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ est ouvert donc T^{-1} est continue. Si $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont deux normes sur un espace vectoriel E qui le rendent complet et s'il existe $C > 0$ tel que $\| \ \|_2 \leq C\| \ \|_1$, l'application identique $(E, \| \ \|_1) \to (E, \| \ \|_2)$ est une bijection linéaire continue. La continuité de son inverse assure l'existence de $D > 0$ tel que $\| \ \|_1 \leq D\| \ \|_2$, de sorte que ces deux normes sont équivalentes.

***Corollaire 1.5* (Théorème du graphe fermé).** — *Soient E, F des espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. Alors T est continue si et seulement si le graphe de T est fermé dans $E \times F$, c'est-à-dire : pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E vérifiant $u_n \to_{n\to\infty} u$ dans E et $Tu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$ dans F, on a $v = Tu$.*

Démonstration. — Soit $\Gamma = \{(u, Tu), u \in E\} \subset E\times F$ le graphe de T. Puisque T est linéaire, Γ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$. Il est clair que la continuité de T assure que Γ est fermé dans $E \times F$. Il s'agit donc de montrer la réciproque. Puisque E, F sont des espaces de Banach, $E \times F$ est un espace de Banach. Si Γ est fermé, Γ est donc également un espace de Banach. Soient p_1, p_2 la première et la seconde projection de $E \times F$ sur E, F respectivement. L'application p_1 est continue et sa restriction à Γ est une bijection linéaire continue de Γ sur E. Sa réciproque q est donc continue en vertu du corollaire 1.4 ; en conséquence, $p_2 \circ q = T$ est continue. □

Exemple 1.6. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soient E, F des sous-espaces vectoriels de l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω. On suppose que E, F sont munis respectivement de normes $\| \ \|_E$, $\| \ \|_F$ qui les rendent complets, et telles que toute suite de E (resp. de F) qui converge vers 0 pour $\| \ \|_E$ (resp. $\| \ \|_F$) converge vers 0 au sens des distributions. On suppose que $E \subset F$. Alors il existe $C > 0$ tel que $\| \ \|_F \leq C\| \ \|_E$.*

En effet, appliquons le théorème du graphe fermé à l'injection canonique $j : (E, \| \ \|_E) \to (F, \| \ \|_F)$. Si (u_n) est une suite de E convergeant vers u pour $\| \ \|_E$ et telle que u_n converge vers $v \in F$ pour $\| \ \|_F$, alors $u_n - u$ et $u_n - v$ tendent vers 0 au sens des distributions, donc $v = u$. Plus généralement, on montre par la même méthode qu'une application linéaire "naturelle" entre deux espaces de Banach de distributions est automatiquement continue. Au niveau plus général encore des espaces de Banach abstraits, on peut montrer (travaux de Solovay) que, sans l'axiome du choix, il est impossible de montrer l'existence d'une application linéaire discontinue entre deux espaces de Banach !

CHAPITRE 2

SEMI GROUPES D'OPÉRATEURS LINÉAIRES

2.1. Généralités

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dont la norme sera notée $\| \ \|$. On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de E dans E. Remarquons que, muni du produit de composition des applications, $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre dont l'élément unité est l'application identique. Pour cette raison, nous noterons simplement T_1T_2 le produit de composition $T_1 \circ T_2$ des éléments T_1, T_2 de $\mathcal{L}(E)$, et 1 l'application identique. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, nous noterons

$$\|T\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\|$$

la norme sur $\mathcal{L}(E)$, qui en fait un espace de Banach. On vérifie aisément l'inégalité

$$\|T_1T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\| \tag{2.1}$$

pour tous $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E)$. On traduit l'ensemble de ces propriétés en disant que $(\mathcal{L}(E), \| \ \|)$ est une algèbre de Banach.

Définition 2.1. — *Un* semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires sur E *(en abrégé semi-groupe sur E) est une application*

$$S : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $S(0) = 1$.

(ii) Pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $S(t_1 + t_2) = S(t_1)\,S(t_2)$.

(iii) Pour tout $u \in E$, *l'application*

$$t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto S(t)u \in E$$

est continue.

Remarque 2.2. — *On prendra soin de noter que la condition (iii) n'entraîne pas en général la continuité de l'application $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ lorsque $\mathcal{L}(E)$ est munie de sa norme naturelle. Cette distinction apparaîtra plus clairement au paragraphe suivant, mais voici d'ores et déjà un exemple qui l'illustre bien.*

Soit $E = L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty[$ et, pour tout $t \geq 0$, $S(t) = \tau_t$ défini par

$$\tau_t u(x) = u(x - t).$$

On a déjà vu (exemple 1.1) que τ_t était une isométrie de E et que la propriété (iii) était vérifiée. Quant aux propriétés (i) et (ii), elles sont triviales. Soit $t > 0$, et soit u la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, t[\subset \mathbb{R}$. Alors $\tau_t u$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[t, 2t[$, de sorte que

$$\|\tau_t u - u\|_p^p = 2t, \quad \|u\|_p^p = t$$

et donc

$$\|\tau_t - 1\| \geq \frac{\|\tau_t u - u\|_p}{\|u\|_p} = 2^{1/p}$$

ce qui contredit la continuité en 0 de l'application $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \tau_t \in (\mathcal{L}(E), \| \ \|)$.

***Proposition 2.3* (estimation *a priori*).** — *Soit S un semi-groupe sur E. Il existe $C > 0$ et $\omega \geq 0$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$\|S(t)\| \leq C e^{\omega t}. \tag{2.2}$$

Démonstration. — Appliquons le principe de la borne uniforme (théorème 1.3) de Banach-Steinhaus à la famille $(S(t))_{t \in [0,1]}$. D'après la propriété (iii), pour tout $u \in E$,

$$\sup_{t \in [0,1]} \|S(t)u\| < +\infty.$$

En conséquence

$$\sup_{t \in [0,1]} \|S(t)\| = C < +\infty.$$

Soit alors $t \in \mathbb{R}_+$ quelconque ; désignons par n la partie entière de t, et $\tau = t - n \in [0, 1[$. Alors la propriété (ii) assure que

$$S(t) = S(\tau)S(n) = S(\tau)S(1)^n$$

donc, d'après l'inégalité (2.1),

$$\|S(t)\| \leq \|S(\tau)\| \|S(1)\|^n \leq C \cdot C^n \leq C e^{\omega t}$$

en notant $\omega = \operatorname{Log} C \geq 0$ (car $C \geq \|S(0)\| = 1$). □

2.2. Générateur infinitésimal

Commençons par clarifier la distinction introduite dans la remarque 2.2 en caractérisant les semi-groupes S sur E vérifiant **de plus** la propriété suivante, strictement plus forte queiii,

$$S = \mathbb{R}_+ \longrightarrow (\mathcal{L}(E), \| \ \|) \text{ est continue.} \tag{iv}$$

Dans ce cas, on va voir que S a une forme très particulière. Pour cela, intégrons de 0 à ε l'identité

$$S(\tau + t) = S(\tau)S(t), \tag{2.3}$$

l'intégrale étant prise au sens de l'exemple 1.1. Il vient

$$\int_t^{\varepsilon+t} S(\lambda)d\lambda = \Big(\int_0^{\varepsilon} S(\tau)d\tau\Big)S(t). \tag{2.4}$$

Toujours d'après l'exemple 1.1, on a

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} S(\tau)d\tau \to_{\varepsilon\to 0^+} S(0) = 1.$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'opérateur $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} S(\tau)d\tau$ est donc inversible dans $\mathcal{L}(E)$, en vertu du lemme suivant :

***Lemme 2.4* (série de Neumann)).** — *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|1 - T\| < 1$. Alors T est inversible, et*

$$T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - T)^n.$$

Démonstration. — D'après l'inégalité (2.1),

$$\|(1 - T)^n\| \leq \|1 - T\|^n,$$

donc la série de terme général $(1 - T)^n$ est convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E)$. Puisque

$$T\sum_{n=0}^{N}(1 - T)^n = \left(\sum_{n=0}^{N}(1 - T)^n\right)T = 1 - (1 - T)^{N+1} \to_{N\to\infty} 1$$

le lemme en résulte. □

Revenons à la formule (2.4). Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\int_0^{\varepsilon} S(\tau)d\tau = \varepsilon \times \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} S(\tau)d\tau$ est donc inversible, et

$$S(t) = \left(\int_0^{\varepsilon} S(\tau)\,d\tau\right)^{-1}\left(\int_t^{\varepsilon+t} S(\lambda)\,d\lambda\right)$$

définit une application de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{L}(E)$. En posant $B = S'(0)$ et en prenant la dérivée de (2.3) en $\tau = 0$, il vient

$$S'(t) = BS(t). \tag{2.5}$$

Il est aisé de démontrer que l'équation différentielle (2.5) a une unique solution vérifiant $S(0) = 1$. Celle-ci est donnée explicitement à l'aide de l'application exponentielle, définie sur $\mathcal{L}(E)$ par

$$\exp(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}. \tag{2.6}$$

La convergence de la série ci-dessus est assurée par l'inégalité $\|T^n\| \le \|T\|^n$ et le fait que $\mathcal{L}(E)$ est complet. On vérifie alors, comme dans le cas matriciel, que $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E)$ vérifient $T_1T_2 = T_2T_1$, $\exp(T_1 + T_2) = \exp(T_1)\exp(T_2)$. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$,

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)\,A. \tag{2.7}$$

En revenant à (2.5), on conclut, pour tout $t \ge 0$,

$$\frac{d}{dt}(\exp(-tB)S(t)) = 0$$

d'où

$$S(t) = \exp(tB). \tag{2.8}$$

Réciproquement, si B est un élément quelconque de $\mathcal{L}(E)$, l'application S définie par (2.8) vérifie les propriétés (i), (ii) et (iv). Récapitulons ces résultats dans la proposition suivante.

Proposition 2.5. — *Les applications $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ vérifiant les propriétés* (i), (ii), (iv) *sont les applications de la forme* (2.8), *où $B \in \mathcal{L}(E)$.*

Pour des raisons qui apparaîtront plus claires dans l'étude des semi-groupes de contractions sur un espace de Hilbert, on a coutume d'introduire l'opérateur $A = -B$ et de l'appeler **générateur infinitésimal** du semi-groupe S vérifiant (i), (ii), (iv). La formule $S(t) = e^{-tA}$ se traduit alors par le fait que, pour tout élément u de E, la fonction $u : \mathbb{R}_+ \to E$ définie par $u(t) = S(t)u_0$ est l'unique solution du "problème de Cauchy"

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad u(0) = u_0. \tag{2.9}$$

En d'autres termes, $S(t)$ est la "résolvante" de l'équation différentielle $u' + Au = 0$. C'est cette interprétation qui sera notre point de départ pour l'étude générale des semi-groupes. Elle débouche notamment sur la définition suivante.

Définition 2.6. — *Soit S un semi-groupe sur E (au sens de la définition 2.1). On appelle* générateur infinitésimal *de S l'application linéaire $A : D(A) \to E$, où $D(A)$ est le sous-espace vectoriel de E constitué des vecteurs u tels que l'application $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto S(t)u$ soit dérivable à droite en 0, avec*

$$Au = -\frac{d}{dt}(S(t)u)_{|t=0^+}.$$

Exercice 2.7. — *Montrer que le générateur infinitésimal du semi-groupe des translations sur $L^p(\mathbb{R})$ (exemple 1.2) est donné par*

$$D(A) = \{u \in L^p(\mathbb{R}), u' \in L^p(\mathbb{R})\}, \quad Au = u'$$

(la dérivée étant prise au sens des distributions sur $\mathbb{R}$).

Proposition 2.8. — *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe S sur E. Alors, pour tout $t \geq 0$, $D(A)$ est stable par $S(t)$ et, pour tout $u \in D(A)$,*

$$AS(t)u = S(t)Au.$$

De plus, $D(A)$ est dense dans E et le graphe de A est fermé dans $E \times E$.

Démonstration. — Soient $t \geq 0$ et $u \in D(A)$. Pour tout $h > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1 - S(h)}{h} S(t)u &= \frac{S(t) - S(h+t)}{h} u \\ &= S(t)\frac{1 - S(h)}{h} u \to_{h \to 0^+} S(t)Au,\end{aligned}$$

puisque $S(t)$ est continue. On en déduit la première assertion de la proposition. Les autres assertions reposent sur le lemme suivant.

Lemme 2.9. — *Pour tout $u \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, posons*

$$J_\varepsilon u = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon S(t)u dt. \tag{2.10}$$

Alors l'application $J_\varepsilon : E \to E$ ainsi définie est linéaire continue, et $J_\varepsilon u \to_{\varepsilon \to 0^+} u$. De plus, pour tout $h > 0$, on a l'identité

$$\frac{S(h) - 1}{h} J_\varepsilon = \frac{S(\varepsilon) - 1}{\varepsilon} J_h = J_h \frac{S(\varepsilon) - 1}{\varepsilon}. \tag{2.11}$$

Démonstration du lemme.. — Le fait que $J_\varepsilon u \to_{\varepsilon \to 0^+} u$ est conséquence de la continuité en 0 de l'application $t \mapsto S(t)u$. La linéarité de l'application J_ε provient de celle de $S(t)$ pour tout t, tandis que sa continuité résulte de l'inégalité

$$\|J_\varepsilon u\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \|S(t)u\| dt$$

et de l'estimation *a priori* (2.2) (voir proposition 2.3). Enfin, si $h > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{S(h) - 1}{h} J_\varepsilon u &= \frac{1}{\varepsilon h}\Big[S(h)\int_0^\varepsilon S(t)u dt - \int_0^\varepsilon S(t)u dt\Big] \\ &= \frac{1}{\varepsilon h}\Big[\int_0^\varepsilon S(h+t)u dt - \int_0^\varepsilon S(t)u dt\Big] \\ &= \frac{1}{\varepsilon h}\Big[\int_h^{h+\varepsilon} S(\tau)u d\tau - \int_0^\varepsilon S(t)u dt\Big] \\ &= \frac{1}{\varepsilon h}\Big[\int_\varepsilon^{h+\varepsilon} S(\tau)u d\tau - \int_0^h S(t)u dt\Big],\end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles. On constate alors que les rôles de h et de ε sont inversés dans les deux dernières identités, ce qui conduit à la première partie de (2.11). La seconde partie résulte de ce que J_h et $S(\varepsilon)$ commutent pour tous h, ε. $\square$

Achevons la démonstration de la proposition 2.8. Soit $u \in E$. D'après le lemme 2.9 et la continuité de $S(\varepsilon)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{S(h)-1}{h} J_\varepsilon u = \frac{S(\varepsilon)-1}{\varepsilon} J_h u \to_{h\to 0^+} \frac{S(\varepsilon)-1}{\varepsilon} u.$$

On en déduit que $J_\varepsilon u \in D(A)$, avec

$$AJ_\varepsilon u = \frac{1-S(\varepsilon)}{\varepsilon} u. \tag{2.12}$$

Puisque $J_\varepsilon u \to_{\varepsilon\to 0^+} u$, il en résulte que $D(A)$ est dense. Notons que la deuxième partie de (2.11) et la continuité de J_h entraînent, pour tout $u \in D(A)$,

$$J_h A u = A J_h u. \tag{2.13}$$

Soit alors (u_n) une suite de $D(A)$ vérifiant

$$u_n \to_{n\to\infty} u, \quad Au_n \to_{n\to\infty} v.$$

Alors, pour tout $h > 0$, le passage à la limite quand $n \to \infty$ dans la formule

$$J_h A u_n = \frac{1-S(h)}{h} u_n$$

entraîne

$$J_h v = \frac{1-S(h)}{h} u$$

d'où, en passant à la limite quand h tend vers 0^+, $u \in D(A)$ et $v = Au$. Le graphe de A est donc fermé. $\square$

Le résultat suivant montre en quoi un semi-groupe S peut être considéré comme la résolvante d'une équation différentielle.

Théorème 2.1. — *Soit S un semi-groupe sur E, et soit A son générateur infinitésimal. Soit $u_0 \in E$, et soit u la fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans E définie par $u(t) = S(t)u_0$.*

(a) Si $u_0 \in D(A)$, alors u est de classe C^1 et, pour tout $t \geq 0$, $u'(t) + Au(t) = 0$. Réciproquement, si $v : [0,T] \to E$ est une fonction continue, dérivable sur $]0,T[$ et vérifiant, pour tout $t \in]0,T[$,

$$v(t) \in D(A) \text{ et } v'(t) + Av(t) = 0, \tag{2.14}$$

alors $v(t) = S(t)v(0)$ pour tout $t \in [0,T]$.

(b) (On ne suppose plus $u_0 \in D(A)$). Pour toute fonction $\psi :]0,\infty[\to \mathbb{K}$ de classe C^1 à support compact, le vecteur $\int_0^\infty \psi(t)u(t)dt$ appartient à $D(A)$ et

$$A\Big(\int_0^\infty \psi(t)u(t)dt\Big) = \int_0^\infty \psi'(t)u(t)dt.$$

Réciproquement, si $v : [0,T] \to E$ est une fonction continue vérifiant, pour toute fonction $\psi :]0,T[\to \mathbb{K}$ de classe C^1 à support compact,

$$\int_0^T \psi(t)v(t)dt \in D(A) \ \text{ et } \ A\Big(\int_0^T \psi(t)v(t)dt\Big) = \int_0^T \psi'(t)v(t)dt, \tag{2.15}$$

alors $v(t) = S(t)v(0)$ pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration. — Montrons d'abord la partie (a). Si $u_0 \in D(A)$, on sait déjà par la proposition 2.8 que $u(t) \in D(A)$. Si $h > 0$,

$$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = \frac{S(h)-1}{h}u(t) \to_{h\to 0^+} -Au(t), \tag{2.16}$$

tandis que, pour $t \geq h$,

$$\begin{aligned} \frac{u(t-h)-u(t)}{-h} &= \frac{S(t)-S(t-h)}{h}u_0 = S(t-h)\frac{S(h)-1}{h}u_0 \\ &= -S(t-h)Au_0 + r_h, \end{aligned} \tag{2.17}$$

où

$$r_h = S(t-h)\Big(\frac{S(h)-1}{h}u_0 + Au_0\Big).$$

Compte tenu de la proposition 2.3, pour $t > 0$ fixé et $h \leq t$, on a $\|S(t-h)\| \leq M$, donc

$$\|r_h\| \leq M\Big\|\frac{S(h)-1}{h}u_0 + Au_0\Big\| \to_{h\to 0^+} 0.$$

En revenant à (2.17), on observe que u est dérivable à gauche en tout $t > 0$, avec $u'(t^-) = -S(t)Au_0$, qui n'est autre que $-Au(t)$ d'après la proposition 2.8. En comparant avec (2.16), on conclut que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, avec

$$u'(t) = -Au(t) = -S(t)Au_0,$$

la dernière expression assurant que u est de classe C^1. Pour montrer l'unicité, nous avons recours au lemme suivant.

Lemme 2.10. — *Soit w une fonction définie au voisinage de $t_0 > 0$, à valeurs dans E, dérivable en t_0 et telle que $w(t_0) \in D(A)$. Alors la fonction $t \mapsto S(t)w(t)$ est dérivable en t_0, avec*

$$\frac{d}{dt}(S(t)w(t))_{|t=t_0} = S(t_0)(w'(t_0) - Aw(t_0)).$$

Démonstration du lemme.. — Pour $h \neq 0$ assez petit, on écrit

$$\begin{aligned} &\frac{S(t_0+h)w(t_0+h) - S(t_0)w(t_0)}{h} \\ &\qquad = S(t_0+h)\frac{w(t_0+h)-w(t_0)}{h} + \frac{S(t_0+h)w(t_0) - S(t_0)w(t_0)}{h}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Puisque $w(t_0) \in D(A)$, on vient de voir que le deuxième terme du second membre de (2.18) tend vers $-S(t_0)Aw(t_0)$. Quant au premier terme, il s'écrit $S(t_0+h)w'(t_0)+o(1)$, en utilisant à nouveau l'estimation *a priori* sur $\|S(t)\|$. □

Soit $v : [0,T] \to E$ satisfaisant à (2.14), et soit $t_1 \in]0,T[$. D'après le lemme 2.10, on a, pour tout $t \in]0,t_1[$,

$$\frac{d}{dt} S(t)\, v(t_1 - t) = -S(t)(v'(t_1 - t) + Av(t_1 - t)) = 0,$$

donc, en comparant les valeurs de la fonction continue $t \mapsto S(t)v(t_1 - t)$ en $t = 0$ et $t = t_1$,

$$v(t_1) = S(t_1)v(0).$$

Cette identité, vraie pour tout $t_1 \in]0,T[$, se prolonge aux bornes de l'intervalle par continuité. Passons à la partie (b) du théorème. On utilise la famille $(J_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ introduite au lemme 2.9. Notons $u_\varepsilon(t) = J_\varepsilon u(t) = S(t)\, J_\varepsilon u_0$. Puisque $J_\varepsilon u_0 \in D(A)$, on peut appliquer la partie a) du théorème : la fonction u_ε est de classe C^1 et $u'_\varepsilon + Au_\varepsilon = 0$. En intégrant contre $\psi \in C^1_0(]0,\infty[)$, il vient

$$\int_0^\infty \psi(t) Au_\varepsilon(t)\, dt = \int_0^\infty \psi'(t) u_\varepsilon(t) dt\,.$$

Mais $u_\varepsilon(t) = J_\varepsilon u(t)$ et

$$Au_\varepsilon(t) = AJ_\varepsilon u(t) = \frac{1 - S(\varepsilon)}{\varepsilon} u(t).$$

Il en résulte que

$$\frac{1 - S(\varepsilon)}{\varepsilon} \int_0^\infty \psi(t)\, u(t) dt = J_\varepsilon \int_0^\infty \psi'(t)\, u(t) dt,$$

et la propriété voulue s'obtient en passant à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$. Réciproquement, soit $v : [0,T] \to E$ vérifiant (2.15) pour toute fonction $\psi \in C^1_0(]0,T[)$. Posons, pour tout $t \in [0,T]$,

$$v_\varepsilon(t) = J_\varepsilon v(t).$$

Alors $v_\varepsilon(t) \in D(A)$ pour tout t,

$$Av_\varepsilon(t) = AJ_\varepsilon v(t) = \frac{1 - S(\varepsilon)}{\varepsilon} v(t)$$

est une fonction continue de t, et

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \psi(t) Av_\varepsilon(t)\, dt &= AJ_\varepsilon \Big(\int_0^\infty \psi(t) v(t)\, dt \Big) \\ &= J_\varepsilon A \Big(\int_0^\infty \psi(t) v(t)\, dt \Big) \\ &= J_\varepsilon \Big(\int_0^\infty \psi'(t) v(t)\, dt \Big) \\ &= \int_0^\infty \psi'(t) v_\varepsilon(t) dt. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Introduisons alors la fonction continue $w_\varepsilon : [0,T] \to E$ par

$$w_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t) + \int_0^t Av_\varepsilon(\tau)\, d\tau.$$

Alors (2.19) et une intégration par parties entraînent, pour toute fonction $\psi \in C_0^1(]0,T[)$,

$$\int_0^T \psi'(t) w_\varepsilon(t) dt = 0. \tag{2.20}$$

Appliquons l'identité (2.20) à la fonction ψ_δ définie par

$$\psi_\delta(t) = \frac{1}{\delta} \int_0^t \Big[\chi\Big(\frac{\tau - t_0}{\delta}\Big) - \chi\Big(\frac{\tau - t_1}{\delta}\Big)\Big] d\tau, \tag{2.21}$$

où $t_0, t_1 \in]0,T[$, $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue à support compact d'intégrale 1, et $\delta > 0$ est assez petit. On obtient

$$\frac{1}{\delta} \int_0^T \chi\Big(\frac{t - t_0}{\delta}\Big) w_\varepsilon(t) dt = \frac{1}{\delta} \int_0^T \chi\Big(\frac{t - t_1}{\delta}\Big) w_\varepsilon(t) dt, \tag{2.22}$$

soit, en faisant tendre δ vers 0,

$$w_\varepsilon(t_0) = w_\varepsilon(t_1).$$

La fonction w_ε est donc constante sur $[0,T]$, ce qui se traduit sur v_ε par

$$v_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(0) - \int_0^t A v_\varepsilon(\tau)\, d\tau \tag{2.23}$$

soit encore : v_ε est de classe C^1 et, pour tout $t \in [0,T]$,

$$v_\varepsilon'(t) + A v_\varepsilon(t) = 0.$$

En appliquant l'unicité de la partie a), il vient $v_\varepsilon(t) = S(t) v_\varepsilon(0)$, et la conclusion s'obtient en faisant tendre ε vers 0^+. □

En conclusion, un semi-groupe sur E est nécessairement la résolvante d'une équation différentielle $u' + Au = 0$, comprise au sens faible indiqué dans le théorème 2.1, à condition de considérer des opérateurs linéaires A définis sur des sous-espaces denses $D(A)$ de E. Un tel opérateur A est appelé **opérateur non borné** sur E. Un prototype (exercice 2.7) en est l'opérateur de dérivation sur $L^p(\mathbb{R})$, ou plus généralement un opérateur différentiel sur $L^p(\Omega)$ si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Pour achever le parallèle avec la proposition 2.5, il reste à examiner une question importante : étant donné un opérateur non borné sur E, à quelle condition est-il le générateur infinitésimal d'un semi-groupe sur E ? La réponse à cette question fournira des conditions suffisantes pour résoudre le problème de Cauchy pour des équations différentielles du type $u' + Au = 0$ qui, lorsque A est un opérateur différentiel, se traduiront en équations aux dérivées partielles au sens des distributions.

2.3. Construction de semi-groupes : le théorème de Hille-Yosida

On dit qu'un opérateur linéaire $T : E \to E$ est une *contraction* si $\|T\| \leq 1$. Le but de ce paragraphe est de donner une condition nécessaire et suffisante sur un opérateur non borné $A : D(A) \subset E \to E$ pour que A soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions. Cette restriction par rapport à la question générale posée à la fin du paragraphe précédent n'est pas très importante, comme le suggère le résultat suivant.

Proposition 2.11. — *Soit S un semi-groupe sur E, de générateur infinitésimal A. Alors il existe une norme équivalente $\| \ \|'$ sur E et $\omega \geq 0$ tels que $A+\omega$ engendre un semi-groupe de contractions sur $(E, \| \ \|')$.*

Démonstration. — Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, posons $S_\omega(t) = e^{-\omega t} S(t)$. On vérifie que S_ω est un semi-groupe sur E, de générateur infinitésimal $A + \omega$ (avec $D(A+\omega) = D(A)$).

D'après la proposition 2.3, il existe $\omega \geq 0$ tel que $\sup_{t\geq 0} \|S_\omega(t)\| < +\infty$. Pour tout $u \in E$, on pose alors

$$\|u\|' = \sup_{t\geq 0} \|S_\omega(t)u\| .$$

Il est clair que $\| \cdot \|'$ est une norme équivalente sur E. En effet, la sous-additivité et l'homogénéité sont triviales, l'inégalité $\|u\|' \geq \|u\|$ vient de ce que $S_\omega(0) = 1$, tandis que

$$\|u\|' \leq \sup_{t\geq 0} \|S_\omega(t)\| \, \|u\|.$$

Alors $\|S_\omega(\tau)u\|' = \sup_{t\geq 0} \|S_\omega(\tau + t)u\| \leq \|u\|'$, donc $S_\omega(\tau)$ est une contraction pour tout $\tau \geq 0$. □

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 2.2. — (Hille-Yosida). *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur non borné sur E, de domaine $D(A)$ dense dans E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur E.

(ii) Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, l'application $A+\lambda : D(A) \to E$ est bijective, et son inverse vérifie, pour tout $u \in E$,

$$\|(A+\lambda)^{-1}u\| \leq \frac{1}{\lambda} \|u\|. \tag{2.24}$$

Dans ce cas, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, *l'application $A + \lambda : D(A) \to E$ est bijective et son inverse vérifie, pour tout $u \in E$,*

$$\|(A+\lambda)^{-1}u\| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)} \|u\|. \tag{2.25}$$

Démonstration. — Montrons d'abord i $\Rightarrow$ ii sous la forme forte (2.25). Supposons donc que A soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur E, noté S. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Pour tout $u \in E$, posons

$$R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u\,dt, \tag{2.26}$$

l'intégrale dans le second membre de (2.26) devant être interprétée comme la limite dans E, quand $T \to +\infty$, de $\int_0^T e^{-\lambda t} S(t)udt$. Cette limite existe car

$$\|e^{-\lambda t} S(t)u\| \leq e^{-\mathrm{Re}(\lambda)t} \|u\| \tag{2.27}$$

puisque $S(t)$ est une contraction. Il suffit donc d'appliquer le critère de Cauchy. L'application $R_\lambda : E \to E$ ainsi définie est linéaire, et l'estimation (2.27) entraîne que

$$\|R_\lambda u\| \leq \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}(\lambda)t} \|u\| dt = \frac{\|u\|}{\mathrm{Re}(\lambda)}. \tag{2.28}$$

Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$, calculons

$$\begin{aligned} \frac{1 - S(\varepsilon)}{\varepsilon} R_\lambda u &= \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u\,dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(\varepsilon + t)u\,dt\Big) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)udt - \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda(\tau-\varepsilon)} S(\tau)ud\tau\Big) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon e^{-\lambda t} S(t)\,udt + \frac{1}{\varepsilon}(1 - e^{\lambda\varepsilon})\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} S(t)dt. \end{aligned} \tag{2.29}$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$, on en déduit $R_\lambda u \in D(A)$ et

$$AR_\lambda u = u - \lambda R_\lambda u. \tag{2.30}$$

Par ailleurs, (2.29) assure également que

$$\frac{1 - S(\varepsilon)}{\varepsilon} R_\lambda u = R_\lambda \frac{1 - S(\varepsilon)}{\varepsilon} u$$

donc, si $u \in D(A)$,

$$AR_\lambda u = R_\lambda Au. \tag{2.31}$$

On peut donc réécrire (2.30) et (2.31) sous la forme

$$\begin{cases} (\lambda + A)R_\lambda u = u \text{ pour tout } u \in E \\ R_\lambda(\lambda + A)u = u \text{ pour tout } u \in D(A) \end{cases}$$

ce qui assure que $\lambda + A : D(A) \to E$ est bijective, et que $R_\lambda = (\lambda + A)^{-1}$. Compte tenu de (2.28), on a montré la première implication. Passons à la démonstration de ii $\Rightarrow$ i.

Pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, notons $R_\lambda = (\lambda + A)^{-1}$. Pour tout $u \in D(A)$, on a donc

$$\lambda R_\lambda u = -R_\lambda Au + u \underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} u,$$

compte tenu de l'identité (2.24) appliquée au vecteur Au. De plus, (2.24) assure que $(\lambda R_\lambda)_{\lambda\geq\lambda_0}$ est une famille de contractions sur E ; puisque $D(A)$ est dense dans E, le théorème 1.2 de prolongement de la convergence entraîne, pour tout $u \in E$,

$$\lambda R_\lambda u \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} u. \tag{2.32}$$

Posons alors, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$,

$$A_\lambda = \lambda A R_\lambda = \lambda - \lambda^2 R_\lambda \in \mathcal{L}(E). \tag{2.33}$$

D'après (2.32), on a, pour tout $u \in D(A)$,

$$A_\lambda u = \lambda R_\lambda A u \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} Au. \tag{2.34}$$

Puisque $A_\lambda \in \mathcal{L}(E)$, on peut définir, pour tout t,

$$S_\lambda(t) = \exp(-tA_\lambda) \tag{2.35}$$

au sens de (2.6).

Lemme 2.12. — *Pour tout $t \geq 0$, pour tout $u \in E$, pour tous $\lambda, \mu \geq \lambda_0$,*

$$\|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| \leq t\,\|A_\lambda u - A_\mu u\|.$$

Démonstration du lemme. — En utilisant le fait que R_λ et R_μ commutent, on a $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$, donc

$$\begin{aligned}
S_\lambda(t) - S_\mu(t) &= \exp(-tA_\mu)(\exp(-t(A_\lambda - A_\mu)) - 1) \\
&= -\exp(-tA_\mu)\int_0^t \exp(-\tau(A_\lambda - A_\mu))(A_\lambda - A_\mu)d\tau \\
&= -\int_0^t \exp(-\tau A_\lambda)\exp(-(t-\tau)A_\mu)(A_\lambda - A_\mu)d\tau
\end{aligned}$$

soit encore, pour tout $u \in E$,

$$S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u = -\int_0^t S_\lambda(\tau)S_\mu(t-\tau)(A_\lambda u - A_\mu u)\,d\tau. \tag{2.36}$$

Or $S_\lambda(t) = \exp(-t(\lambda - \lambda^2 R_\lambda)) = e^{-\lambda t}\exp(t\lambda^2 R_\lambda)$, donc, d'après l'inégalité triangulaire dans (2.6)

$$\|S_\lambda(t)\| \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2\|R_\lambda\|} \leq 1 \tag{2.37}$$

compte tenu de (2.24). En revenant à (2.36) il vient, en tenant compte de (2.37),

$$\begin{aligned}
\|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| &\leq \int_0^t \|S_\lambda(\tau)\|\|S_\mu(t-\tau)\|\,\|A_\lambda u - A_\mu u\|d\tau \\
&\leq t\|A_\lambda u - A_\mu u\|.
\end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant achever la démonstration de ii ⇒ i. Pour tout $T > 0$, l'espace vectoriel F_T des fonctions continues de $[0, T]$ dans E, muni de la norme

$$\|f\|_T = \max_{0\leq t\leq T} \|f(t)\|,$$

est complet. Pour tout $u \in E$, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, désignons par $\tilde{S}_\lambda u$ l'élément de F_T défini par

$$\tilde{S}_\lambda u(t) = S_\lambda(t)u. \tag{2.38}$$

L'application $\tilde{S}_\lambda : E \to F_T$ ainsi définie est linéaire, et vérifie

$$\|\tilde{S}_\lambda u\|_T = \max_{0\leq t\leq T} \|S_\lambda(t)u\| = \|u\| \tag{2.39}$$

d'après (2.37) et le fait que $S_\lambda(0) = 1$. Enfin, le lemme 2.12 entraîne

$$\|\tilde{S}_\lambda u - \tilde{S}_\mu u\|_T \leq T\|A_\lambda u - A_\mu u\|. \tag{2.40}$$

Soit alors $u \in D(A)$. D'après (2.34), $A_\lambda u$ converge quand $\lambda \to +\infty$, donc est de Cauchy, et (2.40) implique que $\tilde{S}_\lambda u$ est de Cauchy dans F_T, donc converge. Puisque $D(A)$ est dense dans E, le théorème 1.2 de prolongement de la convergence assure que $\tilde{S}_\lambda u$ a une limite $\tilde{S}u \in F_T$ pour tout $u \in E$. Ceci étant vrai pour tout $T > 0$, on en déduit l'existence, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, d'une application linéaire $S(t) : E \to E$ vérifiant, pour tout $u \in E$,

$$S_\lambda(t)u \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} S(t)u \tag{2.41}$$

uniformément en $t \in [0, T]$, pour tout $T > 0$. Puisque S_λ est un semi-groupe de contractions, il en est de même pour S.

Il reste à montrer que A est le générateur infinitésimal de S. Désignons par $\tilde{A}$ ce générateur infinitésimal. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'identité

$$\frac{1}{\varepsilon}(u - S_\lambda(\varepsilon)u) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon S_\lambda(t)A_\lambda u dt$$

devient, si $u \in D(A)$ et $\lambda \to \infty$,

$$\frac{1}{\varepsilon}(u - S(\varepsilon)u) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon S(t)Au dt.$$

En faisant tendre ε vers 0^+, on en déduit que $D(A) \subset D(\tilde{A})$ et $\tilde{A}_{|D(A)} = A$. Soit alors $u \in D(\tilde{A})$. Puisque $\lambda_0 + A : D(A) \to E$ est surjectif, il existe $v \in D(A)$ tel que

$$(\lambda_0 + A)v = (\lambda_0 + \tilde{A})u$$

soit encore $(\lambda_0 + \tilde{A})v = (\lambda_0 + \tilde{A})u$. Or, d'après l'implication (i) ⇒ (ii) déjà montrée, $\lambda_0 + \tilde{A} : D(\tilde{A}) \to E$ est injectif, donc $v = u$, et $D(\tilde{A}) = D(A)$, $\tilde{A} = A$. En combinant les théorèmes 2.1, 2.2 et en tenant compte du lien déjà observé entre les générateurs infinitésimaux de $t \mapsto S(t)$ et de $t \mapsto e^{-\omega t}S(t)$, on obtient le résultat suivant d'existence et d'unicité de solutions au problème de Cauchy pour des équations du type $u' + Au = 0$.

Corollaire 2.13. — *. Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur non borné de domaine $D(A)$ dense dans E. On suppose qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $\lambda_0 > \omega$ tels que, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, l'application*

$$\lambda + A : D(A) \longrightarrow E$$

soit bijective et vérifie, pour tout $v \in E$,

$$\|(\lambda + A)^{-1} v\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}\|v\|. \tag{2.42}$$

Alors, pour tout $u_0 \in E$, il existe une unique fonction $u : \mathbb{R}_+ \to E$ continue vérifiant $u(0) = u_0$ et, pour toute fonction $\psi :]0, +\infty[\to \mathbb{K}$ de classe C^1 à support compact,

$$\int_0^\infty \psi(t)u(t)dt \in D(A) \quad \text{et} \quad A\Big(\int_0^\infty \psi(t)u(t)\,dt\Big) = \int_0^\infty \psi'(t)u(t)dt. \tag{2.43}$$

Lorsque $u_0 \in D(A)$, on peut remplacer (2.43) par

$$u \in C^1(\mathbb{R}_+, E) \ \text{ et } \ \forall t \geq 0, \ \ u(t) \in D(A), \ \ u'(t) + Au(t) = 0. \tag{2.44}$$

De plus, pour tout $t \geq 0$, on a l'estimation

$$\|u(t)\| \leq e^{\omega t}\|u_0\|. \tag{2.45}$$

Remarque 2.14. — *Génération d'un groupe d'opérateurs. Il arrive que les hypothèses du corollaire 2.13 soient vraies simultanément pour A et pour $-A$. Alors, en désignant par S_+ le semi-groupe engendré par A et par S_- le semi-groupe engendré par $-A$, on vérifie aisément que $S_-(t)$ et $S_+(t)$ sont inverses l'un de l'autre. Dès lors, l'application $S : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E)$ définie par*

$$S(t) = \begin{cases} S_+(t) \text{ si } & t \geq 0 \\ S_-(-t) \text{ si } & t \leq 0 \end{cases} \tag{2.46}$$

satisfait aux propriétés suivantes :

(i) $S(0) = 1$.

(ii) Pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$.

(iii) Pour tout $u \in E$, l'application

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto S(t)u \in E$$

est continue.

Le corollaire 2.13 s'étend alors sans difficulté sous la forme suivante : pour tout $u_0 \in E$, la fonction $u : t \in \mathbb{R} \mapsto S(t)u_0 \in E$ est l'unique fonction continue de $\mathbb{R}$ dans E satisfaisant à $u(0) = u_0$ et, pour toute fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, C^1 à support compact,

$$\int_{-\infty}^\infty \psi(t)u(t)dt \in D(A) \quad \text{et} \quad A\Big(\int_{-\infty}^\infty \psi(t)u(t)dt\Big) = \int_{-\infty}^\infty \psi'(t)u(t)dt,$$

cette dernière condition pouvant être remplacée, si $u_0 \in D(A)$, par

$$u \in C^1(\mathbb{R}, E) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \ u(t) \in D(A), \ \ u'(t) + Au(t) = 0.$$

L'application S est appelée le **groupe** engendré par A. Un cas particulier intéressant est celui où chaque $S(t)$ est une isométrie de E (comme dans l'exemple 1.2) ce qui équivaut au fait que $S_+(t)$ et $S_-(t)$ soient des contractions pour tout $t \geq 0$, c'est-à-dire, d'après le théorème de Hille-Yosida, au fait que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\lambda + A : D(A) \to E$ soit bijection et vérifie, pour tout $u \in E$,

$$\|(\lambda + A)^{-1}u\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\|u\|.$$

Notation 2.15. — *Par analogie avec la proposition 2.5, si A vérifie les hypothèses du corollaire 2.13 et S est le semi-groupe engendré par A, on note*

$$S(t) = \exp(-tA),$$

de sorte que la solution u de (2.43) vérifiant $u(0) = u_0$ s'écrit

$$u(t) = \exp(-tA)u_0.$$

2.4. Le cas des espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $E = \mathcal{H}$ est un espace de Hilbert. Rappelons que $\mathcal{H}$ est muni d'une application

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longmapsto (u|v) \end{aligned}$$

appelée produit scalaire, $\mathbb{C}$ linéaire en u, anti-$\mathbb{C}$ linéaire en v, et vérifiant les propriétés suivantes :

a) $(u|v) = \overline{(v|u)}$ (symétrie hermitienne)

b) $(u|u) > 0$ pour tout $u \neq 0$.

On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|(u|v)|^2 \leq (u|u)(v|v)$$

qui assure que l'application $u \mapsto \|u\| = (u|u)^{1/2}$ est bien une norme. Nous supposons enfin que $\mathcal{H}$, muni de cette norme, est complet. Cette structure entraîne plusieurs propriétés remarquables (projection orthogonale sur un convexe fermé, décomposition orthogonale associée à un sous-espace fermé, caractérisation des formes linéaires continues, ...) pour lesquelles nous renvoyons au cours de G. Lebeau déjà cité. Nous nous contenterons ici de rappeler sans démonstration l'une de ces propriétés, très utile en théorie des opérateurs.

***Proposition 2.16* (lemme des opérateurs coercifs)**. — *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel qu'il existe $C > 0$ vérifiant, pour tout $u \in \mathcal{H}$,*

$$|(Tu|u)| \geq C\|u\|^2.$$

Alors T est bijectif.

Le but de ce paragraphe est de donner une nouvelle caractérisation des générateurs infinitésimaux de semi-groupes de contractions sur $\mathcal{H}$. Pour cela, introduisons une définition.

Définition 2.17. — *Soit $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur non borné dans $\mathcal{H}$. On dit que A est* accrétif *si, pour tout $u \in D(A)$,*

$$\mathrm{Re}(Au|u) \geq 0.$$

On dit que A est **maximal accrétif** *s'il est accrétif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 + A$ soit surjectif de $D(A)$ sur $\mathcal{H}$.*

Remarque 2.18. — *Si A est accrétif, alors, pour tout $\lambda > 0$, pour tout $u \in D(A)$,*

$$\mathrm{Re}((\lambda + A)u|u) = \lambda\|u\|^2 + \mathrm{Re}(Au|u) \geq \lambda\|u\|^2, \tag{2.47}$$

de sorte que $\lambda + A : D(A) \to \mathcal{H}$ est injectif. Ainsi, si A est maximal accrétif, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 + A$ soit bijectif de $D(A)$ sur $\mathcal{H}$. Par ailleurs, si A est maximal accrétif, $D(A)$ est toujours dense. En effet, soit v un vecteur orthogonal à $D(A)$. Par hypothèse, il existe $u \in D(A)$ tel que $v = (\lambda_0 + A)u$. Alors

$$0 = \mathrm{Re}(v|u) = \mathrm{Re}((\lambda_0 + A)u|u) \geq \lambda_0 \|u\|^2$$

donc $u = 0$, et finalement $v = 0$.

Théorème 2.3. — *Sur un espace de Hilbert, les générateurs infinitésimaux de semi-groupes de contractions sont les opérateurs maximaux accrétifs.*

Démonstration. — Supposons que A soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions S sur $\mathcal{H}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathrm{Re}(S(t)u|u) \leq \|S(t)u\|\|u\| \leq \|u\|^2. \tag{2.48}$$

Si $u \in D(A)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(Au|u) &= -\frac{d}{dt}\mathrm{Re}(S(t)u|u)_{|t=0^+}\\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\|u\|^2 - \mathrm{Re}(S(t)u|u)}{t} \geq 0\end{aligned}$$

en vertu de (2.48). L'opérateur A est donc accrétif. Enfin, d'après le théorème 2.2, $\lambda + A : D(A) \to \mathcal{H}$ est bijectif pour tout $\lambda > 0$.
Réciproquement, soit A un opérateur maximal accrétif sur $\mathcal{H}$, et soit $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 + A$ soit bijectif de $D(A)$ sur $\mathcal{H}$. Pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, considérons l'application linéaire $T_\lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ définie par

$$T_\lambda u = u + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 + A)^{-1}u.$$

On remarque que $T_\lambda \circ (\lambda_0 + A) = \lambda + A$, de sorte que $\lambda + A$ est bijectif de $D(A)$ sur $\mathcal{H}$ si et seulement si T_λ est bijectif de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$. De plus, pour tout $\lambda > 0$, pour tout $u \in D(A)$, l'inégalité (2.47) combinée à l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$\|(\lambda + A)u\| \geq \lambda\|u\|, \tag{2.49}$$

de sorte, si $\lambda + A$ est bijectif de $D(A)$ sur $\mathcal{H}$, on a, pour tout $v \in \mathcal{H}$,

$$\|(\lambda + A)^{-1}v\| \leq \frac{1}{\lambda}\|v\|. \tag{2.50}$$

Compte tenu du théorème de Hille-Yosida (et de la remarque 2.18 assurant la densité de $D(A)$), il nous suffit donc de montrer que T_λ est bijectif de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$ pour tout $\lambda \geq \lambda_0$. En vertu de (2.50) pour $\lambda = \lambda_0$, $T_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. De plus, pour tout $v \in \mathcal{H}$,

$$|(T_\lambda v|v)| \geq \mathrm{Re}(T_\lambda v|v) = \|v\|^2 + (\lambda - \lambda_0)\,\mathrm{Re}((\lambda_0 + A)^{-1}v|v)\,. \tag{2.51}$$

Mais, en appliquant l'inégalité (2.47) à $\lambda = \lambda_0$ et à $u = (\lambda_0 + A)^{-1}v$, on constate que

$$\mathrm{Re}((\lambda_0 + A)^{-1}v|v) \geq \lambda_0 \|(\lambda_0 + A)^{-1}v\|^2 \geq 0,$$

donc, en revenant à (2.51), pour $\lambda \geq \lambda_0$,

$$|(T_\lambda v|v)| \geq \|v\|^2.$$

L'opérateur T_λ est donc coercif, donc bijectif d'après la proposition 2.16. □

En tenant compte du théorème 2.3, le corollaire 2.13 et la fin de la remarque 2.14 se traduisent par les résultats suivants.

Corollaire 2.19. — *Soit $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. On suppose qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $\lambda_0 > \omega$ tels que $\lambda_0 + A$ soit surjectif de $D(A)$ sur $\mathcal{H}$ et, pour tout $u \in D(A)$,*

$$\mathrm{Re}(Au|u) \geq -\omega\|u\|^2.$$

Alors on a les conclusions du corollaire 2.13.

Corollaire 2.20. — *Sur un espace de Hilbert, les générateurs infinitésimaux de groupes d'isométries sont les opérateurs non bornés vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(i) Pour tout $u \in D(A)$, $\mathrm{Re}(Au|u) = 0$.

(ii) Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 + A$ et $\lambda_0 - A$ soient surjectifs de $D(A)$ sur $\mathcal{H}$.

2.4.1. Exemple : l'évolution d'une particule quantique dans $\mathbb{R}^3$. — Dans ce paragraphe, on choisit

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})\ ,$$

muni du produit scalaire

$$(\psi_1|\psi_2) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_1(x)\overline{\psi_2(x)}\, dx\ .$$

Les éléments de $\mathcal{H}$ — plus précisément de sa sphère unité — sont les “fonctions d'onde” de la mécanique quantique, décrivant l'état d'une particule quantique dans $\mathbb{R}^3$, ce qui justifie la notation ψ adoptée dans ce paragraphe. On représente les interactions auxquelles est soumise la particule quantique par un potentiel, c'est–à–dire une fonction mesurable $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Un exemple typique, lorsque la particule quantique est l'électron de l'atome d'hydrogène, soumis à l'attraction électrostatique du noyau, est le potentiel newtonien

$$V(x) = \frac{c}{|x|}\ ,$$

où c est une constante négative. En écrivant

$$V(x) = \frac{c}{|x|}\mathbf{1}_{\{|x|>1\}} + \frac{c}{|x|}\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\ ,$$

on constate que l'on peut écrire

$$V = V_1 + V_2 \ , \ V_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \ , \ V_2 \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \ . \tag{2.52}$$

Sous cette dernière hypothèse, nous allons montrer que l'évolution de la particule quantique peut être décrite par un groupe d'isométries de $L^2(\mathbb{R}^3)$, associé à la résolution de l'équation de Schrödinger.

Théorème 2.4. — *Soit V un potentiel vérifiant la propriété (2.52). Pour toute fonction $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, il existe une unique solution $\psi \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$ du problème d'évolution*

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \psi}{\partial t} & = -\Delta\psi + V\psi \\ \\ \psi(0) & = \psi_0 \end{cases} \tag{2.53}$$

En outre, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|\psi(t)\|_{L^2} = \|\psi_0\|_{L^2} \ . \tag{2.54}$$

La première équation dans (2.53) est l'équation de Schrödinger. C'est une équation aux dérivées partielles dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, qui s'interprète au sens des distributions. En effet, puisque $\psi \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$, la fonction

$$(t, x) \mapsto \psi(t)(x)$$

définit un élément de $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, noté encore ψ. En outre, à cause de l'hypothèse (2.52), la fonction V est un élément de $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, donc de $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, de sorte que le produit $V\psi$ est bien défini dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$. L'équation de Schrödinger a donc bien un sens dans le cadre des distributions sur l'espace–temps $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Quant à la deuxième équation dans (2.53), elle exprime que la sphère unité de $L^2(\mathbb{R}^3)$ est invariante par l'évolution, ce qui est cohérent avec l'interprétation de la fonction $|\psi(t)|^2$ comme densité de probabilité de présence de la particule dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des positions.

Démonstration. — Passons à la démonstration du théorème 2.4.
Première étape : Définition de l'opérateur A. L'équation de Schrödinger s'écrit

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - i(\Delta\psi - V\psi) = 0 \ ,$$

il est donc naturel de choisir pour A l'opérateur $-i(\Delta - V)$. Posons

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}^3) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3), \forall \alpha \in \mathbb{N}^3, \partial^\alpha \psi \in L^2(\mathbb{R}^3)\} \ .$$

Montrons que A envoie $D(A)$ dans $\mathcal{H}$. Á l'aide de la transformation de Fourier $u \mapsto \hat{u}$, définie sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$ par

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3) \ , \ \langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle \ , \ \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-ix.\xi} \varphi(x)\, dx \ ,$$

on montre aisément que

$$H^2(\mathbb{R}^3) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3), (1 + |\xi|^2)\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^3)\} \ .$$

Il en résulte que $H^2(\mathbb{R}^3) \subset L^\infty(\mathbb{R}^3)$. En effet, en vertu de l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\psi}(\xi)|\, d\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi|^2)^{-2}\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

la deuxième intégrale au second membre étant finie car la puissance 4 est supérieure à la dimension d'espace. Il en résulte que, si $\psi \in H^2(\mathbb{R}^3)$, alors $\hat{\psi} \in L^1(\mathbb{R}^3)$, donc ψ est (continue) bornée. En conséquence, si $\psi \in H^2(\mathbb{R}^3)$, alors d'une part $\Delta\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, d'autre part $V\psi = V_1\psi + V_2\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, puisque $V_1 \in L^\infty, V_2 \in L^2, \psi \in L^2 \cap L^\infty$. On définit donc

$$\begin{aligned} A : D(A) &\to \mathcal{H} \\ \psi &\mapsto -i(\Delta\psi - V\psi) \end{aligned}$$

Deuxième étape : Construction de l'évolution. Montrons que A et $-A$ sont maximaux accrétifs sur $\mathcal{H}$, c'est–à–dire que A satisfait aux conditions i et ii du corollaire 2.20. Pour $\psi \in H^2(\mathbb{R}^3)$, calculons

$$(A\psi|\psi) = -i \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta\psi - V\psi)\overline{\psi}\, dx \ .$$

Par troncature et régularisation, $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $H^2(\mathbb{R}^3)$, de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta\psi\overline{\psi}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi|^2\, dx \ .$$

On en déduit que

$$(A\psi|\psi) = i \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi|^2 + V|\psi|^2\, dx \ , \tag{2.55}$$

et donc $\mathrm{Re}(A\psi|\psi) = 0$.
Passons à la propriété ii.

Lemme 2.21. — *Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| \geq \lambda_0$, l'application linéaire $A + \lambda I : D(A) \to \mathcal{H}$ est surjective.*

Pour démontrer le lemme 2.21, écrivons

$$A + \lambda I = -i(\Delta - V) + \lambda I = -i\Delta + \lambda I + iV \ .$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'opérateur $-i\Delta + \lambda I : H^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$ est bijectif. En effet, il correspond, via la transformation de Fourier, à la multiplication par la fonction $i|\xi|^2 + \lambda$, et l'assertion provient de la caractérisation rappelée ci–dessus de H^2 par transformation de Fourier. Précisons ce résultat par les deux estimations

$$\|(-i\Delta + \lambda I)^{-1}\|_{L^2 \to L^2} \leq \frac{1}{|\lambda|} \tag{2.56}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \ \ \|(-i\Delta + \lambda I)^{-1}\|_{L^2 \to L^\infty} \leq \frac{C_\varepsilon}{|\lambda|} + \varepsilon \ . \tag{2.57}$$

La première estimation provient du théorème de Plancherel,

$$\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \ , \ \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2\, dx = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi \ ,$$

et du fait que l'opérateur $-i\Delta + \lambda I$ correspond, via la transformation de Fourier, à la multiplication par la fonction $(i|\xi|^2 + \lambda)^{-1}$, dont le module est majoré par $|\lambda|^{-1}$. Quant à la seconde estimation de (2.56), elle s'obtient en écrivant, pour $\psi = (-i\Delta + \lambda I)^{-1} f$,

$$\begin{aligned}
(2\pi)^3 \|\psi\|_{L^\infty} &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\psi}(\xi)|\, d\xi = \int_{|\xi|\leq R} |\hat{\psi}(\xi)|\, d\xi + \int_{|\xi|>R} |\hat{\psi}(\xi)|\, d\xi \\
&\leq \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_{L^2} + \left(\int_{|\xi|>R} \frac{1}{\lambda^2 + |\xi|^4}\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} (\lambda^2 + |\xi|^4)|\hat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C(R)}{|\lambda|} \|f\|_{L^2} + \varepsilon(R)\|f\|_{L^2} \ ,
\end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon(R) := \left((2\pi)^3 \int_{|\xi|>R} \frac{1}{|\xi|^4}\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

qui tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini. La second estimation de (2.56) en découle, en prenant R assez grand. Le lemme 2.21 est donc établi.
Il reste à écrire

$$A + \lambda I = (I + iV(-i\Delta + \lambda I)^{-1})(-i\Delta + \lambda I) \ ,$$

et à observer que

$$\begin{aligned}
\|V(-i\Delta + \lambda I)^{-1}\|_{L^2\to L^2} &\leq \|V_1\|_{L^\infty} \|(-i\Delta + \lambda I)^{-1}\|_{L^2\to L^2} + \|V_2\|_{L^2} \|(-i\Delta + \lambda I)^{-1}\|_{L^2\to L^\infty} \\
&\leq \frac{\|V_1\|_{L^\infty} + \|V_2\|_{L^2} C_\varepsilon}{|\lambda|} + \|V_2\|_{L^2}\, \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

En choisissant ε assez petit puis $|\lambda|$ assez grand, on en déduit que

$$\|V(-i\Delta + \lambda I)^{-1}\|_{L^2\to L^2} < 1 \ ,$$

et donc, grâce au lemme de la série de Neumann, $I + iV(-i\Delta + \lambda I)^{-1}$ est bijectif de L^2 sur L^2. Il s'ensuit que $A + \lambda I$ est bijectif de H^2 sur L^2.
Troisième étape : Interprétation de l'évolution comme une équation aux dérivées partielles. Soit S le groupe d'isométries de $\mathcal{H}$ engendré par A en vertu du corollaire 2.20. Soit $\psi_0 \in \mathcal{H}$ et soit $\psi(t) = S(t)\psi_0$. Alors $\psi \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ est l'unique solution de $\psi(0) = \psi_0$ et

$$\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ , \ \psi_f := \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi(t)\, dt \in D(A) \quad \text{et} \quad A\psi_f = \psi_{f'} \ .$$

En testant cette dernière identité contre $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, il vient, en notant $\langle\ ,\ \rangle$ le crochet de dualité entre $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ et $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$,

$$\langle i(\Delta\psi - V\psi), f(t)\varphi(x)\rangle = -\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial t}, f(t)\varphi(x)\right\rangle \ .$$

Puisque les sommes finies de fonctions de la formes $f(t)\varphi(x)$ sont denses dans $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, on en déduit l'égalité

$$-i(\Delta\psi - V\psi) = -\frac{\partial\psi}{\partial t} \ ,$$

ce qui est l'équation de Schrödinger de (2.53).
Pour conclure la démonstration du théorème 2.4, il suffit de montrer que, réciproquement, toute fonction $\psi \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3))$ satisfaisant à l'équation de Schrödinger

$$-i(\Delta\psi - V\psi) = -\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

vérifie

$$\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ , \ \psi_f := \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi(t)\, dt \in D(A) \quad \text{et} \quad A\psi_f = \psi_{f'} \ .$$

Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, l'identité

$$-i(\Delta\psi_f - V\psi_f) = \psi_{f'}$$

s'obtient comme ci–dessus en testant l'équation de Schrödinger sur la fonction $f(t)\varphi(x)$. Il reste donc à montrer que $\psi_f \in D(A)$. Ceci est une conséquence du lemme de régularité suivant.

Lemme 2.22. — *Supposons que $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ vérifie, au sens des distributions dans $\mathbb{R}^3$,*

$$-i(\Delta\psi - V\psi) \in L^2(\mathbb{R}^3) \ .$$

Alors $\psi \in H^2(\mathbb{R}^3)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'application linéaire $-i(\Delta - V) + \lambda I : H^2 \to L^2$ soit bijective— d'après le théorème de Hille– Yosida, tout $\lambda \neq 0$ convient. Posons

$$\theta := -i(\Delta - V)\psi + \lambda\psi \ .$$

Puisque $\theta \in L^2$, il existe $\tilde{\psi} \in H^2$ telle que

$$\theta := -i(\Delta - V)\tilde{\psi} + \lambda\tilde{\psi} \ .$$

Alors, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, on a

$$-i(\Delta - V)(\psi - \tilde{\psi}) + \lambda(\psi - \tilde{\psi}) = 0 \ .$$

De façon équivalente,

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \ , \ \int_{\mathbb{R}^3} (\psi - \tilde{\psi})(-i(\Delta - V) + \lambda I)\varphi\, dx = 0 \ .$$

L'expression ci–dessus est clairement continue en φ pour la norme H^2. Puisque $\psi - \tilde{\psi} \in L^2$ et puisque $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $H^2(\mathbb{R}^3)$, on en déduit

$$\forall\varphi \in H^2(\mathbb{R}^3) \ , \ \int_{\mathbb{R}^3} (\psi - \tilde{\psi})(-i(\Delta - V) + \lambda I)\varphi\, dx = 0 \ .$$

En utilisant à nouveau la surjectivité de l'application $-i(\Delta - V) + \lambda I : H^2 \to L^2$, on conclut que

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}^3) \ , \ \int_{\mathbb{R}^3} (\psi - \tilde{\psi})g\, dx = 0 \ ,$$

donc $\psi - \tilde{\psi} = 0$, c'est–à–dire $\psi = \tilde{\psi} \in H^2(\mathbb{R}^3)$.
Le théorème 2.4 est ainsi complètement démontré. □

Remarque : Conservation de l'énergie. La formule (2.55)

$$\forall \psi \in D(A)\ ,\ -i(A\psi|\psi) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\psi|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^3} V|\psi|^2\, dx =: E(\psi)$$

représente l'énergie de la particule dans l'état ψ — la première intégrale correspondant à l'énergie cinétique, la seconde à l'énergie potentielle. Le théorème 2.1 assure que, pour toute donnée initiale $\psi_0 \in D(A)$, alors la solution ψ appartient à $C^1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ et vérifie $\psi(t) \in D(A)$ pour tout t, avec

$$\frac{d\psi}{dt} + A\psi = 0\ .$$

En utilisant cette propriété, on montre que $E(\psi(t))$ est conservée au cours du temps.

2.4.2. Problèmes inhomogènes. — Terminons ce chapitre par une remarque sur le problème inhomogène

$$\frac{du}{dt} + Au = f, \quad u(0) = u_0. \tag{2.58}$$

Le cadre des espaces de Hilbert séparables se prête bien à des conditions raisonnablement optimales sur la fonction f pour que (2.58) admette une solution u continue à valeurs dans $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, c'est-à-dire admettant une partie dénombrable dense (c'est le cas de $L^2(\Omega)$ pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$). Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathcal{H}$, nous conviendrons de dire que f est **mesurable** si, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, l'application

$$t \in I \longmapsto (f(t)|\varphi) \in \mathbb{C} \tag{2.59}$$

est mesurable. Dans ces conditions, l'application

$$\|f\| : t \in I \longmapsto \|f(t)\| \in \mathbb{R}_+ \tag{2.60}$$

est également mesurable, car

$$\|f(t)\| = \sup_n |(f(t)|\varphi_n)| \tag{2.61}$$

si (φ_n) est une suite dense dans la boule unité de $\mathcal{H}$. On dira alors que f est **intégrable** sur I si

$$\int_I \|f(t)\| dt < +\infty. \tag{2.62}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il s'ensuit que chacune des fonctions (2.59) est intégrable, et que la forme linéaire

$$L : \varphi \in \mathcal{H} \longmapsto \int_I (f(t)|\varphi) dt \tag{2.63}$$

vérifie

$$|L(\varphi)| \le \Big(\int_I \|f(t)\|\, dt\Big)\|\varphi\|.$$

D'après le théorème de représentation des formes linéaires continues sur $\mathcal{H}$, on en déduit l'existence d'un élément unique J de $\mathcal{H}$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, $L(\varphi) = (J \mid \varphi)$. On appellera J l'intégrale de f sur I, et on notera

$$J = \int_I f(t)dt. \tag{2.64}$$

Remarquons que

$$\Big\| \int_I f(t)dt \Big\| \leq \int_I \|f(t)\|dt. \tag{2.65}$$

A titre d'exercice, le lecteur pourra étendre à ce cadre les résultats classiques de théorie de l'intégration : convergence dominée, complétude de l'espace $L^1(I, \mathcal{H})$, théorème de Fubini, ... Il pourra également vérifier que, si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, l'espace $L^1(I, L^2(\Omega))$ ainsi défini s'identifie aux éléments $f \in L^1_{\text{loc}}(I \times \Omega)$ vérifiant

$$\int_I \Big(\int_\Omega |f(t,x)|^2 dx \Big)^{1/2} dt < +\infty, \tag{2.66}$$

et que l'intégrale (2.64) n'est autre que l'intégrale usuelle par rapport à t.

Compte tenu de ces définitions, il est facile de démontrer le résultat suivant, dont nous laissons également la démonstration au lecteur.

Proposition 2.23. — *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe sur l'espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Pour tout $u_0 \in \mathcal{H}$, pour tout $f \in L^1(]0, T[, \mathcal{H})$, il existe $u \in C([0, T], \mathcal{H})$ unique tel que $u(0) = u_0$ et, pour tout ψ :$]0, T[\to \mathbb{K}$ de classe C^1 à support compact, $\int_0^T \psi(t)u(t)dt$ appartienne à $D(A)$ et*

$$A\Big(\int_0^T \psi(t)u(t)dt \Big) = \int_0^T \psi'(t)u(t)dt + \int_0^T \psi(t)f(t)\,dt. \tag{2.67}$$

De plus, u est donné par la "formule de Duhamel"

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} f(\tau)\,d\tau. \tag{2.68}$$

Terminons ce chapitre par quelques commentaires sur la régularité des solutions de (2.67). Soit $\mathcal{H}_1$ un espace de Hilbert séparable. On suppose donnée une application linéaire continue

$$j : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}.$$

Il est facile de vérifier que, si $f_1 \in L^1(I, \mathcal{H}_1)$ au sens précédent, alors $f = j \circ f_1$ est dans $L^1(I, \mathcal{H})$, et

$$j\Big(\int_I f_1(t)dt \Big) = \int_I f(t)dt. \tag{2.69}$$

Supposons de plus j injective, et plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition 2.23. Supposons enfin que e^{-tA} laisse invariante l'image de j. On définit alors une application linéaire $S_1(t) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ par $j \circ S_1(t) = e^{-tA} \circ j$. D'après le théorème du graphe fermé,

$S_1(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Supposons de plus que, pour tout élément v_1 de $\mathcal{H}_1$, l'application de $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto S_1(t)v_1 \in \mathcal{H}_1$ soit continue, de sorte que S_1 soit un semi-groupe sur $\mathcal{H}_1$. Notons A_1 son générateur infinitésimal. Alors, si $u_0 = j(u_{0,1})$, on conclut, en utilisant par exemple la formule de Duhamel (2.68), que $u(t) = j(u_1(t))$, où u_1 est donnée par la proposition 2.23 en remplaçant $\mathcal{H}$, A, u_0, f par $\mathcal{H}_1$, A_1, $u_{0,1}$, f_1.

CHAPITRE 3

PROBLÈMES VARIATIONNELS

3.1. La résolution du problème de Dirichlet

Rappelons d'abord un résultat abstrait classique. Soit $a(u,v)$ une forme sesquilinéaire sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On dit que a est coercive si et seulement si :

$$\exists C > 0; \forall u \in \mathcal{H}, \quad |a(u,u)| \geq C\|u\|^2.$$

Théorème 3.1. — (Lax–Milgram). *Soit a une forme sesquilinéaire continue et coercive sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors pour toute forme linéaire continue φ sur $\mathcal{H}$, il existe un unique vecteur $u \in \mathcal{H}$ tel que*

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle.$$

Le théorème 3.1 est une conséquence immédiate du théorème de représentation des formes linéaires continues sur un espace de Hilbert, et du lemme des opérateurs coercifs (proposition 2.16). Notons que, lorsque la forme a est de plus elle–même un produit scalaire, elle définit sur $\mathcal{H}$ une nouvelle structure hilbertienne, équivalente à la structure initiale. Le théorème n'est alors rien d'autre que le th éorème de représentation des formes linéaires continues.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note

$$H^1(\Omega) = \big\{u \in \mathcal{D}'(\Omega);\, u \in L^2(\Omega)\,, \nabla u \in L^2(\Omega)\big\}.$$

Alors $H^1(\Omega)$, muni du produit scalaire

$$(u|v)_{H^1} = (u|v)_{L^2} + (\nabla u|\nabla v)_{L^2} = \int_\Omega (\overline{u(x)}\, v(x) + \overline{\nabla u(x)}.\nabla v(x))\, dx$$

est un espace de Hilbert. On note $H^1_0(\Omega)$ l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et on désigne par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H^1_0(\Omega)$. L'application

$$\varphi \in H^{-1}(\Omega) \longmapsto T_\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

définie par

$$\langle T_\varphi, \psi\rangle_{\mathcal{D}'}^{C_0^\infty} = \langle \varphi, \psi\rangle_{H^{-1}}^{H_0^1}, \quad \forall \psi \in C_0^\infty$$

est injective puisque $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Cette application nous permet donc d'identifier $H^{-1}(\Omega)$ au sous espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$ constitué des distributions T pour lesquelles il existe $C > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\ ,\ |\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'}^{C_0^\infty}| \le C\|\varphi\|_{H^1}\ ,$$

ce que nous ferons désormais. Un sous–espace de $H^{-1}(\Omega)$ est donc bien sûr $L^2(\Omega)$. En outre, si $f \in L^2(\Omega)$, il est facile de vérifier que, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \in H^{-1}(\Omega)\ .$$

Remarque. Lorsque l'ouvert Ω est suffisamment régulier, de sorte qu'en particulier le bord $\partial\Omega$ de Ω soit une hypersurface compacte de $\mathbb{R}^d$, munie de sa mesure superficielle σ, il est possible de définir une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega, \sigma)$, appelée trace, qui prolonge la restriction à $\partial\Omega$ des fonctions régulières. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est alors le noyau de cette application linéaire trace.

Compte tenu de la remarque précédente, le résultat qui suit s'interprète comme une version généralisée à tout ouvert de la résolution du problème de Dirichlet : trouver une fonction de laplacien donné dans Ω avec une trace nulle sur le bord de Ω.

Théorème 3.2. — *Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que*

$$-\Delta u + \lambda u = f \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.1}$$

De plus, si Ω est borné, ce résultat est encore vrai pour $\lambda = 0$.

Démonstration. — L'équation (3.5) s'écrit

$$\begin{aligned}
&\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega),\ \langle u, -\Delta\psi + \lambda\psi\rangle_{\mathcal{D}'}^{C_0^\infty} = \langle f, \psi\rangle_{\mathcal{D}'}^{C_0^\infty}\\
\Longleftrightarrow &\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega),\ \langle \nabla u, \nabla\psi\rangle_{\mathcal{D}'}^{C_0^\infty} + \lambda\langle u, \psi\rangle_{\mathcal{D}'}^{C_0^\infty} = \langle f, \psi\rangle_{\mathcal{D}'}^{C_0^\infty}\\
\Longleftrightarrow &\forall \psi \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega \nabla\overline{u}.\nabla\psi\, dx + \overline{\lambda}\int_\Omega \overline{u}\psi\, dx = \langle \overline{f}, \psi\rangle_{H^{-1}}^{H_0^1}\ ,
\end{aligned}$$

la dernière équivalence provenant du fait que les deux membres sont des formes linéaires continues en ψ pour la norme H^1, et de ce que $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ pour cette norme. Le théorème de Lax–Milgram donne alors le résultat, car, puisque $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left|\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \overline{\lambda}\|u\|_{L^2}^2\right| \ge \delta\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2\right)\ .$$

Pour $\lambda = 0$, la coercivité est fournie par le lemme suivant.

***Proposition 3.1* (Inégalité de Poincaré).** — *. Soit Ω un ouvert borné. Alors il existe $C > 0$ tel que $\forall u \in H_0^1(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. — Les deux termes de l'inégalité étant continus pour la norme H^1, il suffit de démontrer cette inégalité sur un ensemble dense dans $H_0^1(\Omega)$, soit $C_0^\infty(\Omega)$.

Supposons $\Omega \subset \{x = (x_1, \dots, x_d); |x_1| \leq R\}$ alors pour $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$u(x) = \int_{-R}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) dt$$

et

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^2 dx &= \int_\Omega \Big| \int_{-R}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_1, \dots, x_d) dt \Big|^2 dx_1\, dx_2 \dots dx_d \\
&\leq \int \int_{x_1=-R}^{R} \int_{t=-R}^{x_1} \Big| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d \Big|^2 dt \times (x_1 + R) dx \\
&\leq \int_{x_2, \dots, x_d} \int_{t=-R}^{R} \Big| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_d) \Big|^2 dt dx_2 \dots dx_d \times \int_{x_1=t}^{R} (x_1 + R)\, dx_1 \\
&\leq 2R^2 \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

□

Exercice 3.2. — *Soit Ω un ouvert borné. Montrer que $-\Delta$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. On munit $H_0^1(\Omega)$ de la norme*

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

et H^{-1} de la norme

$$\|v\|_{H^{-1}} = \sup_{\|u\|_{H_0^1}=1} |\langle v, u\rangle|_{H^{-1}}^{H_0^1} = \sup_{\varphi \in C_0^\infty, \|\varphi\|_{H_0^1}=1} |\langle v, \varphi\rangle|.$$

1. *Montrer que si $v = -\Delta u$, $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $\|v\|_{H^{-1}} = \|u\|_{H_0^1}$, c'est à dire*

$$\|v\|_{H^{-1}} = \|\nabla \Delta_D^{-1}(v)\|_{L^2}$$

2. *Que se passe-t-il si on munit $H_0^1(\Omega)$ de la norme $\|u\|_{H^1}^2 = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2$?*

3.2. Décomposition spectrale des opérateurs compacts autoadjoints

Définition 3.3. — *Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ deux Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un opérateur continu de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$. On dit que T est compact si et seulement si $\overline{T(B(0,1))}$ est un ensemble compact dans $\mathcal{H}$.*

Exemple 3.4. — *Un opérateur de rang fini est compact. Plus généralement, une limite, pour la norme d'opérateurs, d'une suite d'opérateurs de rang fini, est un opérateur compact.*

Démonstration. — En effet, montrons que toute limite en norme d'opérateurs compacts est compacte. Soient T_n, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tels que

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)} \longrightarrow 0$$

avec T_n compact pour tout n. Fixons $\varepsilon > 0$ et T_n tel que $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{2}$; comme $\overline{T_n(B(0,1))}$ est compacte, on peut la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$

$$\overline{T_n(B(0,1))} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B\Big(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$

donc

$$\overline{T(B(0,1))} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon)\ .$$

On peut donc recouvrir $\overline{T(B(0,1))}$ par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon > 0$, c'est donc un ensemble compact et l'opérateur T est donc compact. □

Enfin, il est facile de montrer qu'une composée d'opérateurs continus dont l'un au moins est compact, est un opérateur compact. Voyons tout de suite un exemple d'opérateur compact.

Proposition 3.5. — *Soit Ω un ouvert borné. Alors l'injection $i : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est compacte.*

Démonstration. — **1ère étape :** On remarque d'abord que le prolongement par 0 envoie isométriquement $H_0^1(\Omega)$ dans $H^1(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $u \in H_0^1(\Omega)$, alors il existe $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que

$$\varphi_n \longrightarrow u \ \text{ dans } \ L^2(\Omega)$$
$$\nabla\varphi_n \longrightarrow \nabla u \ \text{ dans } \ L^2(\Omega).$$

La suite $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est donc de Cauchy dans $H^1(\mathbb{R}^d)$ et elle converge donc vers $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Or il est clair que

$$\varphi_n \longrightarrow \underline{u} \ \text{ dans } \ L^2(\mathbb{R}^d)$$

où

$$\begin{aligned} \underline{u}(x) &= u(x) \ \text{ si } \ x \in \Omega \\ &= 0 \ \text{ sinon} \end{aligned}$$

donc $\underline{u} = \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$.
2ème étape : $\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, l'application $j : u \in H^1(\mathbb{R}^d) \to u \times \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est compacte. En effet, supposons que $\psi \in C_0^\infty(]-R, R[^d)$. Notons $(u\psi)^\#$ le prolongement par périodicité

sur $\mathbb{R}^d$, de période $2R\mathbb{Z}^d$ de ψu. Supposons (pour simplifier le calcul) $R = \frac{1}{2}$. Notons pour $\alpha = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$

$$T_\alpha(u\psi) = \int_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[^d} e^{-2i\pi(x\cdot\alpha)} u\psi(x)dx$$

alors

$$(u\psi)^\#(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} e^{2i\pi\alpha\cdot x} T_\alpha(\psi u)$$

et la série est convergente dans $L^2\left(\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[^d\right)$

$$\|(u\psi)^\#\|^2_{L^2(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} |T_\alpha(u\psi)|^2$$

$$\|\nabla(u\psi)^\#\|^2_{L^2(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} |T_\alpha(u\psi)|^2 \times \sum_1^d 4\pi^2|\alpha_i|^2.$$

Notons

$$j_N : u \longmapsto \sum_{|\alpha|\leq N} e^{2i\pi\alpha\cdot x} T_\alpha(\psi u) \times 1_{x\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[^d}$$

d'après ce qui précède

$$\|j - j_N\|_{\mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^d);L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{C}{N}.$$

Les opérateurs j_N sont compacts (car de rang fini) donc j est un opérateur compact.
3ème étape : Finalement, en choisissant $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\psi_{|\Omega} = 1$ l'injection $i : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ se décompose en

$$\begin{array}{ccccccc} H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ u & \longmapsto & \underline{u} & \longmapsto & \psi\underline{u} & \longmapsto & \psi\underline{u}_{|\Omega} \end{array}$$

et comme le composé d'un opérateur compact et d'un opérateur continu est compact, on obtient la compacité de i. □

L'un des avantages des opérateurs compacts est qu'ils possèdent une décomposition spectrale très simple.

Théorème 3.3. — *Soient $\mathcal{H}$ un Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur compact autoadjoint. Alors les valeurs propres de T non nulles sont de multiplicité finie ; elles sont en nombre fini ou forment une suite tendant vers 0. De plus, $\mathcal{H}$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

Démonstration. — **1ère étape :** Si λ est une valeur propre non nulle de T, de sous–espace propre E_λ, alors l'application identique de E_λ coïncide avec T/λ, donc est compacte. Le théorème de Riesz assure alors que E_λ est de dimension finie.
2ème étape : Supposons que T admette une infinité de valeurs propres non nulles. Soit (λ_n) une suite injective de telles valeurs propres convergeant vers λ. Pour chaque n, soit e_n un vecteur propre unitaire associé à λ_n. Alors les e_n sont deux à deux orthogonaux puisque T est autoadjoint. Quitte à extraire une sous–suite, on peut supposer que Te_n converge ; si

on suppose de plus que $\lambda \neq 0$, alors $e_n = Te_n/\lambda_n$ converge vers un vecteur e, qui est donc lui aussi unitaire. Mais ceci est absurde, puisque $(e|e_n)$ est la limite de $(e_p|e_n)$ quand p tend vers l'infini, donc est nul, de sorte que, en passant à la limite en n, on conclut que $e = 0$. Il en résulte que 0 est le seul point d'accumulation possible des valeurs propres de T, qui forment donc une suite tendant vers 0.

3ème étape : Montrons d'abord que, si $T \neq 0$, alors T a au moins une valeur propre non nulle. En effet, soient $M = \|T\|$ et $u_n \in B(0,1)$ tel que $\|Tu_n\| \to M$ $(n \to +\infty)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer (puisque l'opérateur T est compact) que $Tu_n \to v$ dans $\mathcal{H}$. On a $\|v\| = M$ et

$$(Tv|u_n)_{\mathcal{H}} = (v|Tu_n) \longrightarrow (v|v) = M^2.$$

Notons $u_n = p_n + q_n$, $p_n = \lambda_n Tv$, $(q_n|Tv) = 0$. On a

$$|(v|Tu_n)_{\mathcal{H}}| = |(Tv|u_n)_{\mathcal{H}}| = |(Tv|p_n)| \leq \|T\|\|v\|\|p_n\| = M^2\|p_n\|$$

donc $\varliminf_n \|p_n\| = 1 = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|$, donc $\lim_{n\to+\infty} \|q_n\| = 0$ et, quitte à extraire encore une sous–suite, on peut supposer que λ_n converge vers λ, de sorte que $u_n \to \lambda Tv$. Il en résulte que $\|\lambda Tv\| = 1$ et $\lambda\|Tv\|^2 = M^2$, d'où $\lambda = 1/M^2$. Mais $v = \lim_n Tu_n = \lambda T^2 v$ et $v \in \operatorname{Ker}(T^2 - M^2) = \operatorname{Ker}(T-M)(T+M)$; les deux opérateurs $T \mp M$ ne sont donc pas tous les deux injectifs ; l'opérateur T a donc une valeur propre dont la valeur absolue est M.

4ème étape : Soit (λ_n), la suite (éventuellement finie) des valeurs propres non nulles de l'opérateur T. Notons $E_n = \operatorname{Ker}(T - \lambda_n \operatorname{Id})$. Les E_n sont orthogonaux deux à deux. Soit $E = \operatorname{Vect}\big(\bigoplus_n E_n\big)$ l'espace vectoriel engendré et $F = E^\perp$ son orthogonal. Alors F est stable par T. En effet, si $(u|v) = 0$ $\forall v \in E_n$, alors

$$(Tu|v) = (u|Tv) = \lambda_n(u|v) = 0.$$

De plus F est fermé et $T_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ est autoadjoint compact. Par construction, $T_{|F}$ ne peut avoir de valeur propre non nulle, donc, par iii), $T_{|F} = 0$. Pour conclure il suffit maintenant de prendre une base orthonormée dans chaque E_n, et une base hilbertienne dans F. On obtient ainsi, d'après ce qui précède, une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. $\square$

Application : le spectre du laplacien de Dirichlet sur un ouvert borné. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. On considère l'opérateur T, qui à $u \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ associe l'unique solution $Tu \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ de l'équation

$$-\Delta(Tu) = u \ \text{ dans } \ \mathcal{D}'(\Omega).$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on vérifie facilement que

$$\|\nabla Tu\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}$$

donc T est continu de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. L'opérateur $i \circ T$ est donc un opérateur compact sur $L^2(\Omega)$. On vérifie également (en revenant à la définition de T) que $i \circ T$ est autoadjoint et injectif. Il existe donc une base hilbertienne (e_n) de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres de $i \circ T$; notons $Te_n = \mu_n e_n$. On remarque que

$$(e_n|Te_n)_{L^2} = \|\nabla Te_n\|^2_{L^2}$$

d'où

$$1 = \mu_n \|\nabla e_n\|^2_{L^2}$$

et $\mu_n > 0$ pour tout n. Considérons l'opérateur non borné sur $L^2(\Omega)$, de domaine

$$D(-\Delta_D) = \Big\{u \in H^1_0(\Omega), -\Delta u \in L^2(\Omega)\Big\},$$

et défini par $-\Delta_D u = -\Delta u$. Alors l'opérateur $i \circ T$ est l'inverse de $-\Delta_D$ et on a la caractérisation suivante.

Proposition 3.6. —

$$L^2(\Omega) = \Big\{u \in \mathcal{D}'(\Omega);\, u = \Sigma u_n e_n, \quad \Sigma |u_n|^2 < +\infty\Big\}$$

$$H^1_0(\Omega) = \Big\{u \in \mathcal{D}'(\Omega);\, u = \Sigma u_n e_n, \quad \Sigma |u_n|^2 \times \frac{1}{\mu_n} < +\infty\Big\}.$$

$$D(-\Delta_D) = \Big\{u \in \mathcal{D}'(\Omega);\, u = \Sigma u_n e_n, \quad \Sigma |u_n|^2 \times \frac{1}{\mu_n^2} < +\infty\Big\}.$$

Démonstration. — La première égalité provient du fait que (e_n) est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$. En remarquant de plus que, pour tout $u \in H^1_0$, $(\nabla u|\nabla e_n)_{L^2} = (u|e_n)_{L^2}/\mu_n$, on en déduit que $(\sqrt{\mu}_n e_n)$ est une base hilbertienne de H^1_0, d'où la deuxième égalité. Enfin, la troisième égalité découle du fait qu'un élément v de H^{-1} appartient à L^2 si et seulement si

$$\Sigma |\langle v, \overline{e}_n\rangle_{H^{-1}}^{H^1_0}|^2 < +\infty \ .$$

□

La suite des $\lambda_n = 1/\mu_n$ décrit les valeurs propres de $-\Delta_D$. C'est une suite de nombres positifs tendant vers l'infini. Si Ω est connexe, on peut montrer de plus que λ_1 est simple.

3.3. Équation de la chaleur

3.3.1. Introduction. — Le mémoire de Joseph Fourier publié en 1822 sous le titre *Théorie analytique de la chaleur* se propose de décrire l'évolution de la température dans un conducteur thermique. Désignons par $T(t,x)$ la température au temps t et au point x du conducteur thermique, considéré comme un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$. Fourier établit une équation aux dérivées partielles vérifiée par T, dont nous rappelons le principe. Supposons que la transformation soit isochore, c'est–à –dire que le conducteur thermique ne subit pas de variation de volume. Considérons le système constitué d'une boule B contenue dans Ω. Alors le premier principe de la thermodynamique établit que la variation d'énergie interne dU de ce système pendant une variation infinitésimale de temps dt coïncide avec la quantité de chaleur δQ apportée au système. L'énergie interne s'écrit

$$U = \int_B c_v T \rho \, dx \ ,$$

où ρ est la densité de masse du corps, et c_v est sa chaleur massique à volume constant. On en déduit

$$dU = \left(\int_B c_v \frac{\partial T}{\partial t} \rho \, dx \right) dt \ .$$

Par ailleurs,

$$\delta Q = - \left(\int_{\partial B} J.n \, d\sigma \right) dt \ ,$$

où J désigne la densité de flux de chaleur dans le conducteur thermique, et n la normale extérieure à B, de sorte que le flux entrant dans B est $-J.n$. La loi du même Fourier (1807) stipule que la densité J est proportionnelle au gradient de température :

$$J = -\lambda \, \mathrm{grad} T \ ,$$

où $\lambda > 0$ est la conductivité thermique du milieu. On obtient donc

$$\delta Q = \left(\int_{\partial B} \lambda \, (\mathrm{grad} T).n \, d\sigma \right) dt = \left(\int_B \mathrm{div}(\lambda \, \mathrm{grad} T) \, dx \right) dt \ ,$$

la dernière identité étant la formule de Green. Comme B est une boule arbitraire, on en déduit

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda \, \mathrm{grad} T) \ .$$

En supposant le milieu homogène et isotrope, les quantités c_v, ρ et λ sont des constantes positives, et on en déduit l'équation de la chaleur,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c_v \rho} \Delta T \ .$$

3.3.2. Le semi–groupe de la chaleur. — Dans ce paragraphe, on montre que l'équation de la chaleur dans Ω

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \ ,$$

avec condition de Dirichlet sur le bord de Ω — que l'on peut interpréter physiquement comme la température 0 imposée au bord de Ω — définit un semi–groupe de contractions sur $L^2(\Omega)$.

Théorème 3.4. — *Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^d$. L'opérateur $A = -\Delta_D$, défini par*

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\} \ , \ Au = -\Delta u \ ,$$

est le générateur infinitésimal d'un semi–groupe S_D de contractions sur $L^2(\Omega)$.

Démonstration. — D'après le théorème 2.3, il s'agit de montrer que l'opérateur A est maximal accrétif sur $L^2(\Omega)$. Tout d'abord, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\Delta u \in L^2(\Omega)$,

$$(Au|u) = \int_\Omega -\Delta u \overline{u}\, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \geq 0 \ .$$

L'opérateur A est donc accrétif. La maximalité de A provient alors du théorème 3.2, dans le cas particulier $f \in L^2(\Omega)$ et $\lambda > 0$. □

Interprétons maintenant l'évolution ainsi définie sur $L^2(\Omega)$. Si $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $S_D(t)u_0 = u(t)$, alors

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*) \ , \ u_\psi := \int_0^\infty \psi(t)u(t)\, dt \in H_0^1(\Omega) \tag{3.2}$$

et

$$-\Delta u_\psi = u_{\psi'} \ .$$

En testant contre $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ cette dernière identité, on obtient l'identité équivalente

$$\langle -\Delta u, \psi(t)\varphi(x)\rangle = \left\langle -\frac{\partial u}{\partial t}, \psi(t)\varphi(x) \right\rangle \ .$$

Les sommes finies de fonctions du type $f(t)\varphi(x)$ étant denses dans $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \Omega)$, on en déduit que u est caractérisée par l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \ ,$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \Omega)$, la condition initiale $u(0) = u_0$, et la condition (3.2), qui assure, en un sens faible, la condition de Dirichlet.

Remarque. Dans le cas particulier d'un opérateur A tel $(Av|v) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $v \in D(A)$, on peut en fait montrer (voir exercices) que, pour tout $t > 0$, pour tout $u_0 \in \mathcal{H}$, $S(t)u_0 \in D(A)$, ce qui permet d'exprimer plus simplement la condition de Dirichlet sous la forme

$$\forall t > 0 \ , \ u(t) \in H_0^1(\Omega) \ .$$

3.3.3. Lien avec le spectre du laplacien dans le cas d'un ouvert borné. — Supposons que l'ouvert Ω soit borné. On peut alors exprimer la solution $S(t)u_0$ à l'aide de la décomposition de u_0 sur les fonctions propres du laplacien de Dirichlet. Soit (e_n) une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ telle que

$$\forall n \ , \ e_n \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad -\Delta e_n = \lambda_n e_n \ ,$$

où (λ_n) est une suite croissante de nombres strictement positifs tendant vers l'infini.

Proposition 3.7. —

$$\forall u_0 \in L^2(\Omega), \forall t \geq 0 \ , \ S_D(t)u_0 = \sum_n \mathrm{e}^{-\lambda_n t}(u_0|e_n)e_n \ .$$

Démonstration. — En faisant agir l'application linéaire continue $S_D(t)$ sur la décomposition

$$u_0 = \sum_n (u_0|e_n)e_n \ ,$$

on obtient

$$S_D(t)u_0 = \sum_n (u_0|e_n)S_D(t)e_n \ .$$

Puisque $e_n \in D(A)$, on peut écrire

$$\frac{d}{dt}S_D(t)e_n + S_D(t)Ae_n = 0 \ ,$$

soit

$$\frac{d}{dt}S_D(t)e_n = -\lambda_n S_D(t)e_n \ .$$

On en déduit

$$S_D(t)e_n = \mathrm{e}^{-\lambda_n t}e_n \ ,$$

d'où le résultat. □

La proposition 3.7 a de nombreuses conséquences. Tout d'abord, elle implique que

$$\|S_D(t)u_0\|_{L^2} \leq \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\|u_0\|_{L^2} \ ,$$

en d'autres termes la température décroît exponentiellement vers la valeur imposée au bord. Ensuite, elle permet de retrouver facilement, dans le cas particulier des ouverts bornés, la propriété de régularité de $S_D(t)u_0$ pour tout $t > 0$, à savoir $S_D(t)u_0 \in D(A)$, et même $A^k S_D(t)u_0 \in D(A)$ pour tout k. Enfin, si Ω est assez régulier, on verra qu'elle permet d'obtenir un équivalent, lorsque t tend vers 0^+, de

$$\sum \mathrm{e}^{-\lambda_n t} \ ,$$

ce qui conduit à un équivalent de λ_n lorsque n tend vers l'infini (asymptotique de Weyl).

3.3.4. Autres conditions aux limites. — On peut envisager d'autres conditions aux limites que la condition de Dirichlet pour l'équation de la chaleur, ce qui conduit à la construction d'autres semi–groupes sur $L^2(\Omega)$. Par exemple, on peut imposer que la dérivée normale de la température s'annule sur le bord de Ω, ce qui correspond, d'après la loi de Fourier, à un flux de chaleur normal au bord, donc à une hypothèse d'isolation thermique. Lorsque Ω est assez régulier, on peut montrer qu'un élément u de $H^1(\Omega)$, tel que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, vérifie cette condition aux limites, dite de Neumann, si et seulement si

$$\forall v \in H^1(\Omega) \ , \ \int_\Omega -\Delta u\, v\, dx = \int_\Omega \nabla u . \nabla v\, dx \ . \tag{3.3}$$

Plus généralement, si Ω est un ouvert quelconque, on appelle laplacien de Neumann Δ_N l'opérateur laplacien agissant sur le domaine des $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant la condition (3.3). On montre de façon analogue que $-\Delta_N$ engendre un semi–groupe S_N de contractions sur $L^2(\Omega)$, dont les trajectoires vérifient aussi l'équation de la chaleur, mais avec cette fois la condition $\forall t > 0 \ , \ S_N(t)u_0 \in H^1(\Omega)$ et vérifie (3.3). En outre, lorsque Ω est borné et assez régulier,

$-\Delta_N$ admet une base hilbertienne de fonctions propres, associée à une autre suite de valeurs propres (λ'_n), et on peut décrire $S_N(t)u_0$ de façon analogue à laide de la décomposition de u_0 sur cette nouvelle base hilbertienne. La première valeur propre étant $\lambda'_1 = 0$, associée à la fonction propre constante, on en déduit que

$$\left\| S_N(t)u_0 - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0\,dx \right\|_{L^2} \le \mathrm{e}^{-\lambda'_2 t}\|u_0\|_{L^2} \ .$$

3.4. Équation de Schrödinger

De la même manière, on démontre le résultat suivant.

Théorème 3.5. — *L'opérateur $-i\Delta_D$ engendre un groupe d'isométries de $L^2(\Omega)$.*

Démonstration. — L'identité déjà établie

$$\int_\Omega -\Delta u\overline{u}\,dx = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$$

assure que $Re(-i\Delta_D u|u) = 0$, tandis que la sujectivité, pour tout nombre réel $\lambda \neq 0$, de $-i\Delta_D + \lambda I$, est une conséquence du théorème 3.2. Le théorème est donc conséquence du corollaire 2.20. □

Si S est le groupe d'isométrie ainsi défini, on montre comme ci–dessus que, pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u(t) := S(t)u_0$ est caractérisé par l'équation de Schrödinger dans $\mathbb{R}\times\Omega$,

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0 \ ,$$

et par la propriété

$$\forall\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \ , \ u_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)u(t)\,dt \in H_0^1(\Omega) \ .$$

Dans ce cas, la propriété de régularisation vue pour la chaleur n'est plus vraie, de sorte que cette dernière propriété est le seul moyen de distinguer la condition aux limites permettant de caractériser la solution u. On peut également, dans le cas d'un ouvert borné, décrire la solution u à l'aide de la série

$$S(t)u_0 = \sum_n \mathrm{e}^{-i\lambda_n t}(u_0|e_n)e_n \ ,$$

ce qui permet de retrouver l'identité

$$\|S(t)u_0\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} \ .$$

On peut enfin remplacer le laplacien de Dirichlet par le laplacien de Neumann, et contruire un autre groupe d'isométries associé à l'équation de Schrödinegr, qui ne se distingue du précédent que par le fait que $\forall\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $u_\psi := \int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)u(t)\,dt \in H^1(\Omega)$ et vérifie (3.3).

3.5. Équations d'ondes

3.5.1. Introduction. — L'équation des ondes est l'autre équation d'évolution la plus couramment répandue en physique : l'élasticité, l'acoustique, l'électromagnétisme, la relativité, ... figurent parmi ses domaines d'applications. Il est singulier de constater en outre qu'elle est historiquement l'une des toutes premières équations aux dérivées partielles, et la première qui fut résolue explicitement. Dans son mémoire intitulé *Recherches sur la courbe que forme une courbe tendue mise en vibration* (1747), Jean D'Alembert (1717-1783) établit pour la première fois l'équation des cordes vibrantes,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ , \tag{3.4}$$

et en donne la solution générale explicitement. Rappelons brièvement comment il obtient cette équation. On considère que la corde au repos occupe l'intervalle $]0, L[$ pour un certain $L > 0$. Supposons que, au cours d'une **petite** vibration, sa forme devienne le graphe d'une fonction

$$x \mapsto y(t,x) \ ,$$

avec les conditions

$$y(t,0) = y(t,L) = 0 \ ,$$

qui expriment que la corde est fixée à ses extrémités. Appelons T la tension de la corde, et μ sa masse par unité de longueur, suposées uniformes. Considérons un élément de corde correspondant à une variation infinitésimale dx de l'abscisse. Alors la longueur de cet élément est

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx \simeq dx \ .$$

Appliquons la deuxième loi de Newton à cet élément de masse μds, et projetons–la sur l'axe vertical,

$$\mu ds\, \Gamma_y = F_y \ ,$$

où Γ_y est la composante verticale de l'accélération, donc

$$\Gamma_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \ ,$$

et F_y est la composante verticale de la résultante des forces appliquées à l'élément de corde. On néglige le poids par rapport à la tension. On obtient donc, si α désigne l'angle de la tangente au point (x, y),

$$F_y = T \sin(\alpha + d\alpha) - T \sin(\alpha) = T\, d(\sin \alpha) \ .$$

Or

$$\sin \alpha = \tan \alpha \, \cos \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \ .$$

On en déduit

$$d(\sin\alpha) = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2)^{3/2}}\, dx \simeq \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, dx\ .$$

On en déduit

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\ ,$$

ce qui est bien l'équation (3.4) ci–dessus, avec

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\ .$$

Dans le même article, D'Alembert montre que la solution générale de cette équation est de la forme

$$y(t,x) = F(ct+x) - F(ct-x)\ ,$$

où F est une fonction périodique de période $2L$, et en déduit que les données initiales $y_0(x) = y(0,x)$ et $v_0(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(0,x)$, représentant respectivement la forme initiale de la corde et la vitesse initiale en chaque point de la corde, déterminent la solution y pour tout temps.

L'équation des cordes vibrantes se généralise à plusieurs dimensions. Par exemple, en dimension 2, l'équation des membranes vibrantes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \Delta y = 0$$

décrit les petites vibrations d'une membrane, et est établie de façon analogue. En dimension 3, dans un fluide admettant une loi d'état $p = P(\rho)$ reliant pression et densité, et soumis à de petites variations autour d'un état d'équilibre et de densité uniforme ρ_0, la pression vérifie l'équation des ondes acoustiques,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0,\ \ c = \sqrt{P'(\rho_0)}\ .$$

L'équation des ondes découle également des équations de Maxwell de l'électromagnétisme, pour chacune des quatre composantes du potentiel électromagnétique en jauge de Lorentz, la constante c désignant alors la vitesse de la lumière. Elle est enfin la version linéarisée des équations d'Einstein, qui sont au centre de la relativité générale.

3.5.2. L'équation des ondes amorties. — Dans ce paragraphe, nous montrons comment la résolution de l'équation des ondes, avec amortissement éventuel et condition de Dirichlet, , se ramène à la construction d'un semi–groupe sur un espace de Hilbert approprié. Soit Ω un ouvert borné. On munit, comme précédemment, $H_0^1(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|^2_{H_0^1} = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

Par ailleurs, on désigne par a une fonction L^∞ sur Ω,

Théorème 3.6. — *Pour tout* $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$*, il existe une unique fonction*

$$u \in C^1(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}_t; H_0^1(\Omega))$$

solution du système

$$\begin{cases} \Big(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + a(x)\dfrac{\partial}{\partial t}\Big)u = 0\,, \quad \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}_t) \\ u_{|\partial\Omega\times\mathbb{R}_t} = 0 \\ u_{|t=0} = u_0, \quad \dfrac{\partial}{\partial t}u_{|t=0} = u_1. \end{cases} \tag{3.5}$$

De plus, en notant

$$E(u,t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\partial_t u(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2\, dx\ , \tag{3.6}$$

on a l'identité

$$E(u,t) = E(u,0) - \int_0^t \int_\Omega a(x)|\partial_t u|^2\, dxdt\ . \tag{3.7}$$

Démonstration. — Notons $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ -\Delta & a(x) \end{pmatrix}$ de domaine

$$D(A) = D(-\Delta_D) \times H_0^1(\Omega)\,.$$

On munit $\mathcal{H}$ de la norme

$$\Big\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Big\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

et du produit scalaire associé. On a alors

$$\begin{aligned} \left(A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} &= (-\nabla v|\nabla u)_{L^2} + (-\Delta u + a(x)v|v)_{L^2} \\ &= -(\nabla v|\nabla u)_{L^2} + (\nabla u|\nabla v)_{L^2} + (a(x)v|v)_{L^2} \\ \Rightarrow \mathrm{Re}\left(A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} &= (a(x)v|v) \geq -\|a\|_\infty \|v\|^2_{L^2}. \end{aligned}$$

Ainsi l'opérateur $A + \|a\|_\infty$ est accrétif. Soit $\lambda > 0$. Etudions la surjectivité de $(A + \lambda)$ de $D(A)$ sur $\mathcal{H}$. Soient $(f, g) \in \mathcal{H}$. Alors

$$A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -v + \lambda u = f \\ -\Delta u + (a(x) + \lambda)v = g \end{cases}$$

avec $(u, v) \in D(A)$. Ce problème équivaut à trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u + \lambda a u + \lambda^2 u = g + (a + \lambda)f = k \in L^2(\Omega).$$

On conclut par le théorème de Lax–Milgram, en remarquant que, pour $\lambda > \|a\|_\infty$, la forme sesquilinéaire

$$b(u,v) = \int_\Omega \nabla\overline{u}.\nabla v + (\lambda a + \lambda^2)\overline{u}v\,dx$$

est continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$. Il en résulte que $A + \|a\|_\infty$ est maximal accrétif. De plus, un raisonnement analogue montre de même que $-A + \|a\|_\infty$ est maximal accrétif. D'après le corollaire 2.19 et la remarque 2.14, l'opérateur A engendre un groupe d'opérateurs sur $\mathcal{H}$. $\square$

Nous allons montrer que l'unique solution du système (3.5) est la fonction u définie par

$$\begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-tA} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Soit $u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ vérifiant $u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1$. Un argument élémentaire de théorie des distributions assure que l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a(x)\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

équivaut à

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + a(x)\frac{\partial u}{\partial t}, \psi(t)\varphi(x) \right\rangle = 0 \tag{3.8}$$

pour tout $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ à support compact et tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. En notant

$$V = \int_0^{+\infty} \psi(t) \begin{pmatrix} u(t) \\ \partial_t u(t) \end{pmatrix} dt\,,$$

on constate que $V \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et que l'équation (3.8) équivaut à l'équation suivante au sens des distributions sur Ω,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\Delta & a \end{pmatrix} V = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(t) \begin{pmatrix} u(t) \\ \partial_t u(t) \end{pmatrix} dt$$

soit encore à

$$V \in D(A)$$

et

$$AV = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(t) \begin{pmatrix} u(t) \\ \partial_t u(t) \end{pmatrix} dt.$$

Le corollaire 2.13 et la remarque 2.14 complètent la démonstration.

Il reste à établir l'identité d'énergie (3.7). Supposons d'abord $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A)$. Alors $u \in C^2(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_t; H_0^1(\Omega) \cap C^0(\mathbb{R}_t; H^2(\Omega))$ donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(u,t) &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + |\partial_t u|^2 dx \\ &= \mathrm{Re}\int_\Omega \nabla u \cdot \partial_t \nabla \overline{u} + \partial_t u \cdot \partial_t^2 \overline{u} dx \\ &= \mathrm{Re}\int_\Omega \nabla u \cdot \partial_t \nabla \overline{u} + \partial_t u(-a(x)\partial_t \overline{u} + \Delta \overline{u}) dx \\ &= -\int_\Omega a(x)\Big|\frac{\partial}{\partial t}u\Big|^2 dx.\end{aligned}$$

L'identité (3.7) est donc vraie pour $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A)$; elle est donc vraie en général par passage à la limite et densité de $D(A)$. □

Remarque. Le théorème 3.6 est susceptible de nombreuses généralisations. D'une part, en utilisant la proposition 2.23, il est possible d'ajouter à l'équation (3.5) un second membre $f \in L^1(]0,T[, L^2(\Omega))$, l'identité d'énergie (3.7) devant être alors modifiée en

$$E(u,t) = E(u,0) - \int_0^t \int_\Omega a(x)|\partial_t u|^2 \, dxdt \; - \mathrm{Re}\int_0^t \int_\Omega f \partial_t \overline{u} dxdt \; . \tag{3.9}$$

Une autre généralisation concerne le cas d'une équation à coefficients variables, décrivant la propagation d'une onde dans un milieu inhomogène occupant l'ouvert Ω. Soient $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ et $k_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}, 1 \leq i,j \leq d$, des fonctions mesurables vérifiant, pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$a \leq \rho(x) \leq b, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha|\xi|^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq d} k_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \beta|\xi|^2 \quad , \tag{3.10}$$

où a, b, α, β sont des constantes strictement positives. On désigne par $K(x)$ la matrice symétrique définie positive de coefficients $k_{ij}(x)$. En raisonnant comme au paragraphe 3.1, on montre que l'opérateur

$$u \mapsto \mathrm{div}(K\nabla u)$$

est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$, et possède sur $L^2(\Omega)$ une décomposition spectrale analogue à celle du laplacien de Dirichlet. Enfin, on considère, sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ muni de la norme

$$\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \|_{\mathcal{H}}^2 = \int_\Omega K\nabla u.\nabla \overline{u} + |v|^2 \rho(x)\, dx,$$

l'opérateur

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}(K\nabla u) & \frac{a}{\rho} \end{pmatrix}$$

de domaine
$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega), \operatorname{div}(K\nabla u) \in L^2(\Omega)\} \times H_0^1(\Omega).$$
On étend alors sans difficulté le théorème 3.6 à l'équation
$$\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial t^2} - \operatorname{div}(K\nabla u) + a(x)\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{3.11}$$
Nous laissons au lecteur le soin de vérifier, à titre d'exercice, les détails de la démonstration, et achevons ce chapitre en énonçant une dernière généralisation du théorème 3.6, pour des données moins régulières.

Théorème 3.7. — *Avec les notations ci–dessus, pour tout $(u_0, v_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe une unique fonction u vérifiant*
$$u \in C^0(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)), \quad \rho u \in C^1(\mathbb{R}_t; H^{-1}(\Omega))$$
solution du système
$$\Big(\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial t^2} - \operatorname{div}(K\nabla u)\Big) = 0 \ \textit{ dans } \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}_t)$$
$$u_{|t=0} = u_0, \quad \partial_t(\rho u)_{|t=0} = v_1$$
et $u_{|\partial\Omega\times\mathbb{R}_t} = 0$ au sens suivant
$$\forall \psi \in C_c^1(\mathbb{R}_t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)u(t)dt \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration. — La faible régularité de la fonction ρ nous oblige à définir un groupe d'opérateurs légèrement différent du précédent. On désigne par $T_K : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ l'opérateur inverse de $-\operatorname{div}(K\nabla) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. On munit l'espace $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ de la norme
$$\Big\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Big\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle \overline{v}, T_K v\rangle_{H_0^1}^{H^{-1}} + \int_\Omega |u|^2\, \rho(x)\, dx.$$
Soit B l'opérateur sur $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ de domaine $D(B) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ défini par $B = \begin{pmatrix} 0 & -1/\rho \\ -\operatorname{div}(K\nabla) & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie alors, comme à la preuve du théorème 3.6, que $\pm B$ est maximal accrétif sur $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, et que le système étudié est équivalent à
$$\begin{pmatrix} u \\ \partial_t(\rho u) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-tB} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$
□