Chapitre V
La méthode du pivot de Gauss et ses applications

I – Présentation

1. Systèmes linéaires

Problème : Résoudre les systèmes linéaires à n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ et p équations.

$$(S) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \quad\quad\quad\quad \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = y_p \end{cases}$$

où les a_{ij} sont les coefficients du système et $y_1, \dots, y_p$ les second membres connus des équations.

2. Combinaisons linéaires et systèmes

On a $(S) \Leftrightarrow x_1V_1 + x_2V_2 + \cdots + x_nV_n = Y$ avec :

$$Y = (y_1, \dots y_p),\ \ V_1 = (a_{11}, \dots a_{p1}),\ \ V_2 = (a_{12}, \dots, a_{p2}), \dots,\ \ V_n = (a_{1n}, \dots a_{pn})$$

Principe : les vecteurs $Y, V_1, V_2, \dots, V_n \in \mathbb{R}^p$ sont présents en *colonnes* dans le système (S). Notez que le premier indice de a_{ij} est celui de la ligne, et le second celui de l'inconnue (ou colonne).

3. Systèmes triangulaires

Un système triangulaire est de le forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \quad\quad\quad\quad \dots \\ 0 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots a_{pn}x_n = y_p \end{cases} \Rightarrow a_{ij} = 0 \ si\ i > j$$

Exemple : $(S) = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ \quad ax_2 + x_3 = y_2 \\ \quad\quad\quad x_3 = y_3 \end{cases}$

- (S) a une solution unique si $a \neq 0$.

- Si $a = 0$, le système a des solution si et seulement si $y_2 - y_3 = 0$
$\rightarrow$ condition de compatibilité portant sur les données.

Si $y_2 = y_3$ et $a = 0$, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = y_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = y_3 = y_2 \\ x_1 = \underbrace{y_1 - y_2}_{\text{Données}} - \boxed{x_2} \end{cases} \quad \text{Paramètre réel quelconque}$$

(S) contient une infinité de solutions paramétrées par x_2.

Définition : Un système triangulaire est dit *de Cramer* si les coefficients $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sont *tous non nuls*.

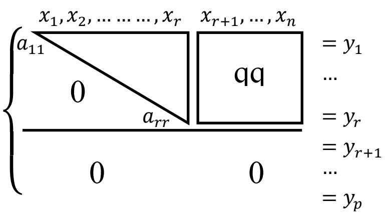
Propriété : Un système de Cramer possède une *unique solution* que l'on détermine en partant de la dernière équation.

$$x_n = \frac{y_n}{a_{nn}} \quad \Rightarrow \quad x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - y_n}{a_{n-1n-1}} \quad \dots$$

II – Technique du pivot de Gauss-Jordan

1. Systèmes échelonnés

Systèmes de la forme



Propriétés clés :

1) Le système échelonné (S) possède des solutions si et seulement si les *équations de compatibilité* $0 = y_{r+1} = y_{r+2} = \cdots = y_p$ sont satisfaites (portant sur les données).

2) Si ces conditions sont satisfaites alors toute donnée des *inconnues non principales* $x_{r+1}, \dots, x_n$ détermine une *unique* solution de (S).

$\Leftrightarrow$ les solutions de (S) sont paramétrées par les inconnues non principales.

Les inconnues $x_1, \dots, x_r$ s'appellent les *inconnues principales*, ou *pivots*.

Preuve : On fait passer les inconnues non principales dans le second membre et on résout le système triangulaire de Cramer en $x_1, \dots, x_r$.

2. La méthode du pivot

Théorème de Gauss-Jordan

Tout système linéaire se ramène à un système échelonné équivalent en utilisant trois types d'opérations élémentaires :

- Intervertir deux équations : $L_i \leftrightarrow L_j$,
- Intervertir l'ordre des inconnues,
- Remplacer une équation L_i par $L_i + \lambda L_j$.

La technique du pivot :

On décrit l'algorithme qui permet d'échelonner un système linéaire quelconque.

$$(S) = \begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 & L_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 & L_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = y_p & L_p \end{cases}$$

- Si $a_{11} \neq 0$, on garde L_1 et on utilise x_1 en *pivot*.

On remplace L_2 par $L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 = L'_2$ … jusqu'à $L_p - \frac{a_{p1}}{a_{11}} L_1 = L'_p$.

Et on continue avec le sous système $L'_2, \dots, L'_p$ avec les inconnues $x_2, \dots, x_n$.

- Si $a_{11} = 0$, on intervertit 2 lignes ou 2 inconnues pour ramener un coefficient différent de 0 en haut à gauche. Cela s'arrête quand le 1[er] membre du système restant à traiter est nul.

Les systèmes restent *équivalents* : ils ont même espace des solutions, car chaque opération élémentaire s'inverse.

Attention : il est essentiel de pouvoir faire ses opérations de manière *séquentielle*, et non simultanément, pour conserver l'espace de solution et avoir ainsi des systèmes équivalents. Par exemple un système à trois équations :

$$(S) : L_1, L_2, L_3 \text{ implique } (S') : \ L_1' = L_1 - L_2, \ L'_2 = L_2 - L_3, \ L_3' = L_3 - L_1,$$

mais (S') n'implique pas (S) en général : on ne peut pas revenir aux équations de départ en partant des L_i'. Ces nouvelles équations sont liées car $L_1' + L_2' + L_3' = 0$!

III – Applications

1. Trouver le rang d'un système de n vecteurs de $\mathbb{R}^p$ et extraire une base de $E = Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$

Théorème. Soient $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n} \in \mathbb{R}^p$.
i) Le rang de $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ est le nombre r *d'inconnues principales* dans un système échelonné équivalent au système

$$(S) : \ x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \ x_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}.$$

En d'autres termes, il est égal au nombre de pivots, i.e. au nombre de coefficients encadrés au cours de l'échelonnage.

ii) Une base de $E \ = Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ est donnée par les vecteurs $\overrightarrow{v_i}$ correspondants aux inconnues principales de (S).

Démonstration : Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ une famille. On lui associe le système
(S): $\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{v_i} = \vec{0}$.

On suppose que les inconnues principales sont $x_1, \dots, x_r$.

<u>Problème</u> : Montrer que $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_r})$ est une base de $Vect(\mathcal{F})$.

On sait que quel que soit $x_{r+1}, \dots, x_n$ donnés, le système (S) possède une unique solution.

Il existe donc une unique solution avec $x_{r+1} = 1$ et $x_{r+2} = \cdots = x_n = 0$.

$\Rightarrow$ Il existe des réels $x_1, \dots, x_r$ tels que $x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_r\overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_{r+1}} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_{r+1}} \in Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_r})$.

Idem pour $\overrightarrow{v_{r+2}}, \dots, \overrightarrow{v_n}$.

On a montré que $Vect(\mathcal{F}) = Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_r})$.

<u>Problème</u> : la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_r})$ est-elle libre ?

On suppose que $x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_r\overrightarrow{v_r} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_r\overrightarrow{v_r} + 0 \times \overrightarrow{v_{r+1}} + \cdots + 0 \times \overrightarrow{v_n} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ Solution de (S) avec $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$

$\Rightarrow x_1 = \cdots = x_r = x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$, car c'est l'unique solution possible correspondant aux inconnues non principales nulles.

$\Rightarrow rang(\mathcal{F}) = r$ et $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_r})$ est une base de $Vect(\mathcal{F})$.

<u>**Exemple :**</u> $\overrightarrow{v_1} = (0,1,a)$; $\overrightarrow{v_2} = (a,-1,0)$; $\overrightarrow{v_3} = (2a,a,a)$ avec $a \in \mathbb{R}$ paramètre.

On considère $x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + x_3\overrightarrow{v_3} = \vec{0}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax_2 + 2ax_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 + 0 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1} - x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_2 + 2ax_3 = 0 \\ ax_1 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1} - x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_2 + 2ax_3 = 0 \\ ax_2 + (a - a^2)x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1} - x_2 + ax_3 = 0 \\ \boxed{ax_2} + 2ax_3 = 0 \\ -(a^2 + a)x_3 = 0 \end{cases}$$

- Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$ alors le système a 3 inconnues principales x_1, x_2, x_3.

$\Rightarrow rg(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = 3$ et $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de $Vect(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$.

- Si $a = 0$, $(S) \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0$ donc le système a une seule inconnue principale : x_1 (par exemple).

$\Rightarrow rg(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = 1$ et $(\overrightarrow{v_1})$ est ne base de la droite $Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$.

- Si $a = 1$, deux inconnues principales : x_1, x_2.

$\Rightarrow rg(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = 2$ et $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une base du plan $Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$.

2. Trouver un système d'équations cartésiennes d'un sous-espace de $\mathbb{R}^p$ engendré par n vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$.

Soient $E = Vect(V_1, \dots, V_n)$ un sev de $\mathbb{R}^p$ et $Y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$

On cherche à quelles conditions on a $Y \in E$.

$Y \in E \Leftrightarrow$ Le système $x_1V_1 + \cdots + x_nV_n = Y$ possède au moins une solution.

$\Leftrightarrow$ Les équations de compatibilité du système échelonné sont satisfaites (i.e. $0 = y_{n+1} \dots \dots \dots \dots 0 = y_p$).

Théorème.
Soit $E = Vect(V_1, \dots, V_n)$ un sev de $\mathbb{R}^p$.
Un système d'équations cartésiennes de E est donnée par les conditions de compatibilité d'un système échelonnée équivalent au système $x_1V_1 + \cdots + x_nV_n = Y$.

Exemple : $V_1 = (1,1,1,1)$; $V_2 = (1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$.

Trouver les équations de $P = Vect(V_1, V_2)$.

$Y = (y_1 y_2, y_3, y_4) \in P \Leftrightarrow \exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \mid x_1V_1 + x_2V_2 = Y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 = y_2 \\ x_1 + 3x_2 = y_3 \\ x_1 + 4x_2 = y_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_1 \\ 3x_2 = y_3 - y_1 \\ 4x_2 = y_4 - y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 = y_1 \\ \boxed{x_2} = y_2 - y_1 \\ 0 = y_3 - y_1 - 2(y_2 - y_1) \\ 0 = y_4 - y_1 - 3(y_2 - y_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 = y_1 \\ \boxed{x_2} = y_2 - y_1 \\ 0 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ 0 = 2y_1 - 3y_2 + y_4 \end{cases}$$

$\Rightarrow P = \{\, Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \mid y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$ et $2y_1 - 3y_2 + y_4 = 0\}$.

3. Trouver une base d'un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par p équations

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par p équations homogènes. C'est-à-dire que $E = Sol(S)$ est l'espace des solutions d'un système (S) homogène à n inconnues et p équations.

On échelonne (S) : on suppose que $x_1, \dots, x_r$ sont les inconnues principales et $x_{r+1}, \dots, x_n$ sont les inconnues non principales.

Théorème.
Soit $E = \mathrm{Sol}(S)$ un sev de $\mathbb{R}^n$ défini par un système d'équations. Alors on a :
i) $\dim E =$ *nbr d'inconnues non principales* $= n -$ nbr d'inconnues principales de (S).
ii) Une base de E est donnée par $V_{r+1}, \dots, V_n$ avec :

V_{r+1} unique solution de (S) telle que $x_{r+1} = 1,\ \ x_{r+2} = \cdots = x_n = 0,$
V_{r+2} unique solution de (S) telle que $x_{r+1} = 0,\ \ x_{r+2} = 1,\ \ x_{r+3} = \cdots = x_n = 0,$
…
V_n unique …. telle que $x_{r+1} = \cdots = x_{n-1} = 0,\ \ x_n = 1.$

Attention de ne pas confondre les deux techniques de calcul de dimension d'un espace vectoriel.
- La dimension d'un espace défini comme **solution d'un système** est le nombre **d'inconnues non principales** de ce système,
- tandis que la dimension d'un espace **engendré** par n vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_n$ est le nombre **d'inconnues principales** du système $\sum_{i=1}^{n} x_i V_i = 0$.

Démonstration :
Tout élément V de E est déterminé linéairement par la donnée de ses coordonnées « non principales » $(x_{r+1}, \dots, x_n)$. Par unicité, on doit avoir $V = x_{r+1}V_{r+1} + \cdots + x_n V_n$. En effet ce vecteur est solution de (S) et ses dernières coordonnées sont celles de V par construction des V_i.

$\Rightarrow E = Vect(V_{r+1}, \dots, V_n)$ avec :

$V_{r+1} = (\overbrace{?\,, ?\,, \dots, ?}^{r}\,, \overset{r+1}{1}, 0, 0, \dots, 0)$: unique solution telle que $(x_{r+1,}x_{r+2}, \dots, x_n) = (1,0, \dots,0)$,
$V_{r+2} = (?\,, ?\,, \dots, ?\,, 0, 1, 0, \dots, 0)$: unique solution telle que $(x_{r+1,}x_{r+2}, \dots, x_n) = (0,1, \dots,0)$,
…
$V_n \quad = (?\,, ?\,, \dots, ?\,, 0, 0\,, 0, \dots, 1)$: unique solution telle que $(x_{r+1,}x_{r+2}, \dots, x_n) = (0,0, \dots,1)$

$\Rightarrow$ Système libre à cause des dernières coordonnées de ces vecteurs
$\Rightarrow \dim E = n - r$ et $B = (V_{r+1}, \dots, V_n)$ est une base de E.

Exemple : Soit $E = \{V = (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x + y + z - t + u = 0 \\ 2x + y + z + t + u = 0 \end{cases}\}$

On a $V \in E \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + z - t + u = 0 \\ -\boxed{y} - z + 3t - u = 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow x$ et y sont inconnues principales et z, t, u non principales.

$\Rightarrow \dim E = 3$. Pour trouver une base, il faut résoudre le système.

On résout : $\begin{cases} x+y=z+t-u \\ -y=z-3t+u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z+t-u+z-3t+u \\ \quad y=-z+3t-u \end{cases}$

$V \in E \Leftrightarrow V=(-2t,-z+3t-u,z,t,u)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ V &= z(0,-1,1,0,0) \\ &\quad +t(-2,3,0,1,0) \\ &\quad +u(0,-1,0,0,1) = z\,V_1+t\,V_2+u\,V_3. \end{aligned}$$

Une base de E est donc $B=(V_1,V_2,V_3)$.

Une application utile du résultat général précédent est le

Corollaire : Un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ défini par p équations est de dimension $\geq n-p$.

Démonstration : En effet il y a au plus p inconnues principales (au plus une par ligne).

→ Au moins $n-p$ inconnues non principales.

4. Trouver un supplémentaire d'un sev de $\mathbb{R}^n$ défini par un système d'équations

Soit $E=\mathrm{Sol}(S)$ un sev de $\mathbb{R}^n$ défini à l'aide d'un système d'équations homogènes (S). On note $B=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Théorème. Un supplémentaire de $E=\mathrm{Sol}(S)$ dans $\mathbb{R}^n$ est donné par le sev

$$F=Vect\left(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_k}\ \middle|\ \text{avec } x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_k} \text{ inconnues principales de } (S)\right).$$

Par exemple, avec le sev E de $\mathbb{R}^5$ du paragraphe précédent, on a $F=Vect(e_1,e_2)$ supplémentaire de E, car x et y sont inconnues principales du système définissant E.

Démonstration :
On a : $\mathbb{R}^n=E\oplus F \ \Leftrightarrow \dim E+\dim F=n$ et $E\cap F=\{0\}$.

- La condition sur la dimension est satisfaite car
$\dim E=$ nbr inconnues non principales et $\dim F=$ nbr inconnues principales.

- Si $V\in E\cap F$, alors V est une solution de (S) dont les coordonnées « non principales » sont nulles (système d'équations de F). Par unicité, on doit avoir $V=0$, et donc $E\cap F=\{0\}$.

En conclusion, ces applications montrent que la technique du pivot de Gauss est un véritable « couteau suisse » pour résoudre les problèmes d'algèbre linéaire que nous avons rencontrés jusqu'ici !