S2 PeiP — Orsay 2014-2015

Mathématiques

Corrigé du contrôle n°4 du 15 mai 2015

Exercice 1 - 1. La famille B' est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ le système (S) : $x'\overrightarrow{v_1}+y'\overrightarrow{v_2}+z'\overrightarrow{v_3}=(x,y,z)$ possède une unique solution. On a $(S)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x' \quad + z' = x \\ 2x'+y'+z'=y \\ 3x'+2y'+2z'=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x'} \quad + z' = x \\ y'-z'=-2x+y \\ 2y'-z'=-3x+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x'} \quad + z' = x \\ \boxed{y'} - z' = -2x+y \\ \boxed{z'} = x-2y+z \end{cases},$$

et B' est bien une base.

2. La matrice de passage P de la base canonique B de $\mathbb{R}^3$ à B' est $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\3&2&2\end{pmatrix}$. Elle est inversible d'après le cours (d'inverse la matrice de passage de B' à B). Cette matrice est celle associée au système de Cramer (S) : $PX'=X$ de la question 1.

3. Les coordonnées (x',y',z') de $\overrightarrow{v}=(x,y,z)$ dans la base B' est la solution du système (S) de la question 1, c'est-à-dire

$$x'=x-z'=2y-z\ ,\ y'=-2x+y+z'=-x-y+z\ ,\ z'=x-2y+z.$$

Exercice 2 - 1. On a $\overrightarrow{v}=(x,y,z)\in E\Leftrightarrow x=y+z\Leftrightarrow\overrightarrow{v}=y(1,1,0)+z(1,0,1)$. E est donc un plan de base $\overrightarrow{v_2}=(1,1,0)$ et $\overrightarrow{v_3}=(1,0,1)$.

2. On a $\ell(\overrightarrow{v_1})=-1\neq 0$ et donc $\overrightarrow{v_1}\notin E$. Par conséquent $E\cap D=\{\overrightarrow{0}\}$. Comme de plus $\dim E+\dim D=3$, on a bien $\mathbb{R}^3=E\oplus D$.

3. On a par linéarité de ℓ, $\ell(\overrightarrow{u})=\ell(\overrightarrow{v})+\ell(\overrightarrow{v})\ell(\overrightarrow{v_1})=\ell(\overrightarrow{v})-\ell(\overrightarrow{v})=0$, et donc $\overrightarrow{u}\in E$.

4. Avec les notations précédentes, on a $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}-\ell(\overrightarrow{v})\overrightarrow{v_1}$, avec $\overrightarrow{u}\in E$ et $-\ell(\overrightarrow{v})\overrightarrow{v_1}\in D$. La projection sur E le long de D est donc l'application p : $\overrightarrow{v}\mapsto\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\ell(\overrightarrow{v})\overrightarrow{v_1}$.

Sa matrice P s'obtient en prenant l'image de la base canonique, c'est-à-dire $P=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$.

La matrice P n'est pas inversible puisque $\ker P=D\neq\{\overrightarrow{0}\}$ par définition.

5. D'après la question 4, la projection sur D le long de E est l'application q : $\overrightarrow{v}\mapsto -\ell(\overrightarrow{v})\overrightarrow{v_1}$. On a donc dans la base canonique $Q=\mathrm{Mat}(q)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$. On peut vérifier que $P+Q=I_3$, par définition même de ces deux projections.

Exercice 3 - 1. On a $f(x,y)=(x,y)\Leftrightarrow -x-2y=x$ et $3x+4y=y\Leftrightarrow x+y=0$, et $\overrightarrow{v_1}=(1,-1)$ convient.

On a $f(x,y)=2(x,y)\Leftrightarrow -x-2y=2x$ et $3x+4y=2y\Leftrightarrow 3x+2y=0$, et $\overrightarrow{v_2}=(-2,3)$ convient.

2. Les deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ forment une base B' de $\mathbb{R}^2$ car il ne sont pas colinéaires. Par construction de B', la matrice de f dans la base B' est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. On a par une récurrence immédiate $(A')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

4. D'après la formule de changement de base du cours, on a $A' = P^{-1}AP$. D'où

$$\begin{aligned}(A')^n &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) \quad n \text{ fois},\\ &= P^{-1}A^nP \quad \text{car} \quad PP^{-1} = I_2 \text{ matrice identité.}\end{aligned}$$

C'est en fait la formule de changement de base pour l'endomorphisme $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$.

5. On a donc $A^n = P(A')^nP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ -3 + 3 \times 2^n & -2 + 3 \times 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 - 1. On a par hypothèse

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rA_n \\ 1/2J_n + sA_n \end{pmatrix} = MX_n \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 1/2 & s \end{pmatrix}.$$

2. $X = X_n = (J, A)$ est une population stationnaire ssi $X = MX \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} J = rA \\ A = J/2 + sA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = rA \\ A = rA/2 + sA \Leftrightarrow (1 - r/2 - s)A = 0 \end{cases}$$

Si on veut $A > 0$, on doit donc avoir $1 - r/2 - s = 0$, auquel cas $X = (rA, A)$ est une population stationnaire.

3. Une exploitation de taille X produit N adultes par an si $MX - X = (M - I_2)X = \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ avec $M - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & r \\ 1/2 & s-1 \end{pmatrix}$. La matrice $M - I_2$ est inversible si $\det(M - I_2) = 1 - s - r/2 \neq 0$. Si de plus $s + r/2 > 1$, alors $(M - I_2)^{-1} = \frac{1}{1-s-r/2}\begin{pmatrix} s-1 & -r \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix}$ a des coefficients **positifs**. La population (positive) cherchée est alors

$$X = (M - I_2)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{rN}{s+r/2-1} \\ \frac{N}{s+r/2-1} \end{pmatrix}.$$