Classification des algèbres de Lie,
Systèmes de Pfaff,
et méthode d'équivalence d'Élie Cartan :
ouvertures conceptuelles et obstacles techniques

Joël MERKER

« **Les** » Mathématiques : (participations humaines variées)

• Écoles, universités, exercices guidés, examens, *etc.*
Circulation, répétition, gymnastique, évaluation.

• Ministères, Universités, Irems, Iufms, *etc.*

• Téléphonie, cryptographie, *etc.*

• Histoire ancienne, moderne, institutionnelle, *etc.*

• Épistémologie, philosophie.

• Recherche, spécialisation, compétition.
combats, gesticulations, erreurs, découvertes, publications

Questions : *Qu'est-ce que « participer » aux mathématiques ? A-t-on le devoir de (re)penser conceptuellement, dialectiquement, philosophiquement et historiquement ce qu'elles déploient ?*

La philosophie des mathématiques est-elle possible ?

Deux allégories élémentaires :

• Gymnastique impensable ; technification du concept ; méditation absorbée, assimilée, involuée ; automatismes spéculatifs.

• Cerveau et combat ; contingences du terrain ; jungle ; éloignement des astres mathématiques ; inexistence d'un seul grand cerveau unificateur et réorganisateur.

Positions, principes, objectifs

● **Actes d'orientation**. Goûts mathématiques, types de questions
impasses, échecs, rebondissements
nouveaux intérêts mathématiques

● **Écriture**. Écrire pour (re)comprendre
Apparition et cristallisation de difficultés
Permanence du provisoire
Réécriture nécessitée par l'amélioration permanente

● **Exigence de construction et de (re)structuration**.
synthèses, « surveys », monographies
unité (perdue ?) des mathématique

● **Souplesse spéculative et variation thématique**.

Changer volontairement de sujet : adapter son travail d'enseignement à une conquête (sur un très long terme) de presque toutes les mathématiques contemporaines. Exemples de mémoires de maîtrise : *Théorie des feuilletages*, Classification de Darboux-Cartan des formes différentielles, *Homologie singulière*, Applications de la topologie algébrique à la physique mathématique, *Unicité du tenseur d'Einstein, d'après Élie Cartan*, Convergence des séries de Fourier, d'après Carleson-Hunt, *Théorème de la couronne*, Estimées L^2 de Hörmander, *Classification des tissus d'après leur groupe de Lie*, Théorème de Kolmogorov, *Théorie de Galois, etc.*

● **Recherche**. jeu supérieur, réservoir de nouveauté indéfini
libération et développement grâce à la spécialisation

Nul n'entre ici s'il n'est géomètre —
— s'il ne participe pas un peu à la recherche

Typologie (incomplète) de questions ouvertes

• **Généralisation.** (simple ou subtile, prévue ou imprévue)
passage à plusieurs variables, combinatoire, *etc*.

• **Synthèses entre sujets.** Singularités et géométrie CR
Algèbres de Lie et équations aux dérivées partielles
Hypoanalyticité et théorie de Cartan-Kähler

• **Applications d'outils puissants.**
petits diviseurs (Brjuno) et théorème de Poincaré-Dulac.

• **Conditions nécessaires et suffisantes.** $\boxed{*T*}$
Phénomène de Hartogs et problème de Levi.
Résolution par radicaux des équations algébriques.
Convergence ponctuelle presque partout des séries de Fourier

• **Affaiblissement d'hypothèses.** $\boxed{*T*}$
Définitions de la pseudoconvexité.

• **Ouverture nouvelle et inattendue.** $\boxed{*T*}$
Topologie symplectique (Arnol'd, Gromov).

Conclusion. *Existence, permanence, prégnance, et insistance d'« opérateurs* élémentaires et reproductibles *de questionnement ».*

Ce qu'on dit de cet état de fait n'apporte (presque) rien quant à l'effectivité.
Les questions simples et les désirs simples ne sont que des graines de possibles.
Les difficultés conceptuelles et techniques sont innombrables.

Ouverture d'un sujet : philosophie des mathématiques contemporaines comme dissertation générale.

II. Groupes continus de transformation

- **Continuation de Gauss, Riemann, Christoffel.**
- **Version continue de la théorie de Galois.**
- **Résolution des équations différentielles.**
- **Groupes continus de transformation.**
- **Algèbres de Lie.**
- **Potentialité géométrique et universalité.**
- **Algèbre différentielle.**
- **Systèmes différentiels extérieurs.**
- **Classification des actions locales sur $\mathbb{C}^2$.**
- **Actions primitives et actions imprimitives.**
- **Paradoxe remarquable.**

$$\boxed{\textbf{Cartan} \equiv \textbf{Gauss-Riemann} \oplus \textbf{Lie}}$$

III. Algèbres de Lie

Définition. $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une *algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'un crochet bilinéaire $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longmapsto [X, Y] \in \mathfrak{g}$ qui satisfait :

$0 = [X, Y] + [Y, X]$ (antisymétrie)

$0 = \big[X, [Y, Z]\big] + \big[Z, [X, Y]\big] + \big[Y, [Z, X]\big]$ (Jacobi)

on supposera : <u>dimension finie</u> : $r := \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g} < \infty$

Constantes de structure : dans toute base $(X_1, X_2, \dots, X_r)$ de $\mathfrak{g}$, il existe $C_{ij}^k \in \mathbb{K}$

$$\big[X_i, X_j\big] = \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} C_{ij}^k \, X_k.$$

L'antisymétrie se lit $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$, et l'identité de Jacobi $0 = \sum_{1 \leqslant l \leqslant r} \big(C_{il}^m \, C_{jk}^l + C_{kl}^m \, C_{ij}^l + C_{jl}^m \, C_{ki}^l\big)$.

Définition. Deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ sont *isomorphes* s'il existe une application linéaire inversible $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ qui respecte les crochets :

$$\phi\big([X, Y]_{\mathfrak{g}}\big) = \big[\phi(X), \phi(Y)\big]_{\mathfrak{g}'}.$$

isomorphe $\equiv$ « le même ».

Question. Comment reconnaître le « même et l'autre », puisque ce qui se présente comme un donné n'est jamais saisi immédiatement, ni comme « le même », ni comme « un autre » ?

Exemple. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ de dimension 5, de bases $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ et $\{X_1', X_2', X_3', X_4', X_5'\}$ ayant pour structure :

$$[X_2, X_3] = X_1,\ [X_1, X_5] = c\,X_1,\ [X_2, X_5] = (c-1)\,X_2,$$
$$[X_3, X_5] = X_3 + X_4, \quad [X_4, X_5] = X_4$$

et

$$[X_1', X_2'] = -X_2'/2,\ [X_1', X_3'] = X_3'/2,\ [X_3', X_4'] = X_2'.$$
$$[X_1', X_4'] = -X_4' - X_5',\ [X_1', X_5'] = -X_5'.$$

les crochets non écrits étant nuls. Existe-t-il des valeurs de c pour lesquels $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'$?

• Comparaison des centres et des nilradicaux ; $c \neq 0$.

• Recherche d'un isomorphisme sous la forme :

$$\phi(X_1) = a_{12}\,X_2',$$
$$\phi(X_2) = a_{22}\,X_2' + a_{23}\,X_3' + a_{24}\,X_4' + a_{25}\,X_5',$$
$$\phi(X_3) = a_{32}\,X_2' + a_{33}\,X_3' + a_{34}\,X_4' + a_{35}\,X_5',$$
$$\phi(X_4) = a_{42}\,X_2' + a_{45}\,X_5',$$
$$\phi(X_5) = a_{51}\,X_1'.$$

Idéal $I \subset \mathbb{K}[a_{ij},\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ c]$ engendré par :

$$ca_{52}a_{12} - a_{12}/2, \quad ca_{42}a_{51} - a_{42}, \quad etc.$$

• 17 variables, 16 équations ; base de Gröbner ; solution si et seulement si $c = 1/2$.

• Sans normalisation : 27 variables, 46 équations.

Thèse. Poser des axiomes ou des définitions comme fondements d'objets mathématiques implique des recherches spécifiques, centrales sur le plan historique et séduisantes sur le plan philosophique.

Cependant, au-delà des concepts de base, démonstrations, techniques, organisations, structurations et architectures rationnelles dominent les contenus. Les ouvertures sont intrinsèques au formalisme, mais il ne les capture (presque) jamais en totalité.

Problème. Classifier les algèbres de Lie à isomorphisme près.

• Indéfini.

• Ouvert.

• Babélisé. (on y reviendra)

Démultiplication des tâches et des possibles :

• travailler sur un corps quelconque ; (pas nous !)

• traiter les dimension $1, 2, 3, 4, \dots$;

• classifier les isomorphismes et les dérivations ;

• (re)construire des démonstrations architecturées ;

• contempler le caractère exponentiel de la progression en fonction de la dimension.

Thèse. Dans tout problème d'équivalence concernant un type bien défini d'objets algébrico-géométriques $\mathbb{X}$, $\mathbb{X}'$, $\mathbb{X}''$, $\mathbb{X}'''$, $\ldots$ (pouvant être très divers), on doit, *dans l'absolu* :

(i) élaborer des algorithmes qui testent l'équivalence entre deux tels objets $\mathbb{X}$ et $\mathbb{X}'$ donnés explicitement ;

(ii) adapter les algorithmes au type de donation ;

(iii) classifier, *i.e.* établir une liste de toutes les formes possibles de $\mathbb{X}$;

(iv) comparer, améliorer et raffiner les listes obtenues par divers auteurs ;

(v) posséder des algorithmes efficients pour déterminer à coup sûr la place d'un $\mathbb{X}$ donné dans sa liste.

Incomplétude

Petitesse

Insatisfaction

Remarque. Chacun de ces objectifs correspond à une problématique que l'on peut exprimer en des termes "philosophiques" et "conceptuels".

Question. S'agirait-il d'une paraphrase ?

Observations

Thèse. *L’écriture du matériau mathématique (dans les monographies et dans les articles de synthèse) doit respecter des tensions dialectiques universelles qui sont antérieures à toute réalisation technique.*

Exemple : Sophus Lie affirmant l’importance d’une classification complète des actions locales de groupes continus de transformation.

$\Rightarrow$ réalisation ultérieure dans toutes les géométries possibles.

Constatation : Or, (presque) aucune monographie contemporaine de géométrie différentielle ou de théorie des représentations n’architecture son discours rationnellement et systématiquement. Les classifications, lorsqu’elles apparaissent, ne sont (presque) jamais présentées dans leur dialectique intrinsèque. L’ouverture ment par omission. Les orientations les plus simples sont occultées. L’effort formel épuise. $\Rightarrow$ le penseur doit (presque) tout reconstituer.

$\Rightarrow$ chacun est invité à (re)construire sa (une) maison

- **Pensée « apparaissante » et « disparaissante ».**
- **Formulation implicite des questions ouvertes.**
- **Exigence de systématicité perdue.**

Classification des algèbres de Lie

• **Trois types de donation de $\mathfrak{g}$:**

• **(gl) :** comme algèbre de matrices ;

• **(cs) :** via des **c**onstantes de **s**tructure :

• **(fl) :** comme quotient d'une algèbre de Lie libre.

Problème. Circuler entre ces types de donation ; adapter les algorithmes ; comparer l'effectivité.

Théorème. (Ado) *Toute algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$ se plonge comme sous-algèbre de Lie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Paradoxe : concrétude remarquable, mais représentation non canonique, non unique et non implémentable sur ordinateur.

Définition. $\mathfrak{h}$ est un *idéal* de $\mathfrak{g}$ si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal différent de $\{0\}$ et de $\mathfrak{g}$, elle est dite *semi-simple*.

Posons $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$ puis $\mathfrak{g}^{i+1} := \left[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^i\right]$ ainsi que $\mathfrak{g}_{i+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i]$.

Définition . Si $\mathfrak{g}^r = \{0\}$ pour r assez grand, $\mathfrak{g}$ est dite *résoluble*. Si $\mathfrak{g}_r = 0$ pour r assez grand, $\mathfrak{g}$ est dite *nilpotente*.

Théorème. (LEVI-MALČEV) *Toute algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{C}$ est somme semi-directe d'une algèbre de Lie résoluble et d'une algèbre de Lie semi-simple.*

Théorème. (CARTAN-KILLING) *Les algèbres de Lie semi-simples sur* $\mathbb{C}$ (*et sur* $\mathbb{R}$)*sont toutes connues.*

Principes pour une classification exhaustive.
- Classifier toutes les semi-simples (*done*).
- Classifier toutes les résolubes (apparently doable).
- Classifier toutes les sommes semi-directes.

Lemme. $\mathfrak{g}$ *est résoluble* ssi *il existe une suite*

$$\{0\} = \widehat{\mathfrak{g}}^r \subset \widehat{\mathfrak{g}}^{r-1} \subset \cdots \subset \widehat{\mathfrak{g}}^1 \subset \widehat{\mathfrak{g}}^0 = \mathfrak{g}$$

avec $\dim \widehat{\mathfrak{g}}^i = r - i$ *et* $\widehat{\mathfrak{g}}^{i+1} = \big[\widehat{\mathfrak{g}}^i, \widehat{\mathfrak{g}}^i\big]$.

Corollaire. *Toute algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{g}$ s'écrit comme somme semi-directe* $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \oplus_{D'} \mathfrak{g}'$, *avec $\mathfrak{g}'$ résoluble et $D' : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$ une* dérivation *de* $\mathfrak{g}'$, *i.e. une application linéaire satisfaisant* $D'[X', Y'] = [D'X', Y'] + [X', D'Y']$. *Le crochet dans $\mathfrak{g}$ est* :

$$\big[\lambda + X', \mu + Y'\big]_{\mathfrak{g}} := \lambda\, D'(Y') - \mu\, D'(X') + \big[X', Y'\big]_{\mathfrak{g}'}.$$

$\Rightarrow$ **La classification complète dans le cas résoluble semble accessible par simple récurrence sur la dimension !**

Observations

Principes pour une classification des résolubles :

• Récurrence sur la dimension.

• En dimension 1 : $\mathbb{C}$, générateur X_1.

• En dimension 2 : X_1, X_2 générateurs.

• Commutative : $[X_1, X_2] = 0$.

• Noncommutative :
Structure is $[x_1, x_2] = \lambda\, x_1 + \mu\, x_2$. Exchanging $x_1 \leftrightarrow x_2$ if necessary, we have $\mu \neq 0$ if it is noncommutative. Setting $x_1' := x_1/\mu$ and $x_2' := x_2 + \lambda\, x_1/\mu$, we compute :

$$\big[x_1', x_2'\big] = \big[x_1/\mu,\, x_2 + \lambda\, x_1/\mu\big] = \big[x_1, x_2\big]/\mu = (\lambda\, x_1 + \mu\, x_2)/\mu = x_2'.$$

This Lie algebra is solvable, but not nilpotent. It will be denoted by $\mathfrak{r}_2(\mathbb{C})$.

• En dimension 3 : Lie-Scheffers 1893 ; X_1, X_2, X_3 générateurs.

• Calculer toutes les dérivations possibles sur les algèbres de dimension 2.

• Continuer en dimension 4.

Paradoxe

Question de métaphysique mathématique : Pourquoi l'irréductible se ramifie-t-il moins que le réductible ?

Question d'organisation mathématique trans-historique : Pourquoi Babel vainc-t-elle encore sur ce problème de classification ?

Classification en dimension $\leqslant 4$

Théorème . *Toute algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *sur* $\mathbb{C}$ *de dimension* $\leqslant 4$ *est isomorphe à une et une seule des algèbres de Lie suivantes* :

(i) $\underline{\dim \mathfrak{g} = 1}$ $\quad \mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}\,;$

(ii) $\underline{\dim \mathfrak{g} = 2}$ $\quad \mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}^2,\ \mathfrak{r}_2(\mathbb{C})\,;$

(iii) $\underline{\dim \mathfrak{g} = 3}$ $\quad \mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}^4,\ \mathfrak{n}_3(\mathbb{C}),\ \mathfrak{r}_3(\mathbb{C}),\ \mathfrak{r}_{3,\lambda}(\mathbb{C}),$
$\mathfrak{r}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C},\ \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\,;$

(iv) $\underline{\dim \mathfrak{g} = 4}$ $\quad \mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}^4,\ \mathfrak{n}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C},\ \mathfrak{r}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^2,\ \mathfrak{r}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C},\ \mathfrak{r}_{3,\lambda}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C},\ \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C},\ \mathfrak{r}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{r}_2(\mathbb{C}),\ \mathfrak{n}_4(\mathbb{C})$ *ou l'une des huit algèbres résolubles* $\mathfrak{g}_{4,i}$, $1 \leqslant i \leqslant 8$ *données dans la base* X_1, X_2, X_3, X_4 *par les relations* :

$\mathfrak{g}_{4,1}$: $\quad [X_1, X_4] = X_2,\ [X_3, X_4] = X_1\,;$
$\mathfrak{g}_{4,2}$: $\quad [X_1, X_4] = X_1,\ [X_2, X_4] = X_2\,;$
$\mathfrak{g}_{4,3}$: $\quad [X_1, X_4] = X_1,\ [X_2, X_4] = X_1 + X_2, [X_3, X_4] = X_2 + X_3\,;$
$\mathfrak{g}_{4,4}$: $\quad [X_1, X_4] = c\,X_1,\ [X_2, X_4] = (1 + c)\,X_2, [X_3, X_4] = X_1 + c\,X_3\,;$

etc.

V. Repère mobile et courbure de Gauss

Problème d'équivalence. *Étant donné deux surfaces gaussiennes S et $\overline{S}$ munies de métriques prédéfinies* :

$$
\begin{aligned}
& ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2, \\
et \qquad & d\bar{s}^2 = \overline{E}\,du^2 + 2\overline{F}\,d\bar{u}d\bar{v} + \overline{G}\,d\bar{v}^2,
\end{aligned}
$$

trouver un algorithme universel pour déterminer si elles sont localement isométriques. $\boxed{*T*}$

Plan euclidien. Soit $(\bar{u},\,\bar{v}) = (\bar{u}(u,\,v),\,\bar{v}(u,\,v))$ une application conservant la métrique pythagoricienne :

$$
(d\bar{u})^2 + (d\bar{v})^2 = du^2 + dv^2.
$$

Introduisons le co-repère ayant pour base : $\theta^1 := du$ et $\theta^2 := dv$. En tout point $(u,\,v)$, il existe t tel que

$$
\begin{pmatrix} \bar{\theta}^1 \\ \bar{\theta}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}.
$$

Matrice : groupe des rotations $\mathrm{SO}(2,\,\mathbb{R})$. Ici, $t = t(u,\,v)$, fonction inconnue.

Principe de prolongation. *L'ignorance de la relation de dépendance $t = t(u,v)$ est au cœur du problème de savoir si ds^2 et $d\bar{s}^2$ sont réellement équivalents. Introduisons donc t comme une nouvelle variable indépendante (notion de fibré).* $\boxed{*T*}$

Sur $\mathbb{R}^3(u,v,t)$, *co-repère relevé* :

$$\begin{cases} \omega^1 & := (\cos t) \cdot \theta^1 - (\sin t) \cdot \theta^2, \\ \omega^2 & := (\sin t) \cdot \theta^1 + (\cos t) \cdot \theta^2, \end{cases}$$

Général : Changement de coordonnées $(x^1, \dots, x^n) \longmapsto (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$. Transformation induite : $dx^i = dx^i(\bar{x}) = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^{i_1}} \, d\bar{x}^{i_1}$. *Métrique riemannienne* : $ds^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} g_{ij}(x) \, dx^i dx^j$. Transformation :

$$\begin{cases} ds^2 & = \sum_{i_1, j_1} g_{i_1 j_1}(x) \, dx^{i_1} \, dx^{j_1} \\ & = \sum_{i,j} \sum_{i_1, j_1} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} g_{i_1 j_1}(x(\bar{x})) \, d\bar{x}^i \, d\bar{x}^j \\ & = d\bar{s}^2 \\ & = \sum_{i,j} \bar{g}_{ij}(\bar{x}) \, d\bar{x}^i \, d\bar{x}^j. \end{cases}$$

d'où par identification (tensorialité) :

$$\boxed{\bar{g}_{ij}(\bar{x}) \equiv \sum_{i_1, j_1} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i}(x(\bar{x})) \, \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j}(x(\bar{x})) \, g_{i_1 j_1}(x(\bar{x}))}.$$

Procédé de Gram-Schmidt :

$$ds^2 = (\theta^1)^2 + \cdots + (\theta^n)^2.$$

Ici, $\theta^i = \sum_j h^i_j(x) \cdot dx^j$.
Indétermination :

$$ds^2 = (\widehat{\theta}^1)^2 + \cdots + (\widehat{\theta}^n)^2.$$

dès que $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ se déduit de $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ par une transformation qui stabilise la métrique pythagoricienne.
Fibré principal : $\mathbb{R}^n \times$ SO$(n, \mathbb{R})$. Groupe spécial orthogonal. Matrices (u^i_j) satisfaisant $U^T U = I$.
Observation : Si $ds^2 = (\theta^1)^2 + \cdots + (\theta^n)^2$ et $d\bar{s}^2 = (\bar{\theta}^1)^2 + \cdots + (\bar{\theta}^n)^2$ sont équivalents, il existe une fonction matricielle $(u^i_j(x))$ telle que $\bar{\theta}^i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} u^i_j(x) \, \theta^j$.
Principe de prolongation : on ignore justement encore si une telle fonction existe. Introduisons alors u^i_j comme nouvelles variables indépendantes, et :

$$\omega^i := \sum_j u^i_j \cdot \theta^j,$$

Théorème. (Élie CARTAN) *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

- *il existe une isométrie* $(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$ *transformant* ds^2 *en* $d\bar{s}^2$ *;*
- *il existe une application de* $M \times \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ *dans* $\overline{M} \times \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ *de la forme spécifique* :

$$\begin{cases} \bar{x}^i & = \bar{x}^i\left(x^m\right) \\ \bar{u}_l^k & = \bar{u}_l^k\left(x^m,\, u_q^p\right), \end{cases}$$

où les $\bar{x}^i$ *ne dépendent pas des* u_q^p*, telle que* :

$$\overline{\omega}^i = \omega^i,$$

pour $i = 1 \ldots, n$*, après remplacement de* $\bar{x}$ *et de* $\bar{u}$ *dans les membres de gauche* $\overline{\omega}^i = \overline{\omega}^i\left(\bar{x}^j,\, \bar{u}_k^l,\, d\bar{x}^m\right)$*.*

Dans ce cas, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \times \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \overline{M} \times \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \arrow[d, "\bar{\pi}"] \\ M \arrow[r] & \overline{M} \end{tikzcd},$$

Le problème d'équivalence entre ds^2 et $d\bar{s}^2$ s'écrit simplement : est-ce que $\bar{\omega}^i = \omega^i$?

Retour aux surfaces : Appliquer d :

$$d\omega^1 = -\alpha \wedge \omega^2, \qquad d\omega^2 = \alpha \wedge \omega^1,$$

où $\alpha := dt$. D'après le théorème, l'application $(u,\, v) \mapsto (\bar{u},\, \bar{v})$ induit une unique application $\bar{t}(u,\, v,\, t)$ qui laisse *invariant* le co-repère relevé :

$$\bar{\omega}^i = \omega^i, \qquad i = 1, 2.$$

De même, avec $(\bar{u},\, \bar{v},\, \bar{t})$:

$$d\bar{\omega}^1 = -\bar{\alpha} \wedge \bar{\omega}^2, \qquad d\bar{\omega}^2 = \bar{\alpha} \wedge \bar{\omega}^1.$$

Puisque $\bar{\omega}^1 = \omega^1$, $\bar{\omega}^2 = \omega^2$, on déduit $\bar{\alpha} = \alpha$.

Aussi, nous pouvons prolonger le problème en adjoignant une 1-forme additionnelle α au co-repère relevé. Les équations de structure prolongées sont de la forme :

$$d\omega^1 = -\alpha \wedge \omega^2, \qquad d\omega^2 = \alpha \wedge \omega^1, \qquad d\alpha = 0,$$

puisque $\alpha = dt$ est exacte. On reconnaît alors les équations de structure pour les trois formes de Maurer-Cartan $d\theta^1$, $d\theta^2$, $d\alpha$ du groupe des déplacements euclidiens $\mathrm{SE}(2,\, \mathbb{R})$, constitué du produit semi-direct du groupe des rotations avec le groupe des translations du plan pythagoricien.

Maurer-Cartan G un groupe de matrices de dimension $r \geqslant 1$, paramétré par $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$. Élément $g \in G$ matrice $r \times r$ de la forme $(g_i^j(u))_{1\leqslant i\leqslant r}^{1\leqslant j\leqslant r}$.

$$dg \cdot g^{-1} = \left(\sum_{1\leqslant k\leqslant r} \frac{\partial g_i^j}{\partial u_k}\, du_k \right) \cdot \left(g_i^j \right)^{-1}$$

Récupérer r formes différentielles indépendantes $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^r)$ sur G.

Équations de structure.

$$d\alpha^i = \frac{1}{2} \sum_{1\leqslant k,l\leqslant r} C_{kl}^i\, \alpha^k \wedge \alpha^l,$$

les C_{kl}^i étant constants.

Surfaces générales. Métrique gaussienne

$$ds^2 = E(u,\,v)\,du^2 + 2F(u,\,v)\,dudv + G(u,\,v)\,dv^2.$$

Combinaisons linéaires des 1-formes du et dv :

$$\begin{cases} \theta^1 & = A(u,\,v)\,du + B(u,\,v)\,dv, \\ \theta^2 & = C(u,\,v)\,du + D(u,\,v)\,dv, \end{cases}$$

A, B, C, D inconnues, diagonalisant :

$$ds^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2.$$

Unique solution avec A positif :

$$A = \sqrt{E}, \qquad B = \frac{F}{\sqrt{E}}, \qquad D = \sqrt{\frac{EG - F^2}{E}} = \sqrt{\frac{\Delta}{E}},$$

où $\Delta := EG - F^2 = (AD - BC)^2 > 0$ est le discriminant (positif) du ds^2.
Équations de structure : appliquer d :

$$\begin{cases} d\omega^1 & = -\alpha \wedge \omega^2 + P \cdot \omega^1 \wedge \omega^2, \\ d\omega^2 & = \alpha \wedge \omega^1 + Q \cdot \omega^1 \wedge \omega^2, \end{cases}$$

où à nouveau $\alpha := dt$. Ici :

$$P = J\cos t - K\sin t, \qquad Q = J\sin t + K\cos t,$$

où P et Q sont des « coefficients de torsion » avec :

$$J = \frac{\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}}{\sqrt{\Delta}}, \qquad K = \frac{\frac{\partial D}{\partial u}}{\sqrt{\Delta}}.$$

Introduire la forme π définie par :

$$\pi := \alpha - P \cdot \omega^1 - Q \cdot \omega^2 = \alpha - J \cdot \omega^1 - K \cdot \omega^2,$$

ce qui donne :

$$\boxed{d\omega^1 = -\pi \wedge \omega^2, \qquad d\omega^2 = \pi \wedge \omega^1}.$$

Dans la théorie d'Élie Cartan, on appelle ce procédé «*absorption de la torsion*». Appliquons l'opérateur d :

$$\begin{cases} 0 & = dd\omega^1 = -d\pi \wedge \omega^1 + \pi \wedge d\omega^2 = -d\pi \wedge \omega^1, \\ 0 & = dd\omega^2 = d\pi \wedge \omega^2. \end{cases}$$

Toute 2-forme telle que $d\pi$ se décompose sur la base des trois 2-formes $\omega^1 \wedge \omega^2$, $\omega^1 \wedge \alpha$, $\omega^2 \wedge \alpha$. Les deux équations précédentes impliquent que dans une telle décomposition pour $d\pi$, les deux coefficients devant

$\omega^1 \wedge \alpha$ et devant $\omega^2 \wedge \alpha$ doivent s'annuler. Il existe donc une fonction κ des trois variables $(t,\, u,\, v)$ telle que

$$d\pi = \kappa \cdot \omega^1 \wedge \omega^2 = \kappa \cdot \theta^1 \wedge \theta^2.$$

Évidemment, ce raisonnement est un cas particulier du Lemme dit «*de Cartan*». En apppliquant l'opérateur de différentiation extérieure à cette équation, nous obtenons la relation suivante :

$$0 = dd\pi = \frac{\partial \kappa}{\partial t} \cdot dt \wedge \omega^1 \wedge \omega^2,$$

qui montre que le coefficient $\kappa = \kappa(u,\, v)$ est *indépendant de* t.

Theorema Egregium On a $\bar{\kappa} = \kappa$ à travers toute isométrie $(u,\, v) \mapsto (\bar{u},\, \bar{v})$ telle que $\bar{\omega}^1 = \omega^1$ et $\bar{\omega}^2 = \omega^2$.

Calcul explicite de la courbure de Gauss κ. Calculons maintenant l'expression explicite de κ et vérifions qu'elle coïncide avec la *formula egregia*. En utilisant le fait que $\omega^1 \wedge \omega^2 = \theta^1 \wedge \theta^2$, nous trouvons :

$$\begin{cases} d\pi & = -dJ \wedge \omega^1 - dK \wedge \omega^2 - J \cdot d\omega^1 \\ & = \left\{ \dfrac{\partial J}{\partial \omega^2} - \dfrac{\partial K}{\partial \omega^1} - J^2 - K^2 \right\} \cdot \omega^1 \wedge \omega^2. \end{cases}$$

Nous en déduisons la formule suivante :

$$\begin{cases} \kappa & = \dfrac{\partial J}{\partial \omega^2} - \dfrac{\partial K}{\partial \omega^1} - J^2 - K^2 \\ & = \dfrac{A\, \frac{\partial J}{\partial v} - B\, \frac{\partial J}{\partial u} - D\, \frac{\partial K}{\partial u}}{AD - BC} - J^2 - K^2. \end{cases}$$

En insérant les valeurs :

$$\left\{\begin{aligned}\Delta\,\kappa\ =\ & \frac{1}{4E}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2+\frac{1}{4E}\,\frac{F^2\left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2}{EG-F^2}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}-\frac{1}{2E^3}\,\frac{F^4\left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2}{EG-F^2}-\\ & -\frac{F^2\left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2}{2E^3}+\frac{1}{2E^2}\,\frac{F^2\left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2}{EG-F^2}-\frac{1}{2}\,\frac{F\,\frac{\partial E}{\partial v}\,\frac{\partial F}{\partial v}}{EG-F^2}-\frac{\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial v}}{2E}-\\ & -\frac{F^2}{2E}\,\frac{\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial v}}{EG-F^2}+\frac{F\,\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial v}}{E^2}+\frac{F^3\,\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial u}}{E^2(EG-F^2)}-\frac{FG\,\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial u}}{E(EG-F^2)}+\\ & +\frac{F\,\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial v}}{EG-F^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{1}{4}\,\frac{\frac{\partial E}{\partial v}\,\frac{\partial G}{\partial v}}{EG-F^2}+\frac{F\,\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial v}}{4(EG-F^2)}-\\ & -\frac{E\,\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial v}}{2(EG-F^2)}-\frac{F\,\frac{\partial E}{\partial v}\,\frac{\partial G}{\partial u}}{4(EG-F^2)}-\frac{\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial u}}{4E}-\frac{F^2\,\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial u}}{4E(EG-F^2)}+\\ & +\frac{G\,\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}-\frac{F\,\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}+\frac{E\,\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2}{4(EG-F^2)}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.\end{aligned}\right.$$

Après simplification :

$$\left\{\begin{aligned}\kappa = & \frac{1}{4\,(EG-F^2)^2}\left\{E\left[\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}-2\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}+\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right]+\right.\\ & +F\left[\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}-2\,\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+4\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}-2\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\right]\\ & +G\left[\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}-2\,\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right]-\\ & \left.-2\,\left(EG-F^2\right)\left[\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}-2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right]\right\}.\end{aligned}\right.$$

C'est la *formula egregia*, due à Gauss, qui exprime la courbure d'une surface de manière intrinsèque.

Fin