Intégrales triples

François DE MARÇAY
Institut de Mathématique d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Définition et propriétés de l'intégrale triple

La définition et les propriétés des intégrales doubles peuvent se généraliser, en utilisant des μ-partitions d'ensembles cubables.

Au chapitre précédent, nous avons défini les parties *cubables* de l'espace $\mathbb{R}^3$ de la géométrie euclidienne à 3 dimensions, comme celles auxquelles on peut attribuer un *volume*. Sur l'ensemble $\mathscr{C}$ des parties cubables de $\mathbb{R}^3$, nous avons défini une application $A \longmapsto \mu(A)$ qui associe à tout $A \in \mathscr{C}$ un nombre réel positif, son *volume* $\mu(A)$. Ce dernier satisfait :

$$A \cap B = \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad \mu\big(A \cup B\big) = \mu(A) + \mu(B).$$

Cette implication est encore exacte lorsque A et B sont μ-*disjoints*, c'est-à-dire ont une intersection qui, sans nécessairement être vide, a un volume *nul*, propriété que nous avons notée :

$$A \cap B = \emptyset_\mu.$$

Définition 2.1. On appelle μ-*partition* d'un ensemble cubable $A \in \mathscr{C}$ toute famille finie $\big(A_i\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ constituée de parties cubables deux à deux μ-disjointes, dont la réunion est égale à :

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Pour construire la notion d'intégrale triple, considérons une une fonction bornée $f \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ensemble cubable $A \subset \mathbb{R}^3$. Pour toute μ-partition de A :

$$p = \big(A_i\big)_{1 \leqslant i \leqslant n},$$

posons, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$m_i := \inf_{(x,y,z) \in A_i} f(x,y,z) \qquad \text{et} \qquad M_i := \sup_{(x,y,z) \in A_i} f(x,y,z).$$

Ensuite, formons les deux sommes :

$$\begin{aligned} s(p) &:= m_1\, \mu\big(A_1\big) + m_2\, \mu\big(A_2\big) + \cdots + m_n\, \mu\big(A_n\big), \\ S(p) &= M_1\, \mu\big(A_1\big) + M_2\, \mu\big(A_2\big) + \cdots + M_n\, \mu\big(A_n\big). \end{aligned}$$

Lorsque la μ-partition p parcourt l'ensemble $\mathscr{P}_\mu(A)$ de toutes les μ-partitions de A, on prouve, comme pour les intégrales doubles, que l'ensemble des nombres $s(p)$ est majoré par toute somme $S(q)$ où $q \in \mathscr{P}_\mu(A)$ est fixée, et par conséquent, le supremum suivant existe :

$$\sup_{p \in \mathscr{P}_\mu(A)} s(p) =: \sigma_f(A).$$

De même, l'ensemble des nombres $S(p)$ est minoré par toute somme $s(q)$, et par suite, existe l'infimum :

$$\inf_{p \in \mathscr{P}_\mu(A)} S(p) =: \Sigma_f(A).$$

On a évidemment :

$$\sigma_f(A) \leqslant \Sigma_f(A).$$

Définition 2.2. On dit qu'une fonction bornée $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ sur un ensemble cubable $A \subset \mathbb{R}^3$ est *intégrable* (au sens de Darboux) si :

$$\sigma_f(A) = \Sigma_f(A).$$

On note alors cette valeur commune :

$$\iiint_A f(x,y,z)\, dxdydz,$$

et on la nomme *intégrale triple* de f sur la partie cubable A.

L'ensemble des fonctions intégrables sur A sera noté :

$$\mathsf{Int}\big(A, \mathbb{R}\big).$$

Sans attendre, venons-en aux propriétés de l'intégrale triple, que nous admettrons, puisqu'elles se démontrent comme celles de l'intégrale double.

Théorème 2.3. *Soient A et B deux parties cubables de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui sont μ-disjointes :*

$$0 = \mu\big(A \cap B\big).$$

Pour toute fonction bornée $f\colon A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$, on a l'équivalence :

$$f \text{ est intégrable sur } A \text{ et sur } B \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ est intégrable sur } A \cup B.$$

Dans ce cas :

$$\iiint_{A\cup B} f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_A f(x,y,z)\, dxdydz + \iiint_B f(x,y,z)\, dxdydz.$$

□

Ensuite, le théorème suivant montre que l'espace $\mathsf{Int}\,(A, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Théorème 2.4. *Si f et g sont deux fonctions bornées intégrables sur une partie cubable $A \subset \mathbb{R}^3$, alors pour tous réels $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la combinaison linéaire :*

$$\lambda\, f + \mu\, g \in \mathsf{Int}\,(A, \mathbb{R})$$

est aussi intégrable sur A, avec :

$$\iiint_A \Big(\lambda\, f(x,y,z) + \mu\, g(x,y,z)\Big)\, dxdy = \lambda \iiint_A f(x,y,z)\, dxdydz + \mu \iiint_A g(x,y,z)\, dxdydz.$$

□

Exprimons aussi un critère d'intégrabilité tout à fait analogue, lui aussi, à ce qui a déjà été vu en dimension 2.

Lemme 2.5. [Critère d'intégrabilité] *Pour que f soit intégrable (au sens de Darboux) sur A, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une μ-partition p de A telle que :*

$$(0 \leqslant) \qquad S(\mathsf{p}) - s(\mathsf{p}) \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Le théorème probablement le plus utile et le plus important est le suivant.

Théorème 2.6. *Toute fonction continue sur un compact cubable y est intégrable.* $\square$

De plus, il existe une relation d'ordre sur les intégrales triples.

Théorème 2.7. *Si $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ sont bornées intégrables sur une partie cubable $A \subset \mathbb{R}^3$, alors :*

$$f \leqslant g \qquad \Longrightarrow \qquad \iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz \leqslant \iiint_A g(x,y,z)\,dxdydz.$$

De plus :

$$\left| \iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz \right| \leqslant \iiint_A \big|f(x,y,z)\big|\,dxdydz. \qquad \square$$

Il existe aussi des inégalités élémentaires.

Théorème 2.8. *Soit $f \in \mathsf{Int}\,(A, \mathbb{R})$ une fonction intégrable sur $A \subset \mathbb{R}^3$ cubable. Alors en posant :*

$$m := \inf_A f \qquad \textit{et} \qquad M := \inf_A f,$$

on a :

$$m \cdot \mu(A) \leqslant \iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz \leqslant M \cdot \mu(A). \qquad \square$$

Le nombre :

$$\lambda := \frac{1}{\mu(A)} \iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz$$

se nomme alors *valeur moyenne* de f sur A.

Théorème 2.9. *Si $A \subset \mathbb{R}^2$ est cubable et si $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, il existe un $(x_0, y_0, z_0) \in A$ tel que :*

$$\frac{1}{\mu(A)} \iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz = f(x_0, y_0, z_0). \qquad \square$$

3. Intégrale triple de Riemann

Soit f une fonction bornée sur une partie cubable $A \subset \mathbb{R}^3$. Pour toute μ-partition $\big(A_i\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de A, nous avons posé plus haut, pour tout indice $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$m_i := \inf_{(x,y,z) \in A_i} f(x,y,z) \qquad \text{et} \qquad M_i := \sup_{(x,y,z) \in A_i} f(x,y,z).$$

Dans cet espace euclidien $\mathbb{R}^3$, rappelons que la distance euclidienne entre deux points (x,y,z) et (x', y', z') est :

$$\big\|(x,y,z) - (x',y',z')\big\| := \sqrt{\big(x-x'\big)^2 + \big(y-y'\big)^2 + \big(z-z'\big)^2}.$$

Par définition, le *diamètre* de chaque A_i est le nombre réel positif :

$$\delta_i := \sup_{\substack{(x,y,z) \in A_i \\ (x',y',z') \in A_i}} \big\|(x,y,z) - (x',y',z')\big\|.$$

Par définition aussi, le *pas* de la μ-partition $\big(A_i\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est le nombre :

$$\mathsf{pas}(\delta) \;:=\; \max_{1\leqslant i\leqslant n} \delta_i.$$

Pour chaque indice $1 \leqslant i \leqslant n$, choisissons *arbitrairement* un réel $\theta_i \in [m_i, M_i]$, par exemple une valeur $\theta_i = f(x_i, y_i, z_i)$ de la fonction en un point arbitraire $(x_i, y_i, z_i) \in A_i$. On appelle *somme de Riemann* le nombre réel :

$$\mathscr{R}(p) \;:=\; \theta_1\,\mu\big(A_1\big) + \theta_2\,\mu\big(A_2\big) + \cdots + \theta_n\,\mu\big(A_n\big).$$

On a évidemment :

$$s(p) \;\leqslant\; \mathscr{R}(p) \;\leqslant\; S(p).$$

Comme dans la théorie des intégrales doubles de Riemann, on établit le

Théorème 3.1. *Si $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $A \subset \mathbb{R}^2$ quarrable, alors :*

$$\lim_{\mathsf{pas}(p)\to 0} \mathscr{R}(p) \;=\; \iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz. \qquad \square$$

L'intérêt, c'est qu'on approxime la valeur de l'intégrale par des sommes échantillonnées 'au hasard' : chaque morceau A_i 'pèse' :

$$f(x_i, y_i, z_i)\cdot \mathsf{Volume}(A_i),$$

où $f(x_i, y_i, z_i)$ est une valeur de la fonction en un point (x_i, y_i, z_i) choisi arbitrairement dans A_i.

Il y a aussi une réciproque à ce résultat.

Théorème 3.2. *Toute fonction intégrable au sens de Riemann :*

$$\lim_{\mathsf{pas}\to 0} \mathscr{R}(p) \qquad \textit{existe},$$

est aussi intégrable (au sens de Darboux), i.e. *appartient à* $\mathsf{Int}\,(A, \mathbb{R})$. $\square$

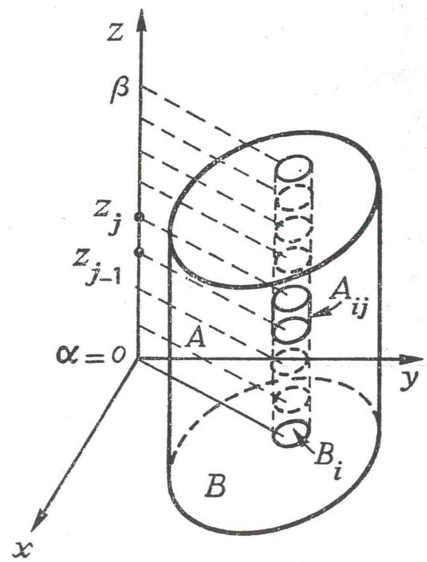
4. Calcul d'une intégrale triple sur un compact cylindrique

Rapportons l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ à un repère orthonormé $\big\{0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\big\}$. Soit $[a,b]$ un intervalle fermé, et considérons deux fonctions numériques φ_1 et φ_2 continues sur $[a,b]$. Soit le compact simple du plan horizontal :

$$B \;:=\; \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\; a \leqslant x \leqslant b,\;\; \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\big\}.$$

Soient enfin deux constantes $\alpha < \beta$, et soit le *compact cylindrique* de l'espace tridimensionnel :

$$A \;:=\; \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\; (x,y) \in B,\;\; \alpha \leqslant z \leqslant \beta\big\}$$



Sur la figure, le nombre α vaut 0. On a vu que tout compact simple est cubable. Ici, le volume de A vaut :

$$\mu_v(A) \,=\, \mu_a(B)\,\big(\beta-\alpha\big),$$

puisque l'aire de la base B vaut $\mu_a(B)$, et le cylindre est de hauteur $(\beta-\alpha)$. On remarquera la différence notationnelle :

$$\mu_a(\bullet)\ \text{pour l'aire 2-dimensionnelle} \qquad\qquad \neq \qquad\qquad \mu_v(\bullet)\ \text{pour le volume 3-dimensionnel.}$$

Proposons-nous alors de calculer l'intégrale triple :

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz,$$

où $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue (donc bornée). À cette fin, considérons une μ-partition quelconque de B :

$$\big(B_i\big)_{1\leqslant i\leqslant n},$$

ainsi qu'une subdivision de l'intervalle vertical $[\alpha,\beta]$:

$$\alpha \,=\, z_0 \,<\, z_1 \,<\, \cdots \,<\, z_{q-1} \,<\, z_q \,=\, \beta.$$

Comme l'illustre la figure, au-dessus de chaque élément-plan B_i de la μ-partition du plan de base, nous avons empilé q compacts cylindriques $A_{i,1},\dots,A_{i,q}$ définis par :

$$A_{i,j} \,=\, B_i\times\big[z_{j-1},z_j\big] \qquad\qquad (1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant q).$$

Nous avons ainsi constitué une μ-partition du compact 3-dimensionnel A :

$$p \,=\, \big(A_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}},$$

en compacts cylindriques chacun de volume égale à :

$$\mu_v\big(A_{i,j}\big) \,=\, \big(z_j-z_{j-1}\big)\,\mu\big(B_i\big).$$

Ensuite, avec une telle μ-partition p, choisissons des nombres $\theta_{i,j}$ arbitrairement parmis les valeurs de f sur $A_{i,j}$ et associons-leur la somme de Riemann :

$$\begin{aligned}\mathscr{R}(p) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\theta_{i,j}\,\mu_v\big(A_{i,j}\big) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\theta_{i,j}\,\big(z_j - z_{j-1}\big)\,\mu_a\big(B_i\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\mu_a\big(B_i\big)\sum_{j=1}^{q}\big(z_j - z_{j-1}\big)\,\theta_{i,j},\end{aligned}$$

— en fait, nous allons effectuer astucieusement le choix de ces $\theta_{i,j}$.

En effet, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, prenons tout d'abord arbitrairement un point $(x_i, y_i) \in B_i$, mais ensuite, pour tout $1 \leqslant j \leqslant q$, prenons la valeur moyenne de la fonction partielle $z \longmapsto f\big(x_i, y_i, z\big)$ sur l'intervalle $[z_{j-1}, z_j]$:

$$\theta_{i,j} := \frac{1}{z_j - z_{j-1}}\int_{z_{j-1}}^{z_j} f\big(x_i, y_i, z\big)\,dz.$$

Alors grâce à la règle de Chasles pour les intégrales :

$$\sum_{j=1}^{q}\big(z_j - z_{j-1}\big)\,\theta_{i,j} = \sum_{j=1}^{q}\int_{z_{j-1}}^{z_j} f\big(x_i, y_i, z\big) = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x_i, y_i, z\big)\,dz.$$

On peut vérifier rigoureusement que la fonction :

$$\psi(x,y) = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x, y, z\big)\,dz$$

est continue dans le compact simple $B = \big\{a \leqslant x \leqslant b,\, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\big\}$. Par conséquent, la somme de Riemann considérée devient :

$$\mathscr{R}(p) = \sum_{i=1}^{q}\mu_a(B_i)\,\psi\big(x_i, y_i\big),$$

de telle sorte que nous reconnaissons ici une somme de Riemann pour l'intégrale double :

$$\iint_B \psi(x,y)\,dxdy.$$

Notons de plus que le pas de la μ-partition $\big(B_i\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est au plus égal au pas de la μ-partition $\big(A_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}$. Lorsque le second pas tend vers zéro, *a fortiori*, le premier pas tend vers zéro. Nous obtenons donc le

Théorème 4.1. *Sur un compact cylindrique $A \subset \mathbb{R}^3$ délimité par des fonctions continues :*

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), \qquad \alpha \leqslant z \leqslant \beta,$$

de base planaire $B \subset \mathbb{R}^2$ définie par :

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),$$

on a pour toute fonction continue $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_B dxdy\,\bigg(\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y,z)\,dz\bigg). \qquad \square$$

Le calcul d'une intégrale triple et ainsi ramené à celui d'une intégrale simple suivi du calcul d'une intégrale double.

Exemple 4.2. Proposons-nous de calculer l'intégrale triple :

$$I := \iiint_A z^{x^2+y^2}\, dxdydz,$$

sur le compact (vraiment) cylindrique A défini par :

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2, \qquad\qquad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

Désignons par B le disque circulaire :

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2,$$

projection orthogonale de A sur le plan horizontal $0xy$. D'après le Théorème 4.1, on a :

$$I = \iint_B dxdy \int_0^1 z^{x^2+y^2}\, dz = \iint_B dxdy \left[\frac{z^{x^2+y^2+1}}{x^2+y^2+1}\right]_0^1 = \iint_B dxdy\, \frac{1}{x^2+y^2+1}.$$

Le passage aux coordonnées polaires :

$$x = r\cos\theta, \qquad\qquad y = r\sin\theta,$$

avec, comme nous nous en souvenons :

$$dxdy = r\, drd\theta$$

est évidemment tout indiqué, et il nous ramène au produit de deux intégrales simples indépendantes :

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{r\, dr}{r^2+1} = 2\pi \left[\frac{1}{2}\log\big(r^2+1\big)\right]_0^a = \pi \log\big(a^2+1\big).$$

5. Calcul d'une intégrale triple sur un compact simple

Proposons-nous maintenant de calculer l'intégrale triple :

$$\iiint_A f(x,y,z)\, dxdyz,$$

f étant une fonction continue sur le compact simple général de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), \qquad \psi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x,y),$$

où φ_1 et φ_2 sont, comme précédemment, deux fonctions continues sur $[a,b]$, et où ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions continues sur le compact simple B de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad\qquad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x).$$

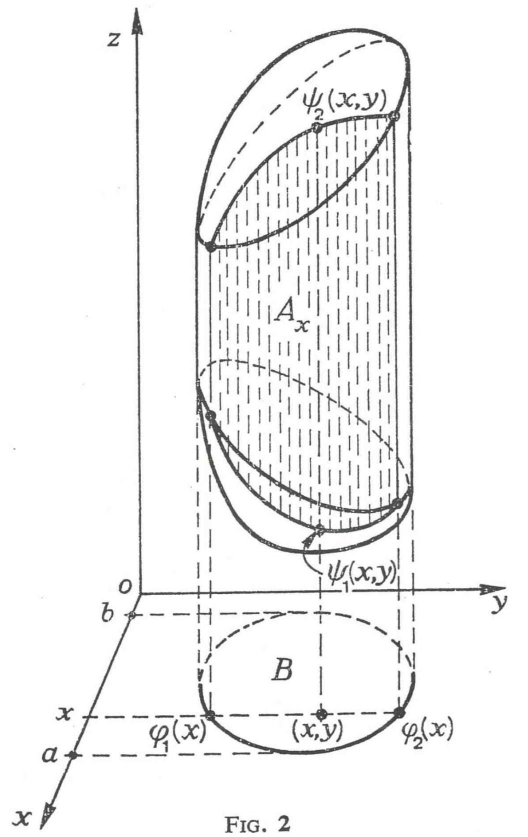


FIG. 2

Soit α un minorant de ψ_1 sur B et soit aussi β un majorant de ψ_2 sur B :

$$\alpha \leqslant \psi_1(x,y) \leqslant \psi_2(x,y) \leqslant \beta \qquad\qquad (\forall\,(x,y)\in B).$$

Désignons par C le compact cylindrique associé, ensemble des points $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ satisfaisant :

$$(x,y)\in B \qquad\qquad \alpha\leqslant z\leqslant\beta.$$

Sur cette partie cubable, définissons la fonction auxiliaire :

$$g(x,y,z) := \begin{cases} f(x,y,z) & \text{lorsque } (x,y,z)\in A, \\ 0 & \text{lorsque } (x,y,z)\in C\backslash A. \end{cases}$$

Cette fonction g est intégrable sur C puisqu'elle l'est séparément sur A et sur $C\backslash A$. Comme elle s'annule identiquement sur $C\backslash A$, on a clairement :

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_C g(x,y,z)\,dxdydz.$$

En application du Théorème 4.1, nous pouvons calculer la deuxième intégrale double jusqu'à obtenir :

$$F(x,y) := \int_\alpha^\beta g(x,y,z)\,dz = \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

grâce au fait que la fonction g est nulle sur les deux intervalles :

$$\big[\alpha,\ \psi_1(x,y)\big[\qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \big]\psi_2(x,y),\ \beta\big].$$

La fonction $(x, y) \longmapsto F(x, y)$ est continue sur le compact B, donc intégrable sur B. On obtient par conséquent :

$$\iiint_A f(x, y, z)\, dxdydz \;=\; \iint_B F(x, y)\, dxdy.$$

En calculant finalement cette intégrale double comme dans le chapitre précédent, nous concluons par le

Théorème 5.1. *Sur un compact simple $A \subset \mathbb{R}^3$ délimité par des fonctions continues :*

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), \qquad \psi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x, y),$$

on a pour toute fonction continue $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\iiint_A f(x, y, z)\, dxdydz \;=\; \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad \square$$

Exemple 5.2. Soit à calculer l'intégrale :

$$I \;:=\; \iiint_A z^2\, dxdydz,$$

sur la boule fermée :

$$x^2 + y^2 + z^2 \;\leqslant\; a^2.$$

Remarquons que A admet les symétries d'axes $0x$, $0y$, $0z$ qui laissent invariante la fonction à intégrer. On a donc :

$$I \;=\; 8 \iiint_{A^+} z^2\, dxdydz,$$

où A^+ est le $\frac{1}{8}$ de boule défini par :

$$A^+\colon \qquad x \geqslant 0, \qquad y \geqslant 0, \qquad z \geqslant 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2,$$

qui se projette orthogonalement sur le $\frac{1}{4}$ de cercle :

$$B^+\colon \qquad x \geqslant 0, \qquad y \geqslant 0, \qquad x^2 + y^2 - a^2 \leqslant 0.$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} I \;=\; 8 \iint_B dxdy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z^2\, dz \;&=\; \iint_B dxdy \left[\frac{1}{3}\, z^3\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \\ &=\; \frac{8}{3} \iint_B dxdy \left(a^2 - x^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}} dxdy. \end{aligned}$$

Finalement, en passant aux coordonnées polaires, on trouve :

$$\begin{aligned} I \;&=\; \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \left(a^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} d\, dr \\ &=\; \frac{8}{3}\, \frac{\pi}{2} \left[-\, \frac{1}{5} \left(a^2 - r^2\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^a \\ &=\; \frac{4\,\pi}{15}\, a^5. \end{aligned} \qquad \square$$

6. Volume par intégration de sections planes

Comme dans le Théorème 5.1, soit un compact général $A \subset \mathbb{R}^3$ défini par :

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), \qquad \psi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x,y).$$

Désignons par A_x la partie de A constituée des points d'abscisse fixée $x \in [a,b]$:

$$A_x\colon \quad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), \qquad \psi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x,y).$$

D'un point de vue géométrique, A_x est l'intersection de A avec le plan parallèle au plan $y0z$ passant par x.

Grâce au calcul d'une intégrale double vu au chapitre précédent, nous pouvons écrire :

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \;=\; \iint_{A_x} f(x,y,z)\,dydz,$$

et par suite :

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz \;=\; \int_a^b dx \left(\iint_{A_x} f(x,y,z)\,dydz\right).$$

En particulier, si on considère la fonction :

$$f(x,y,z) := 1,$$

l'intégrale triple considérée représente évidemment le volume $\mu_v(A)$ du compact cubable A :

$$\mu_v(A) \;=\; \iiint_A dxdydz.$$

Quant à l'intégrale double, elle vaut l'aire $\mu_a(A_x)$ de la partie quarrable A_x :

$$\mu_a\big(A_x\big) \;=\; \iint_{A_x} dydz.$$

La formule précédente exprime alors que le calcul d'un volume se ramène à une intégrale simple de calculs d'aires.

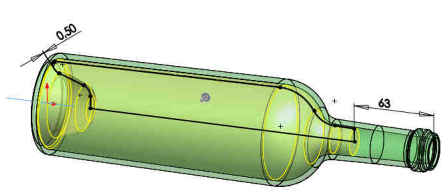
Théorème 6.1. *Soit $A \subset \mathbb{R}^3$ un compact simple cubable, et soit $\big(A_x\big)_{a\leqslant x\leqslant b}$ la famille de ses sections planes par des plans perpendiculaires à une droite fixée $0x$. Alors le volume $\mu_v(A)$ est donné par l'intégrale simple :*

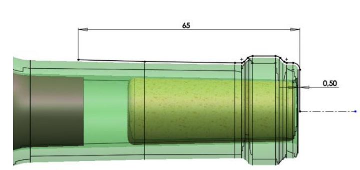
$$\mu_v(A) \;=\; \int_a^b \mu_a\big(A_x\big)\,dx,$$

des aires $\mu_a\big(A_x\big)$ des ses sections A_x. □

Ce résultat est encore valable pour A cubable sans être compact.

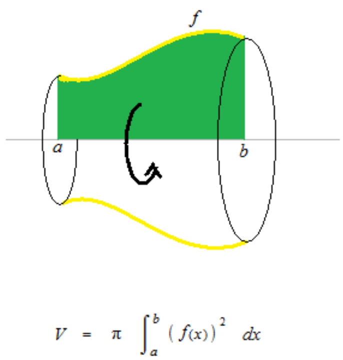
7. Volume d'un compact de révolution

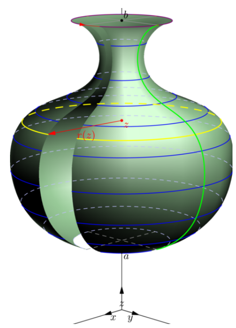


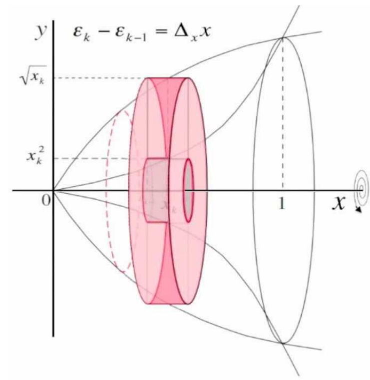


Considérons le cas particulier où le compact $A \subset \mathbb{R}^3$ est de révolution autour d'un axe $0x$, de telle sorte que toute section plane A_x, pour $a \leqslant x \leqslant b$, par un plan perpendiculaire à $0x$ soit un disque de rayon $r(x)$ centré sur l'axe. On a alors pour le volume :

$$\mu_v(A) \,=\, \pi \int_a^b \big(r(x)\big)^2\, dx.$$







Cette formule peut s'étendre au cas où le compact est de révolution de telle sorte que la section A_x ne soit pas un disque complet, mais une couronne circulaire de rayons respectifs $r_1(x) \leqslant r_2(x)$. On a alors, pour le volume, la formule :

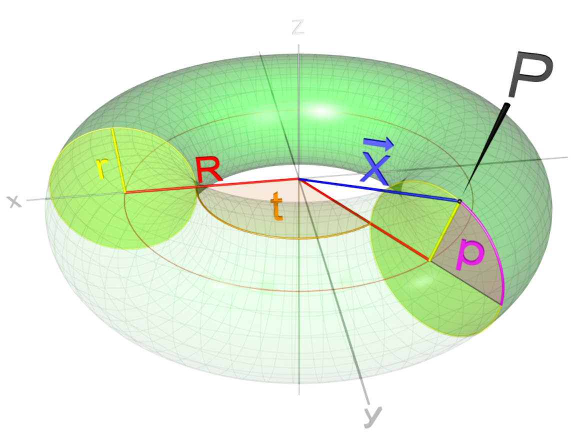
$$\mu_v(A) \,=\, \pi \int_a^b \Big[\big(r_2(x)\big)^2 - \big(r_1(x)\big)^2\Big]\, dx.$$

Ensuite, cherchons à transformer cette formule. Introduisons la *méridienne* de A, c'est-à-dire la section de A par tout plan contenant l'axe $0x$, cette figure ne dépendant pas de l'angle que fait le plan autour de cet axe, puisque A est de révolution. Notons Γ le bord de cette méridienne.

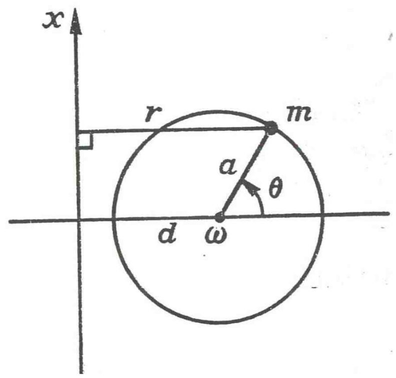
Alors la formule qui précède pour le volume de A peut se récrire sous forme d'une intégrale curviligne :

$$\mu_v(A) \,=\, \pi \int_\Gamma r^2\, dx,$$

et cette formule est vraie pour tout solide A de révolution autour de $0x$. Par exemple, soit un solide comme l'intérieur d'un pneu, ou d'une chambre à air dans l'espace.



Exemple 7.1. [Volume d'un tore] Le terme mathématique est moins imagé. Soit donc un *tore* balayé par le disque de centre ω, de rayon a, en tournant autour de l'axe $0x$, ne rencontrant pas le disque, comme sur la figure suivante.



La distance de ω à $0x$ étant désignée par d, et θ étant l'angle repérant le point m du cercle indiqué sur la figure, on a :

$$r = d + a\cos\theta, \qquad\qquad x = a\sin\theta,$$

et donc pour le volume du tore, nous avons grâce à la formule qui précède :

$$\begin{aligned}\mu_v(A) &= \pi\, a \int_0^{2\pi} \big(d + a\cos\theta\big)^2 \cos\theta\, d\theta \\ &= \pi\, a \int_0^{2\pi} \Big(d^2\cos\theta + 2\,ad\cos^2\theta + a^2\cos^3\theta\Big)\, d\theta.\end{aligned}$$

En tenant compte des formules élémentaires (exercice : utiliser des formules de trigonométrie) :

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta, \\ \pi &= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta,\end{aligned}$$

on trouve aisément :

$$\mu_v(A) = 2\,\pi^2\, a^2\, d.$$

□

8. Formule de changement de variables dans les intégrales triples

Soient deux espaces euclidiens distincts $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ munis de deux systèmes de coordonnées (cartésiennes ou curvilignes) :

$$(u,v,w) \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{et} \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^2.$$

On suppose donnés deux compacts à bords quarrables :

$$A \subset \mathbb{R}^3 \qquad \text{et} \qquad B \subset \mathbb{R}^3,$$

ainsi qu'une application entre eux :

$$\begin{aligned}\varphi\colon \qquad A &\xrightarrow{\sim} B \\ (u,v,w) &\longmapsto \big(f(u,v,w),\, g(u,v,w),\, h(u,v,w)\big) =: (x,y,z),\end{aligned}$$

qui satisfait toutes les hypothèses suivantes.

(1) φ est bijective $A \xrightarrow{\sim} B$.

(2) En restriction aux bords, $\varphi\big|_{\partial A} \colon \partial A \xrightarrow{\sim} \partial B$ est aussi bijective.

(3) φ est continue, et la bijection inverse $A \xleftarrow{\sim} B : \varphi^{-1}$ est aussi continue.

(4) φ admet des dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial w}$ qui sont continues sur A.

(5) φ conserve l'orientation.

Terminologie 8.1. On dit que φ est un $\mathscr{C}^1$-*difféomorphisme* entre A et B.

Définition 8.2. La *matrice jacobienne* d'une application de classe $\mathscr{C}^1$:

$$\varphi\colon \qquad (u,v,w) \longmapsto \big(f(u,v,w),\, g(u,v,w),\, h(u,v,w)\big)$$

en un point (u,v,w) est la matrice 3×3 :

$$\mathsf{Jac}\,(\varphi)\,(u,v,w) \;:=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w} \end{pmatrix} (u,v,w).$$

Le *déterminant jacobien* de φ est la fonction de (u,v,w) :

$$\begin{aligned} \mathsf{det\,Jac}(\varphi) \;:=\; \mathsf{det} & \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial g}{\partial v}\,\frac{\partial h}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{\partial g}{\partial u}\,\frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial g}{\partial w}\,\frac{\partial h}{\partial u} - \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{\partial g}{\partial v}\,\frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial g}{\partial w}\,\frac{\partial h}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial g}{\partial u}\,\frac{\partial h}{\partial w}. \end{aligned}$$

Théorème 8.3. *Sous les hypothèses précédentes concernant le $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $\varphi\colon A \xrightarrow{\sim} B$ entre deux compacts élémentaires, ou entre deux réunions finies de compacts élémentaires μ-disjoints, on a :*

$$\mathsf{Volume}(B) \;=\; \iiint_B 1\,dxdydz \;=\; \iiint_A \mathsf{det\,Jac}(\varphi)(u,v,w)\;dudvdw. \qquad \square$$

Théorème 8.4. [Formule de changement de variables dans les intégrales triples] *Soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre deux compacts élémentaires $A \subset \mathbb{R}^3_{u,v,w}$ et $B \subset \mathbb{R}^3_{x,y,z}$:*

$$\begin{aligned} \varphi\colon \qquad & A \xrightarrow{\sim} B \\ (u,v,w) & \longmapsto \big(f(u,v,w),\, g(u,v,w),\, h(u,v,w)\big) \;=:\; (x,y,z), \end{aligned}$$

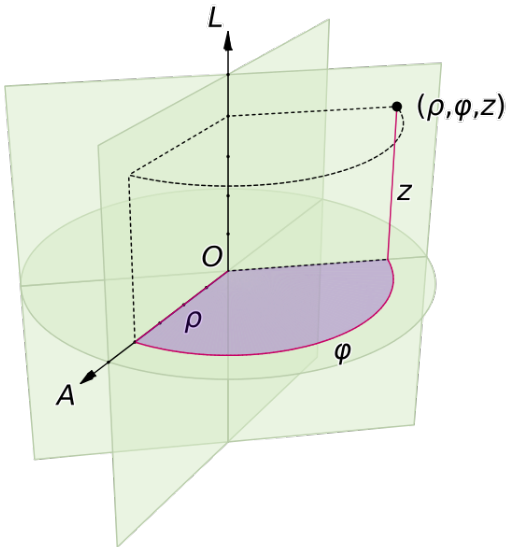
ou plus généralement, entre deux réunions finies de compacts élémentaires μ-disjoints. Alors pour toute fonction continue G sur B, on a :

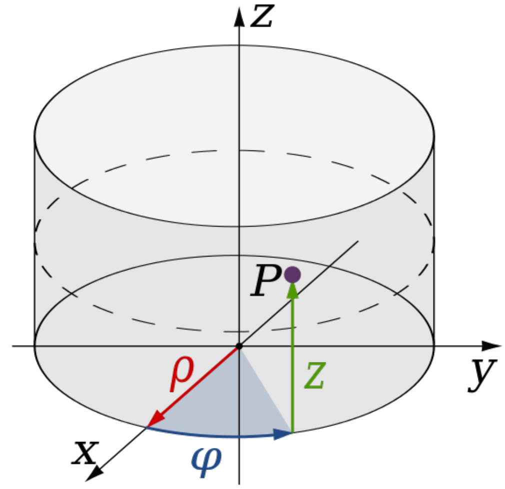
$$\begin{aligned} \iiint_B G(x,y,z)\,dxdydz \;&=\; \iiint_A G\circ\varphi\cdot \mathsf{det\,Jac}(\varphi)(u,v,w)\;dudvdw \\ = \iiint_A G\big(f(u,v,w),\, g(u,v,w),\, h(u,v,w)\big) &\cdot \mathsf{det\,Jac}(\varphi)(u,v,w)\;dudvdw. \qquad \square \end{aligned}$$

9. Intégrales triples en coordonnées cylindriques

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, z) et du repère orthonormé $\{0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, on peut repérer la projection $p' := (x, y)$ d'un point $p = (x, y, z)$ par des coordonnées polaires, sans modifier z :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$





Comme nous le savons, d'un cours à l'autre, les notations peuvent varier, et donc, il faut lire les figures en tenant compte de ce flottement des lettres. Introduisons l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe vertical $0z$:

$$\mathbb{R}^3_{*z} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

En fixant une constante quelconque $\theta_0 \in \mathbb{Z}$, on a, comme pour les coordonnées polaires, qui 'oublient' la coordonnée z, l'énoncé suivant pour les coordonnées cylindriques.

Lemme 9.1. *L'application :*

$$\varphi\colon\quad (r, \theta, z) \longmapsto \big(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z\big)$$

est une bijection continûment différentiable de $\mathbb{R}_+^* \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\times \mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}^3_{*z}$. □

La bijection inverse de φ est donnée en résolvant r et θ en fonction de (x, y) :

$$x^2 + y^2 = \big(r\cos\theta\big)^2 + \big(r\sin\theta\big)^2 = r^2\,\big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big) = r^2,$$

ce qui donne :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

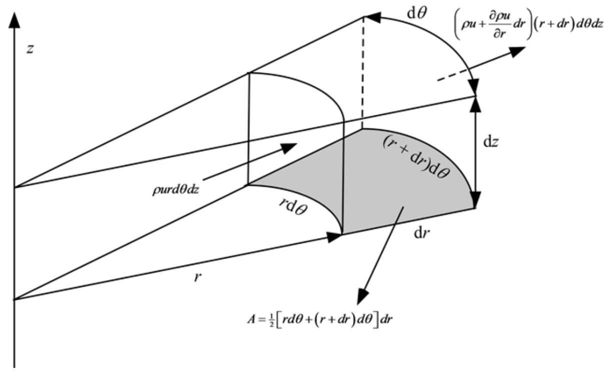
et aussi :

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta,$$

ce qui donne :

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}.$$

Une dernière figure illustre l'élément de volume infinitésimal en coordonnées cylindriques, qui n'est autre que le produit de dz par l'élément infinitésimal $r\,drd\theta$ des coordonnées polaires.



Soit $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un compact quarrable $A \subset \mathbb{R}^3$. Proposons-nous de calculer l'intégrale triple :

$$I \;:=\; \iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz.$$

En d'autres termes, il s'agit de calculer I en passant aux coordonnées cylindriques.

En nous référant au Théorème 6.1, considérons la famille :

$$\big(A_z\big)_{\alpha\leqslant z\leqslant\beta}$$

des sections de A par les plans horizontaux perpendiculaires à $0z$. On obtient :

$$I \;=\; \int_\alpha^\beta dz \iint_{A_z} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Calculons alors l'intégrale double ainsi mise en évidence par le changement de variables :

$$\varphi\colon \qquad \begin{cases} x \;=\; r\cos\theta, \\ y \;=\; r\sin\theta, \\ z \;=\; z. \end{cases}$$

Puisque φ laisse z invariant, on a :

$$\varphi^{-1}\big(A_z\big) \;=\; \varphi^{-1}(A)_z.$$

En passant aux coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2_{x,y}$:

$$dxdy \;=\; r\,drd\theta,$$

nous obtenons :

$$\iint_{A_z} f(x,y,z)\,dxdydz \;=\; \iint_{\varphi^{-1}(A_z)} f\big(r\cos\theta,\; r\sin\theta,\; z\big)\; r\,drd\theta,$$

et par suite pour l'intégrale triple :

$$I \;=\; \int_\alpha^\beta dz \iint_{\varphi^{-1}(A)} f\big(r\cos\theta,\; r\sin\theta,\; z\big)\; r\,drd\theta.$$

Théorème 9.2. *Sur un compact cubable $A \subset \mathbb{R}^3$, soit une fonction continue $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit le passage aux coordonnées cylindriques :*

$$\varphi\colon \qquad \begin{cases} x \,=\, r\cos\theta, \\ y \,=\, r\sin\theta, \\ z \,=\, z. \end{cases}$$

Alors :

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz \;=\; \iiint_{\varphi^{-1}(A)} f\big(r\cos\theta,\; r\sin\theta,\; z\big)\; r\,drd\theta dz. \qquad \square$$

Nous avons déjà donné plus haut des exemples de calcul d'intégrales triples en coordonnées cylindriques.

Il est utile de constater, eu égard au Théorème 8.4 de changement de variables dans les intégrales triples, que le déterminant jacobien de l'application φ vaut :

$$\det \mathrm{Jac}(\varphi) \;=\; \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \;=\; \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; r,$$

ce qui explique :

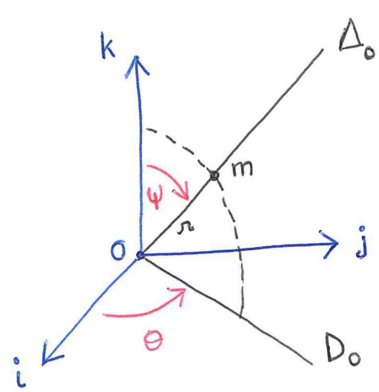
$$dxdydz \;=\; r\,drd\theta dz.$$

10. Intégrales triples en coordonnées sphériques

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, soit un repère orthonormé direct $\{0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, où le vecteur unitaire $\mathbf{i} = (1,0,0)$ dirige l'axe $0x$, puis $\mathbf{j} = (0,1,0)$ dirige l'axe $0y$, et enfin $\mathbf{k} = (0,0,1)$ dirige l'axe $0z$.

Comme pour les coordonnées cylindriques — mais il va y avoir des différences importantes —, considérons l'espace privé de l'axe vertical $0z$:

$$\mathbb{R}^3_{*z} \;:=\; \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\; (x,y) \neq (0,0)\big\}.$$



Alors à tout point $\mathbf{m} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3_{*z}$ correspondent trois quantités réelles.

(1) Un nombre positif $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, et un seul, $r \in \mathbb{R}^*_+$.

(2) Un *demi*-plan unique de bord $0\mathbf{k}$ contenant $\mathbf{m} = (x,y,z)$ qui coupe le plan horizontal $\mathbb{R}^2_{x,y}$ suivant une droite D_0 d'origine 0 unique, et par conséquent, il existe un unique angle

$\theta \in \mathbb{R} \operatorname{mod} 2\pi\mathbb{Z}$ tel que :

$$\mathsf{Angle}\big(\mathbf{i},\ D_0\big) \ \equiv\ \theta \operatorname{mod} 2\pi.$$

(3) Un angle non orienté unique ψ représentant la position du point $\mathbf{m}$ dans ce demi-plan :

$$\mathsf{Angle}\big(0\mathbf{k},\ 0\mathbf{m}\big) \ \equiv\ \psi\ \in]0, \pi[.$$

En résumé, à tout point $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3_{*z}$ correspond un unique triplet $\big(r, \theta, \psi\big)$ appartenant à l'ensemble :

$$\mathbb{R}^*_+ \times \big(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big) \times]0, \pi[.$$

Réciproquement, nous affirmons qu'à tout triplet $\big(r, \theta, \psi\big)$ de cet ensemble produit correspond un point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3_{*z}$ et un seul.

En effet, θ définit un unique demi-plan de bord $0\mathbf{k}$: celui qui contient la demi-droite D_0 du plan $\mathbb{R}^2_{x,y}$ telle que $\mathsf{Angle}\big(\mathbf{i}, D_0\big) \equiv \theta \operatorname{mod} 2\pi$. Ensuite, le nombre ψ définit une demi-droite Δ_0 unique — voir la figure —, incluse dans ce demi-plan (ouvert) et telle que :

$$\mathsf{Angle}\big(0\mathbf{k},\ \Delta_0\big) \ =\ \psi.$$

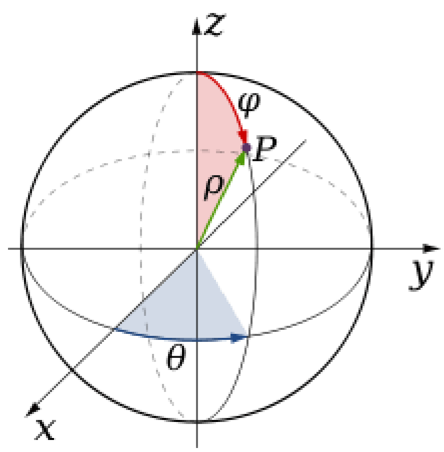
Enfin, il existe un point $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3_{*z}$ et un seul tel que :

$$\mathbf{m}\ \in\ \Delta_0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad ||0\mathbf{m}|| \ =\ r.$$

Nous avons donc démontré le

Lemme 10.1. *L'application* $\mathbf{m} \ \longmapsto\ \big(r, \theta, \psi\big)$ *établit une bijection de l'espace* $\mathbb{R}^3_{*z}$ *privé de l'axe vertical* $0z$ *sur l'ensemble :*

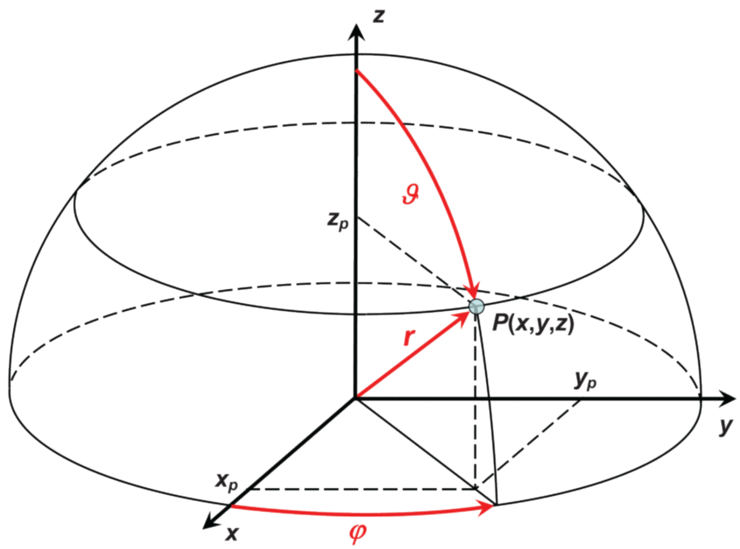
$$\mathbb{R}^*_+ \times \big(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big) \times]0, \pi[. \qquad \square$$



Terminologie 10.2. Le triplet $\big(r, \theta, \psi\big)$ sera appelé *coordonnées sphériques* du point $\mathbf{p} = \big(x, y, z\big) \in \mathbb{R}^3$.

Un examen de la figure convainc que les coordonnées cartésiennes s'expriment en fonction des coordonnées sphériques par les formules fondamentales :

$$\begin{cases} x \ =\ r \sin\psi\ \cos\theta, \\ y \ =\ r \sin\psi\ \sin\theta, \\ z \ =\ r \cos\psi. \end{cases}$$



Inversement, si (x, y, z) est donné avec $(x, y) \neq (0, 0)$, on trouve ses coordonnées sphériques $\big(r, \theta, \psi\big)$ comme suit. Tout d'abord :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}_+^*,$$

ensuite :

$$\cos\psi = \frac{z}{r} \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \psi = \arccos\frac{z}{r},$$

ce qui donne un unique $\psi \in]0, \pi[$, puisque :

$$x^2 + y^2 \neq 0 \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \frac{z}{r} < 1,$$

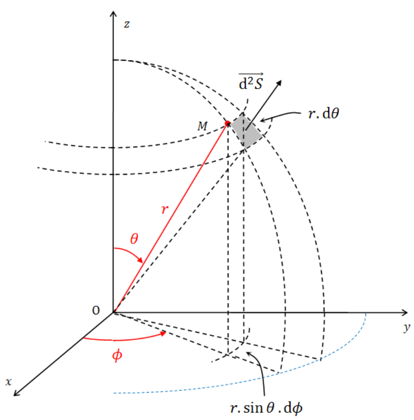
et enfin, les représentations de $x = r \sin\psi \cos\theta$ et de $y = r \sin\psi \sin\theta$ donnent un unique angle $\theta \in \mathbb{R}\big/2\pi\mathbb{Z}$ défini *via :*

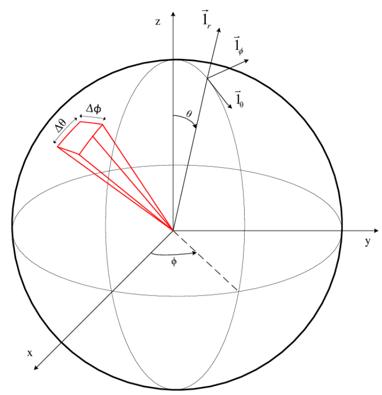
$$\cos\theta = \frac{x}{r\sin\psi} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \sin\theta = \frac{y}{r\sin\psi},$$

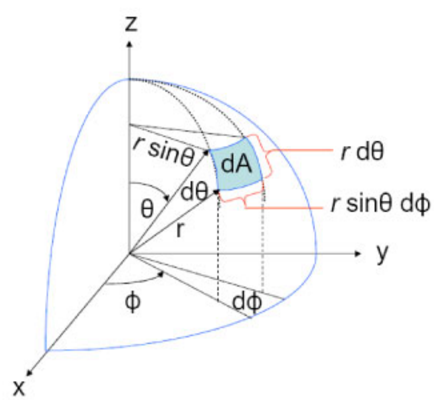
c'est-à-dire :

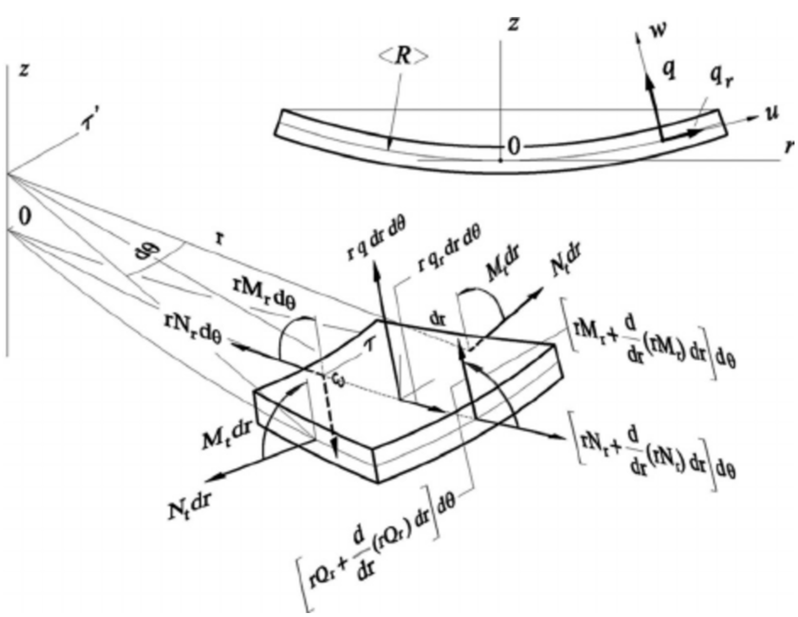
$$\theta = \arctan\frac{y}{x}.$$

Trois figures illustrent l'élément d'aire infinitésimale sur une sphère, suivie d'une figure plus artistique et technique qu'on est invité à contempler.


z
$\overrightarrow{d^2S}$
M
$r.d\theta$
r
θ
O
y
ϕ
x
$r.\sin\theta.d\phi$


z
$\vec{1}_r$
$\vec{1}_\phi$
$\vec{1}_\theta$
$\Delta\theta$
$\Delta\phi$
θ
y
ϕ
x


z
r sinθ
dA
r dθ
r sinθ dϕ
dθ
θ
r
y
ϕ
dϕ
x


z
R
w
q
q_r
u
0
r
τ'
r q dr dθ
$r\,q_r\,dr\,d\theta$
$M_t dr$
$N_t dr$
$rM_r d\theta$
$rN_r d\theta$
dr
$\left[rM_r + \frac{d}{dr}(rM_r)\,dr\right]d\theta$
$\left[rN_r + \frac{d}{dr}(rN_r)\,dr\right]d\theta$
$\left[rQ_r + \frac{d}{dr}(rQ_r)\,dr\right]d\theta$

Soit maintenant f une fonction continue sur un compact cubable $A \subset \mathbb{R}^3$. Proposons-nous de calculer l'intégrale triple :

$$I := \iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz,$$

en coordonnées sphériques, *via* le changement de variables :

$$\varphi\colon \qquad \begin{cases} x \,=\, \rho \sin\psi \cos\theta, \\ x \,=\, \rho \sin\psi \sin\theta, \\ z \,=\, \rho\cos\psi. \end{cases}$$

Une astuce très intersidérale consiste à remarquer que φ est la composée de *deux* transformations cylindriques :

$$\varphi_1\colon \qquad \begin{cases} x \,=\, r\cos\theta, \\ y \,=\, r\sin\theta, \\ z \,=\, z, \end{cases} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \varphi_2\colon \qquad \begin{cases} r \,=\, \rho\sin\psi, \\ z \,=\, \rho\cos\psi, \\ \theta \,=\, \theta, \end{cases}$$

d'où :

$$dxdydz \,=\, r\,drd\theta dz \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad drdzd\theta \,=\, \rho\,d\rho d\psi d\theta,$$

selon le schéma :

$$\big(\rho,\theta,\psi\big) \xrightarrow{\varphi_2} \big(r,\theta,z\big) \xrightarrow{\varphi_1} \big(x,y,z\big),$$
$$\varphi \,=\, \varphi_1\circ\varphi_2.$$

D'après le Théorème 9.2, on a :

$$I \,=\, \iiint_{\varphi_1^{-1}(A)} f\big(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z\big)\ r\,drd\theta dz.$$

En appliquant à nouveau à cette intégrale la même formule du Théorème 9.2, et en remarquant que :

$$\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1^{-1} \,=\, \big(\varphi_1\circ\varphi_2\big)^{-1} \,=\, \varphi^{-1},$$

nous obtenons le

Théorème 10.3. *Sur un compact cubable $A \subset \mathbb{R}^3$, soit une fonction continue $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit le passage aux coordonnées sphériques :*

$$\varphi\colon \qquad \begin{cases} x \,=\, \rho \sin\psi \cos\theta, \\ x \,=\, \rho \sin\psi \sin\theta, \\ z \,=\, \rho\cos\psi. \end{cases}$$

Alors :

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz \,=\, \iiint_{\varphi^{-1}(A)} f\big(r\sin\psi\cos\theta,\ r\sin\psi\sin\theta,\ \rho\cos\theta\big)\ \rho^2\sin\psi\,d\rho d\theta d\psi.$$

$\square$

C'est la formule de changement de variables dans les intégrales triples, en coordonnées sphériques.

Il est utile de constater, eu égard au Théorème 8.4 de changement de variables dans les intégrales triples, que le déterminant jacobien de l'application φ vaut :

$$\begin{aligned}
\mathsf{det\,Jac}(\varphi) &= \mathsf{det}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{pmatrix} \\
&= \mathsf{det}\begin{pmatrix} \sin\psi\cos\theta & -\rho\sin\psi\sin\theta & \rho\cos\psi\cos\theta \\ \sin\psi\sin\theta & \rho\sin\psi\cos\theta & \rho\cos\psi\sin\theta \\ \cos\psi & 0 & -\rho\sin\psi \end{pmatrix} \\
&= \cos\psi \begin{vmatrix} -\rho\sin\psi\sin\theta & \rho\cos\psi\cos\theta \\ \rho\sin\psi\cos\theta & \rho\cos\psi\sin\theta \end{vmatrix} - \rho\sin\psi \begin{vmatrix} \sin\psi\cos\theta & -\rho\sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta & \rho\sin\psi\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= \cos\psi\,\rho^2\sin\psi\cos\psi\big(-\sin^2\theta-\cos^2\theta\big) - \rho\sin\psi\,\rho\sin^2\psi\,\big(\cos^2\theta+\sin^2\theta\big) \\
&= -\rho^2\cos^2\psi\sin\psi - \rho^2\sin\psi\sin^2\psi \\
&= -\rho^2\sin\psi,
\end{aligned}$$

ce qui, en tenant compte du renversement d'orientation, explique :

$$dxdydz = \rho^2\sin\psi\,d\rho d\theta d\psi.$$

Exemple 10.4. Reprenons le calcul de l'intégrale déjà vue :

$$I := \iiint_A z^2\,dxdydz,$$

sur la boule fermée :

$$A: \qquad x^2+y^2+z^2-a^2 \leqslant 0.$$

Utilisons à cette fin les coordonnées sphériques. Remarquons que si A' est déduit de A par suppression de l'intersection de A et de $0z$, alors $\varphi^{-1}(A')$ est le pavé défini par :

$$0 < \rho \leqslant a, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \qquad 0 < \psi < \pi.$$

On est donc ramené au calcul de :

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^4\,d\rho \int_0^\pi \cos^2\psi\sin\psi\,d\psi,$$

c'est-à-dire au produit de 3 intégrales indépendantes :

$$I = 2\pi\,\frac{a^5}{5}\,\frac{2}{3} = \frac{4\,\pi\,a^5}{15}.$$

L'utilisation de coordonnées sphériques a donc permis d'arriver plus rapidement au résultat.

11. Exercices

Exercice 1. EE