Espaces de Hölder $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

> Dans ce chapitre, l'hypothèse d'intégrabilité quadratique sera remplacée par celle de l'intégrabilité de $|f(x)|^{\mathsf{p}}$. L'analyse de ces classes de fonctions jettera une lumière toute particulière sur l'avantage spécial dont bénéficie l'exposant $\mathsf{p} = 2$. F. RIESZ, 1910

Les espaces de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^d$, notamment les espaces L^1, L^2, L^{p}, jouent un rôle central dans de nombreuses questions de l'Analyse Mathématique. L'importance toute particulière des espaces $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ provient du fait qu'ils offrent une généralisation partielle, mais utile, des espaces de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ de fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

Dans l'ordre de simplicité logique, l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ vient en première position, puisqu'il décrit l'espace des fonctions Lebesgue-intégrables. Par dualité, l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions mesurables bornées apparaît naturellement, et ce n'est qu'une généralisation de l'espace $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^d$ munies de la norme du supremum $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)}$.

Mais c'est l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui présente l'intérêt le plus élevé, en tant qu'il plonge les racines de son origine dans l'acte de naissance de la théorie des séries de Fourier sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Les espaces de Hölder $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ de fonctions de puissance p-ème intégrables, avec $1 < \mathsf{p} < \infty$ et $\mathsf{p} \neq 2$, pourraient sembler quelque peu artificiels, mais les résultats structuraux fondamentaux que nous allons démontrer dans ce court chapitre vont nous convaincre du contraire.

1. Espaces L^{p} pour $0 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$

Dans tout ce qui va suivre, en dimension $d \geqslant 1$ quelconque, l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ sera muni de la mesure de Lebesgue, notée $dx = dx_1 \cdots dx_d$, les sous-ensembles dits *mesurables* $E \subset \mathbb{R}^d$ ayant été définis dans un chapitre qui précède.

Définition 1.1. Pour un exposant p satisfaisant :

$$1 \leqslant \mathsf{p} < \infty,$$

l'espace $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ est constitué des fonctions mesurables de puissance p-ème intégrable :

$$L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}\colon\ f \text{ est mesurable et satisfait } \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\, dx < \infty \right\}.$$

Lorsque $\mathsf{p} = 1$, on retrouve bien entendu l'espace, noté dans un chapitre qui précède :

$$L^1(\mathbb{R}^d),$$

des fonctions dites *Lebesgue-intégrables*. Nous avons alors démontré que la quantité :

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|\,dx$$

définit une norme sur l'espace vectoriel $L^1(\mathbb{R}^d)$, *et que* $\big(L^1(\mathbb{R}^d),\, \|\cdot\|_{L^1}\big)$ *est un espace vectoriel normé complet*, pourvu seulement qu'on s'accorde pour dire que deux fonctions sont *égales* lorsqu'elles prennent les mêmes valeurs sauf éventuellement sur un sous-ensemble de mesure nulle.

De même, nous allons établir, lorsque $\mathsf{p} = 2$, que l'espace :

$$L^2(\mathbb{R}^d) := \bigg\{f\colon\, \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}\colon\; f \text{ est mesurable et satisfait } \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|^2\,dx <, \infty\bigg\},$$

est un espace vectoriel normé complet. *Une structure supplémentaire très importante enrichit $L^2(\mathbb{R}^d)$, à savoir la structure d'un espace de Hilbert pour le produit scalaire :*

$$\big\langle f,\, g\big\rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$$

On peut aussi définir les espaces L^{p} pour $\mathsf{p} = \infty$, sans utiliser d'intégrale, mais nous verrons dans la Section **4 que les L^{p} tendent en un certain sens naturel vers L^∞ lorsque $\mathsf{p} \longrightarrow \infty$.**

Définition 1.2. L'espace des $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions *essentiellement bornées* sur $\mathbb{R}^d$ est :

$$L^\infty(\mathbb{R}^d) := \bigg\{f\colon\, \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}\colon\; f \text{ est mesurable et il existe une constante } 0 \leqslant C < \infty$$
$$\text{telle que } \big|f(x)\big| \leqslant C \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\bigg\}.$$

On définit alors la *norme* L^∞ de f :

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} := \inf C,$$

comme étant l'infimum de ces constantes C, lorsqu'il en existe au moins une, et l'on a alors en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\big|f(x)\big| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. En effet, en introduisant l'ensemble :

$$E := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\, |f(x)| > \|f\|_{L^\infty}\big\},$$

et en introduisant, pour $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, les ensembles :

$$E_n := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\, |f(x)| > \|f\|_{L^\infty} + 1/n\big\},$$

on a $m(E_n) = 0$ pour tout n et $E = \cup\, E_n$, d'où $m(E) = 0$. □

Parfois, on appelle $\|f\|_{L^\infty}$ le *supremum essentiel* de f. Il est clair que cette norme généralise la norme du supremum sur les fonctions continues $g\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$\|g\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \big|g(x)\big|.$$

Mais revenons aux « vrais » espaces $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$ de fonctions dont la puissance p-ème est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

Comme dans les cas déjà connus de $L^1(\mathbb{R}^d)$ et de $L^2(\mathbb{R}^d)$, il est naturel de convenir que les fonctions sont définies à un ensemble de mesure nulle près, et donc que l'on a :

$$\big\|f\big\|_{L^{\mathsf{p}}} = 0,$$

lorsque et seulement lorsque $f = 0$ presque partout, où la quantité « *norme* L^{p} » d'une fonction $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ devrait, comme on doit s'y attendre, être naturellement définie par :

$$\big\|f\big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} := \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}},$$

la puissance $\frac{1}{\mathsf{p}}$ garantissant l'homogénéité par dilatation que toute norme doit satisfaire :

$$\big\|\lambda\,f\big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \,=\, |\lambda|\cdot\|f\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \qquad\qquad (\lambda\in\mathbb{C}).$$

Toutefois, cette idée de définir une telle norme ne pourrait avoir de sens que si on parvenait à prouver que $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ jouit d'une structure d'espace vectoriel, et heureusement, les raisonnements qui vont suivre vont nous faire parvenir à un tel résultat.

Lorsque l'exposant p satisfait $0 < \mathsf{p} < 1$, on constate (Exercice 2) qu'une inégalité du triangle ne peut pas être satisfaite, ce qui justifie, pour bénéficier d'une structure naturelle d'espace vectoriel, de se restreindre à supposer $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. Dans cette circonstance, c'est l'*inégalité* dite *de Hölder* généralisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cas $\mathsf{p} = 2$) qui constitue l'outil principal de toute la théorie, et elle servira à démontrer l'*inégalité de Minkowski*, établissant que $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ est bien un espace vectoriel.

2. Inégalités de Hölder et de Minkowski

Soit donc un exposant réel p, et supposons qu'il est éventuellement égal à l'infini :

$$1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty.$$

Définition 2.1. L'*exposant conjugué* de p est l'unique nombre réel p' satisfaisant :

$$\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'} \,=\, 1.$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned}\mathsf{p}' &= \frac{1}{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}\\ &= \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1},\end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$1 < \mathsf{p} < \infty \qquad\Longleftrightarrow\qquad 1 < \mathsf{p}' < \infty.$$

Bien entendu ici, on convient que :

$$\frac{1}{\infty} \,=\, 0 \qquad \text{et que :} \qquad \frac{1}{0} \,=\, \infty,$$

d'où (exercice visuel) :

$$\infty' = 1 \qquad \text{et} \qquad 1' = \infty.$$

Observation 2.2. *L'exposant* $\mathsf{p} = 2$*, et seulement lui, est auto-conjugué :*

$$2 = \mathsf{p} = \mathsf{p}' = 2. \qquad \square$$

Théorème 2.3. [Inégalité de Hölder] *Étant donné un exposant* p *quelconque satisfaisant :*

$$1 < \mathsf{p} < \infty,$$

pour toute paire de fonctions appartenant à des espaces conjugués :

$$f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad g \in L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d),$$

le produit $f\,g$ *appartient à* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *et l'on a l'inégalité :*

$$\big\|f\,g\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \cdot \|g\|_{L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)},$$

à savoir on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\,g(x)\big|\,dx \leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|g(x)\big|^{\mathsf{p}'}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}.$$

L'Exercice 3 propose de caractériser simplement le cas d'égalité ci-dessus.

En particulier, pour $\mathsf{p} = \mathsf{p}' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\big\|f\,\overline{g}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

que l'on a déjà démontrée par d'autres voies.

De plus, pour $\mathsf{p} = \infty$, d'où $\mathsf{p}' = 1$, nous affirmons que l'inégalité est encore valable :

$$\big\|f\,g\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

ce qui est essentiellement évident, puisqu'il suffit de majorer dans l'intégrale la fonction f par son supremum essentiel :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\,g(x)\big|\,dx &\leqslant \operatorname*{supess}_{\mathbb{R}^d} |f| \int_{\mathbb{R}^d} \big|g(x)\big|\,dx \\ &= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Démonstration. Pour ce qui est du cas le plus fréquent $1 < \mathsf{p} < \infty$, commençons par généraliser l'inégalité évidente (exercice !) :

$$t\,s \leqslant \frac{t^2 + s^2}{2},$$

satisfaite par deux nombres réels $t, s \geqslant 0$ quelconques.

Lemme 2.4. *Pour tout exposant* θ *avec* $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, *deux nombres réels* $t, s \geqslant 0$ *quelconques satisfont toujours :*

$$t^\theta\,s^{1-\theta} \leqslant \theta\,t + (1-\theta)\,s.$$

Démonstration. En effet, puisqu'on a gratuitement $0 \leqslant 0$ lorsque $s = t = 0$, on peut supposer que $(s,t) \neq (0,0)$. Ensuite, grâce au fait que l'inégalité à établir est symétrique à travers les échanges simultanés :

$$\theta \longleftrightarrow (1-\theta) \qquad\qquad s \longleftrightarrow t,$$

on peut supposer que $s \neq 0$.

Or puisque l'ensemble des couples $(t,s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ est le même que l'ensemble des couples (ts, s) avec $s \neq 0$, nous sommes ramenés à établir :

$$(ts)^\theta\,s^{1-\theta} \overset{?}{\leqslant} \theta\,ts + (1-\theta)\,s,$$

ce qui, après division par s, et disparition de s, devient :

$$t^\theta \overset{?}{\leqslant} \theta\, t + 1 - \theta.$$

Puisque l'inégalité à établir est évidente pour $\theta = 0, 1$, on peut supposer que $0 < \theta < 1$. On a donc affaire ici à la fonction d'une seule variable $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) \,:=\, t^\theta - \theta\, t - 1 + \theta,$$

partant de la valeur négative $f(0) = -1 + \theta$, dont la fonction dérivée :

$$f'(t) \,=\, \theta\big(t^{\theta-1} - 1\big),$$

est $\geqslant 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, puis $\leqslant 0$ pour $1 \leqslant t < \infty$, ce qui force f à atteindre son maximum au point $t = 1$, où elle vaut :

$$f(1) = 0,$$

et donc f prend toujours des valeurs $\leqslant 0$, ce qui établit l'inégalité désirée. $\square$

Maintenant, nous pouvons raisonner comme suit pour obtenir l'inégalité de Hölder.

Si l'on a soit $\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} = 0$, soit $\|g\|_{L^{\mathsf{p}'}} = 0$, il vient soit $f = 0$ soit $g = 0$ presque partout, et donc dans les deux cas $f\, g = 0$ presque partout, et enfin, l'inégalité de Hölder se réduit à l'inégalité triviale $0 \leqslant 0$.

Nous pouvons donc supposer que :

$$\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \,\neq\, 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \|g\|_{L^{\mathsf{p}'}} \,\neq\, 0.$$

Divisons alors f et g par leurs normes :

$$f \,\longmapsto\, \frac{f}{\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad g \,\longmapsto\, \frac{g}{\|g\|_{L^{\mathsf{p}'}}},$$

afin de nous ramener, dans l'inégalité à établir, au cas où f et g sont toutes deux de norme unité :

$$\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \,=\, 1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \|g\|_{L^{\mathsf{p}'}} \,=\, 1.$$

En un point fixé $x \in \mathbb{R}^d$, appliquons alors le lemme qui précède aux deux nombres réels :

$$t \,:=\, \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad s \,:=\, \big|g(x)\big|^{\mathsf{p}'},$$

avec l'exposant :

$$\theta \,:=\, \frac{1}{\mathsf{p}} \qquad\qquad \text{d'où} \qquad\qquad 1 - \theta \,=\, \frac{1}{\mathsf{p}'},$$

ce qui nous donne :

$$\big|f(x)\, g(x)\big| \,\leqslant\, \frac{1}{\mathsf{p}}\, \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'}\, \big|g(x)\big|^{\mathsf{p}'}.$$

Pour terminer, une simple intégration de cette inégalité apporte sur un plateau doré le jeu d'(in)égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\big\|f\, g\big\|_{L^1} \,&\leqslant\, \frac{1}{\mathsf{p}}\, \big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'}\, \big(\|g\|_{L^{\mathsf{p}'}}\big)^{\mathsf{p}'} \\
&=\, \frac{1}{\mathsf{p}} \cdot 1^{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'} \cdot 1^{\mathsf{p}'} \\
&=\, 1 \\
&=\, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \cdot \|g\|_{L^{\mathsf{p}'}},
\end{aligned}$$

qui conclut les hostilités. □

Nous sommes maintenant prêts pour établir l'inégalité du triangle dans l'espace $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 2.5. [Minkowski] *Étant donné un exposant* p *quelconque satisfaisant :*

$$1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty,$$

pour toute paire de fonctions dans le même espace de Hölder :

$$f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad g \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d),$$

on a :

$$\big\|f+g\big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} + \|g\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. Le cas déjà connu $\mathsf{p} = 1$ s'obtient instantanément en intégrant l'inégalité :

$$\big|f(x)+g(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|.$$

Le cas $\mathsf{p} = \infty$, aisé, est laissé au lecteur en exercice de compréhension.

Maintenant, pour $1 < \mathsf{p} < \infty$, commençons par vérifier que $f+g \in L^{\mathsf{p}}$ lorsque $f, g \in L^{\mathsf{p}}$.

À cet effet, comme en tout point $x \in \mathbb{R}^d$ on a soit :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \big|g(x)\big|, \qquad \text{soit} \qquad \big|g(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big|,$$

on a toujours soit :

$$\big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant 2^{\mathsf{p}}\,\big|g(x)\big|^{\mathsf{p}}, \qquad \text{soit} \qquad \big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant 2^{\mathsf{p}}\,\big|f(x)\big|^{\mathsf{p}},$$

d'où toujours :

$$\big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant 2^{\mathsf{p}}\,\big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} + 2^{\mathsf{p}}\,\big|g(x)\big|^{\mathsf{p}},$$

ce qui démontre bien, en intégrant cette dernière inégalité, que $f+g \in L^{\mathsf{p}}$ avec l'estimation :

$$\Big(\big\|f+g\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \leqslant 2^{\mathsf{p}}\,\big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} + 2^{\mathsf{p}}\,\big(\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}},$$

qui est moins bonne que l'inégalité de Minkowski désirée à cause de la constante $2^{\mathsf{p}} > 1$, donc il reste du travail.

En fait, comme $\mathsf{p} > 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}} &= |f(x)+g(x)|\cdot\big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}-1} \\ &\leqslant |f(x)|\cdot\big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}-1} + |g(x)|\cdot\big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}-1}.\end{aligned}$$

Or si p' est l'exposant conjugué de p :

$$\mathsf{p}' = \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1},$$

qui satisfait donc :

$$(\mathsf{p}-1)\,\mathsf{p}' = \mathsf{p},$$

nous voyons que la fonction $(f+g)^{\mathsf{p}-1}$ qui apparaît deux fois dans l'inégalité ci-dessus appartient à l'espace $L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)$, donc nous pouvons appliquer deux fois l'inégalité de Hölder et chercher ensuite à faire ré-apparaître les normes L^{p} :

$$\begin{aligned}
\big(\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} &\leqslant \big\||f|\cdot|f+g|^{\mathsf{p}-1}\big\|_{L^1} + \big\||g|\cdot|f+g|^{\mathsf{p}-1}\big\|_{L^1} \\
&\leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\big\||f+g|^{\mathsf{p}-1}\big\|_{L^{\mathsf{p}'}} + \|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\big\||f+g|^{\mathsf{p}-1}\big\|_{L^{\mathsf{p}'}} \\
&= \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big(|f+g|^{\mathsf{p}-1}\big)^{\mathsf{p}'}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} + \|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big(|f+g|^{\mathsf{p}-1}\big)^{\mathsf{p}'}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} \\
&= \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}|f+g|^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}} + \|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}|f+g|^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}} \\
&= \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\big(\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}} + \|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\big(\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}}
\end{aligned}$$

ce qui donne en factorisant :

$$\big(\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} \leqslant \big(\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}}\Big\{\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}+\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big\}.$$

Pour terminer, dans l'inégalité de Minkowski à démontrer, on peut bien sûr supposer que $\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}} > 0$ (exercice mental), et donc en simplifiant à gauche et à droite par la bonne puissance de $\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}}$, grâce au fait « miraculeux » (exercice) que :

$$\mathsf{p} - \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'} = 1,$$

on obtient bien l'inégalité de Minkowski :

$$\big(\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}} \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}+\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$ □

3. Complétude de $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$

En adaptant la démonstration que $L^1(\mathbb{R}^d)$ est complet, on démontre plus généralement que tous les espaces $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ sont complets.

> Taking limits is a necessity in many problems, and the L^{p} spaces would be of little use if they were not complete.
> Elias Stein, 2002

Théorème 3.1. [Riesz-Fischer] *Pour $1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $L^{\mathsf{p}}\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}\big)$ muni de la métrique dérivée de sa norme :*

$$d\big(f,g\big) := \bigg(\int_{\mathbb{R}^d}|f-g|^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}},$$

est complet. □

La démonstration dans le cas $\mathsf{p}=\infty$, plus élémentaire que celle des cas $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, est suggérée en exercice (utiliser la Théorie de la mesure).

4. Espaces $L^{\mathsf{p}}(E)$

Naturellement, les espaces L^{p} ont un sens sur les sous-ensembles mesurables quelconques de $\mathbb{R}^d$.

Définition 4.1. Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, pour un exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, l'espace $L^{\mathsf{p}}(E)$ est constitué des fonctions mesurables sur E de puissance p-ème intégrable :

$$L^{\mathsf{p}}(E) := \left\{ f \colon E \longrightarrow \mathbb{C} \colon f \text{ est mesurable et satisfait } \int_E \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} \, dx < \infty \right\}.$$

On peut aussi définir $L^\infty(E)$, en mimant la définition de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Lorsque $m(E) < \infty$ est de mesure (de Lebesgue) finie, les espaces $L^{\mathsf{p}}(E)$ peuvent être comparés entre eux.

Proposition 4.2. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable avec $m(E) < \infty$, pour tout couple d'exposants :*

$$1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \mathsf{q} \leqslant \infty,$$

on a les inclusions inversées :

$$L^1(E) \supset L^{\mathsf{p}}(E) \supset L^{\mathsf{q}}(E) \supset L^\infty(E),$$

et lorsque de plus :

$$1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \mathsf{q} < \infty,$$

on a les inégalités normiques :

$$\frac{1}{m(E)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}} \, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}(E)} \leqslant \frac{1}{m(E)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}} \, \|f\|_{L^{\mathsf{q}}(E)}.$$

Démonstration. Le cas où $\mathsf{q} = \infty$ étant laissé au lecteur-étudiant, nous pouvons alors bien entendu supposer que :

$$1 \leqslant \mathsf{p} < \mathsf{q} < \infty.$$

Si donc une fonction quelconque $f \in L^{\mathsf{q}}(E)$ est donnée, il s'agit de faire voir que cette fonction appartient automatiquement à $L^{\mathsf{p}}(E)$, et pour ce faire, nous devons chercher à majorer :

$$\int_E |f|^{\mathsf{p}} \, dx,$$

sachant que seule l'intégrabilité de la puissance q-ème de f est connue, et alors une *astuce simple et artificielle mais omniprésente dans toute la théorie* consiste à faire apparaître un facteur 1 implicite afin d'appliquer l'inégalité de Hölder :

$$\int_E |f|^{\mathsf{p}} \cdot 1 \, dx \leqslant \left(\int_E \big(|f|^{\mathsf{p}}\big)^{\mathsf{p}_1} \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}_1}} \underbrace{\left(\int_E 1^{\mathsf{p}_1'} \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}_1'}}}_{\substack{\text{quantité finie} \\ \text{puisque } m(E) < \infty}},$$

en choisissant des exposants conjugués :

$$\frac{1}{\mathsf{p}_1} + \frac{1}{\mathsf{p}_1'} = 1,$$

afin que l'exposant de $|f|$ soit justement égal à q :

$$\mathsf{p} \, \mathsf{p}_1 = \mathsf{q},$$

ce qui impose le choix unique :

$$\mathsf{p}_1 := \frac{\mathsf{q}}{\mathsf{p}} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{\mathsf{p'}_1} = 1 - \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}.$$

L'inégalité obtenue devient alors :

$$\begin{aligned}\Big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}(E)}\Big)^{\mathsf{p}} &\leqslant \bigg(\int_E |f|^{\mathsf{q}}\bigg)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}} \cdot \Big(m(E)\Big)^{1-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}} \\ &= \Big(\|f\|_{L^{\mathsf{q}}(E)}\Big)^{\mathsf{p}} \cdot \Big(m(E)\Big)^{1-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}} \\ &< \infty,\end{aligned}$$

ce qui montre tout d'abord bien que $f \in L^{\mathsf{p}}(E)$, et ensuite, après prise de racine p-ème, offre l'inégalité annoncée. □

Toutefois, lorsque la mesure $m(E) = \infty$ de E est infinie, ces inclusions cessent d'être vraies en général, *cf.* l'Exercice 4.

Pour conclure ce bref chapitre, voici un énoncé qui montre que l'espace $L^\infty(E)$ est un cas-limite des espaces $L^{\mathsf{p}}(E)$.

Proposition 4.3. *Sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$, pour toute fonction :*

$$f \in L^\infty(E),$$

d'où par la Proposition 4.2, pour tout $1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$:

$$f \in L^{\mathsf{p}}(E),$$

on a :

$$\|f\|_{L^{\mathsf{p}}(E)} \longrightarrow \|f\|_{L^\infty(E)},$$

lorsque $\mathsf{p} \longrightarrow \infty$.

Démonstration. Si $\|f\|_{L^\infty} = 0$, on a $f = 0$ presque partout, donc $\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} = 0$ pour tout p, et $0 \to 0$ gratuitement. De même, lorsque $m(E) = 0$, il n'y a rien à vérifier.

En supposant donc que $m(E) > 0$ et que $\|f\|_{L^\infty} > 0$, majorons :

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} &= \bigg(\int_E |f(x)|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \\ &\leqslant \bigg(\int_E \big(\|f\|_{L^\infty}\big)^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \\ &\leqslant \|f\|_{L^\infty} \cdot \big(m(E)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}.\end{aligned}$$

Or comme $a^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \longrightarrow 1$ pour tout nombre réel $a > 0$, on déduit :

$$\limsup_{\mathsf{p}\to\infty} \|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \|f\|_{L^\infty}.$$

D'un autre côté, étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on doit avoir d'après la Définition 1.2 du supremum essentiel :

$$m\Big(\big\{x \in E\colon\ |f(x)| \geqslant \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon\big\}\Big) \geqslant \delta > 0,$$

pour un certain $\delta = \delta(\varepsilon)$ strictement positif, d'où (exercice mental) :

$$\int_E |f(x)|^{\mathsf{p}}\,dx \;\geqslant\; \delta\cdot\big(\|f\|_{L^\infty}-\varepsilon\big)^{\mathsf{p}}.$$

Après prise de la racine p-ème de cette inégalité, nous déduisons :

$$\liminf_{\mathsf{p}\to\infty}\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \;\geqslant\; \|f\|_{L^\infty}-\varepsilon,$$

et comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire :

$$\liminf_{\mathsf{p}\to\infty}\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \;\geqslant\; \|f\|_{L^\infty}$$

La comparaison visuelle entre les deux inégalités concernant les limites supérieure et inférieure montre que le résultat tombe du ciel. □

5. Séparabilité de $L^{\mathsf{p}}(E)$

Comme $L^1(\mathbb{R}^d)$, les espaces $L^{\mathsf{p}}(E)$ sont séparables.

Théorème 5.1. *Sur tout ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ et pour tout exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, l'espace $L^{\mathsf{p}}(E)$ des fonctions de puissance p-ème intégrable sur E est séparable :*

$$\exists\,\big(\varphi_n\big)_{n=1}^{\infty}\in L^{\mathsf{p}}(E)\quad \forall\,g\in L^{\mathsf{P}}(E)\quad \forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\mathrm{N}(\varepsilon)\gg 1\quad \big\|g-\varphi_{\mathrm{N}(\varepsilon)}\big\|_{L^{\mathsf{p}}(E)}\;\leqslant\;\varepsilon.$$

Démonstration. Fixons $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. En multipliant les fonctions impliquées par la fonction indicatrice $\mathbf{1}_E$ de E, tout revient à considérer des fonctions $g, \varphi_n \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$, et nous pouvons donc travailler avec $E := \mathbb{R}^d$.

Comme dans la démonstration du fait que $L^1(\mathbb{R}^d)$ est séparable, on regarde la famille des fonctions de la forme $\lambda_{\mathbb{Q}}\cdot\mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}}$, où $\lambda_{\mathbb{Q}}\in\mathbb{Q}+i\,\mathbb{Q}$ est un nombre complexe à composantes rationnelles, et où :

$$R_{\mathbb{Q}} \;=\; \prod_{1\leqslant i\leqslant d}\big[a_{i,\mathbb{Q}},\,b_{i,\mathbb{Q}}\big] \qquad\qquad {\scriptstyle (1\,\leqslant\, i\,\leqslant\, d)},$$

est un rectangle de $\mathbb{R}^d$ à coordonnées rationnelles.

Affirmation 5.2. *Les sommes finies de ce type de fonctions sont denses dans $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soient donc $g \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ quelconque et $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour des grands entiers $\mathrm{K} \gg 1$, tronquons :

$$g_{\mathrm{K}}(x) \;:=\; \begin{cases} g(x) & \text{lorsque } |x|\leqslant \mathrm{K} \text{ et } |g(x)|\leqslant\mathrm{K},\\ 0 & \text{autrement.}\end{cases}$$

Alors comme l'intégrabilité $\int |g|^{\mathsf{p}} < \infty$ garantit que $|g(x)| < \infty$ presque partout, on a la convergence ponctuelle :

$$g_{\mathrm{K}}(x) \underset{\mathrm{K}\to\infty}{\longrightarrow} g(x) \qquad\qquad \text{(pour presque tout } x\in\mathbb{R}^d\text{)}.$$

De plus, par $|g_{\mathrm{K}}| \leqslant |g|$, on a la majoration uniforme :

$$\big|g-g_{\mathrm{K}}\big|^{\mathsf{p}} \;\leqslant\; 2^{\mathsf{p}}\,|g|^{\mathsf{p}},$$

donc le théorème de convergence dominée offre :

$$0 \;=\; \lim_{\mathrm{K}\to\infty}\big\|g-g_{\mathrm{K}}\big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)},$$

et donc, il existe $\mathrm{K}(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\big\| g - g_{\mathrm{K}(\varepsilon)} \big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

En notant de manière abrégée $g_{\mathrm{K}(\varepsilon)} =: h$, on est maintenant ramené à approximer en norme L^{p} une fonction $h \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ qui est de plus *bornée* et à support *bornée*. Or ceci garantit qu'on a de surcroît :

$$h \in L^1(\mathbb{R}^d)!$$

Et donc, le théorème de séparabilité de $L^1(\mathbb{R}^d)$ fournit, pour tout $\varepsilon' > 0$ — qui sera choisi dans un instant —, l'existence d'une fonction-type :

$$\varphi = \sum_{\mathsf{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}},$$

telle que :

$$\big\| h - \varphi \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon'.$$

Or un examen de la construction de cette approximante φ montre qu'on peut aisément supposer que sa taille et son support ne débordent pas trop de celui de h :

- $\big|\varphi(x)\big| \leqslant 2 \sup |h| \leqslant 2\,\mathrm{K}$;
- $\mathrm{supp}\, \varphi \subset \{|x| \leqslant 2\,\mathrm{K}\}$.

Si donc nous choisissons :

$$0 < \varepsilon' \leqslant \frac{1}{(3\,\mathrm{K})^{\mathsf{p}-1}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\mathsf{p}},$$

il vient par une majoration élémentaire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \big| h - \varphi \big|^{\mathsf{p}} &\leqslant \sup_{|x| \leqslant 2\mathrm{K}} |h - \varphi|^{\mathsf{p}-1} \int_{\mathbb{R}^d} |h - \varphi| \\ &\leqslant \big(\mathrm{K} + 2\,\mathrm{K}\big)^{\mathsf{p}-1}\, \varepsilon' \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\mathsf{p}}, \end{aligned}$$

à savoir $\|h - \varphi\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, et enfin $\|g - \varphi\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \|g - h\|_{L^{\mathsf{p}}} + \|h - \varphi\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \varepsilon$. □

Comme dans le cas de $L^1(\mathbb{R}^d)$, on vérifie que cet ensemble *dense* dans $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ de fonctions-type $\sum_{\mathsf{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}}$ est dénombrable, donc peut être organisé en une certaine *suite* $\big(\varphi_n\big)_{n=1}^{\infty}$ telle qu'on l'a notée dans l'énoncé du théorème. □

Pour terminer ce chapitre, une adaptation (exercice) d'un théorème de densité déjà vu dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ des fonctions Lebesgue-intégrables offre un énoncé extrêmement utile au-delà dans de nombreux contextes.

Théorème 5.3. *Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble mesurable, et soit un exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. Dans l'espace $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions mesurables de puissance p-ème intégrable, les trois familles suivantes de fonctions sont denses pour la norme $\| \cdot \|_{L^{\mathsf{p}}(E)}$:*

(i) *les fonctions étagées ;*

(ii) *les fonctions en escalier ;*

(iii) *les fonctions continues à support compact.*

6. Exercices

Exercice 1. Montrer que $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, l'espace des fonctions mesurables bornées presque partout en valeur absolue, n'est pas séparable. Indication: En dimension $d = 1$, utiliser la famille non dénombrable de fonctions :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \cdot \mathbf{1}_{]n, n+1[},$$

où $\lambda_n \in \{0, 1\}$ pour tout n, et en dimension $d \geqslant 2$, imiter cette famille avec des cubes au lieu d'intervalles.

Exercice 2. On considère les espaces $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ pour $0 < \mathsf{p} < \infty$. Montrer que si l'on a :

$$\big|\big| f + g \big|\big|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant ||f||_{L^{\mathsf{p}}} + ||g||_{L^{\mathsf{p}}}$$

pour toutes fonctions $f, g \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$, alors nécessairement $\mathsf{p} \geqslant 1$.

Exercice 3. Si $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)$ avec $\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'} = 1$ ne sont pas toutes deux nulles presque partout, montrer qu'on a égalité dans l'inégalité de Hölder du Théorème 2.3 :

$$\big|\big| f\, g \big|\big|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = ||f||_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)}\, ||g||_{L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)},$$

si et seulement s'il existe deux constantes réelles $a > 0$ et $b > 0$ telles que :

$$a\,\big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} = b\,\big|g(x)\big|^{\mathsf{p}'} \qquad \text{(presque partout)}.$$

Indication: Examiner l'inégalité $\big|f(x)g(x)\big| \leqslant \frac{1}{\mathsf{p}}\,|f(x)|^{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'}\,|g(x)|^{\mathsf{p}'}$ dans la démonstration du Théorème 2.3.

Exercice 4. Sur $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue, on considère l'espace $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$. Soit la première fonction :

$$f_0(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^\alpha} & \text{lorsque } |x| < 1 \\ 0 & \text{lorsque } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

et soit la deuxième fonction :

$$f_\infty(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } |x| < 1 \\ \dfrac{1}{|x|^\alpha} & \text{lorsque } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

(a) Montrer que $f_0 \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $p\,\alpha < d$.

(b) Montrer que $f_\infty \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $d < p\,\alpha$.

(c) Qu'arrive-t-il si on considère la première fonction modifiée :

$$f_0(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^\alpha \log\left(\frac{2}{|x|}\right)} & \text{lorsque } |x| < 1 \\ 0 & \text{lorsque } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

et si on considère la deuxième fonction modifiée :

$$f_\infty(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } |x| < 1 \\ \dfrac{1}{|x|^\alpha \log\big(2\,|x|\big)} & \text{lorsque } |x| \geqslant 1\,? \end{cases}$$

Exercice 5. Soient $f, g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables, avec $|g|^3$ intégrable. On introduit, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$F(t) := \int_0^\infty \frac{\arctan\big(t\, f(x)\big)}{(1+x)^{\frac{3}{4}}}\, g(x)\, dx.$$

(a) Montrer que F est à valeurs finies continue sur $\mathbb{R}$. Indication: Penser à utiliser l'inégalité de Hölder.

(b) Montrer que $\lim_{t \to \infty} F(t)$ existe, et en déterminer une expression.

(c) Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Exercice 6. Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable de carré intégrable, *i.e.* $f \in L^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

(a) Montrer, pour tout $n \geqslant 1$, l'inégalité :

$$\int_0^1 x^n \left|f(x)\right| dx \,\leqslant\, \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\, \|f\|_{L^2}.$$

(b) Montrer la finitude de :

$$\int_0^1 \bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \left|f(x)\right|\bigg)\, dx \,<\, \infty.$$

(c) En déduire la formule :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n}\, f(x)\, dx \,=\, \int_0^1 f(x) \log\Big(\frac{1}{1-x}\Big)\, dx.$$

Exercice 7. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive mesurable. Pour $\lambda \geqslant 0$ réel, on regarde les ensembles de sur-niveau de f :

$$E_\lambda \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}\colon\, f(x) > \lambda\big\}.$$

(a) Vérifier que ces E_λ sont mesurables.

(b) Montrer que l'application $\lambda \longmapsto m(E_\lambda)$ est mesurable.

(c) Soit un exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. Établir la formule :

$$\int_{\mathbb{R}} \big(f(x)\big)^{\mathsf{p}}\, dx \,=\, \mathsf{p} \int_0^{\infty} \lambda^{\mathsf{p}-1}\, m\big(E_\lambda\big)\, d\lambda.$$

Exercice 8. Soit une fonction $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ pour un certain exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on introduit :

$$F(x) \,:=\, \int_x^{x+1} f(t)\, dt.$$

(a) Montrer que F prend des valeurs finies, et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{\mathrm{M}\to\infty} \int_{-\infty}^{-\mathrm{M}} \big|f(t)\big|^{\mathsf{p}}\, dt \,=\, \lim_{\mathrm{M}\to\infty} \int_{\mathrm{M}}^{\infty} \big|f(t)\big|^{\mathsf{p}}\, dt.$$

(c) En déduire que :

$$0 \,=\, \lim_{|x|\to\infty} F(x).$$

Exercice 9. Soient trois paramètres réels $0 < \kappa < 1$, $\beta > 1$, $\alpha < \beta$, et soient les deux suites de fonctions $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ définies par :

$$f_n(x) \,:=\, \frac{n^\alpha}{(n+|x|)^\beta} \qquad \text{et} \qquad g_n(x) \,:=\, \frac{n^\kappa}{e^{n|x|}}.$$

(a) Montrer que $f_n \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$ pour tout exposant $1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$, et calculer $\|f_n\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})}$.

(b) Étudier le comportement de la suite $\big(\|f_n\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)_{n=1}^{\infty}$ suivant les valeurs de p.

(c) Montrer que $g_n \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$ pour tout exposant $1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$, et calculer $\|g_n\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})}$.

(d) Étudier le comportement de la suite $\big(\|g_n\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)_{n=1}^{\infty}$ suivant les valeurs de p.

(e) Déduire de ce qui précède que pour toute paire d'exposants distincts :

$$1 \,\leqslant\, \mathsf{p} \,<\, \mathsf{q} \,\leqslant\, \infty,$$

les deux topologies induites sur :

$$L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}) \cap L^{\mathsf{q}}(\mathbb{R})$$

par les deux normes $\|\cdot\|_{L^{\mathsf{p}}}$ et $\|\cdot\|_{L^{\mathsf{q}}}$ ne sont pas comparables.

(f) On note $\ell_{\mathbb{C}}^{\mathsf{p}}$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de nombres complexes $x_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{\mathsf{p}} < \infty$. Toujours pour $1 \leqslant \mathsf{p} < \mathsf{q} \leqslant \infty$, comparer $\ell_{\mathbb{C}}^{\mathsf{p}}$ et $\ell_{\mathbb{C}}^{\mathsf{q}}$.