Convolution et régularisation

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Rappels sur les espaces $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$

Dans tout ce chapitre, nous travaillerons en dimension finie $d \geqslant 1$ sur $\mathbb{R}^d$ avec des fonctions $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ à valeurs complexes. Bien entendu, la mesure de référence est la mesure de Lebesgue :

$$dx = dx_1 \cdots dx_d.$$

Pour un exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, soit l'espace des fonctions de puissance p-ème intégrable :

$$L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables telles que } \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^{\mathsf{p}}\, dx < \infty \Big\},$$

ces fonctions mesurables étant considérées à un ensemble de mesure nulle près, comme l'exige la théorie de l'intégration.

Lorsque $\mathsf{p} = \infty$, l'espace $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ devient l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions mesurables $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que la quantité suivante :

$$\begin{aligned} \big\| f \big\|_{L^\infty} &:= \inf \big\{ M > 0 \text{ tel que } 0 = \mathsf{mesure}\big(\{x \in \mathbb{R}^d \colon |f(x)| \geqslant M\}\big) \big\} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

est *finie*, quantité dont on démontre alors qu'elle constitue une *norme* sur $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Mais la plupart du temps, nous exclurons l'étude du cas $\mathsf{p} = \infty$, car L^∞ n'est pas un véritable espace de fonctions intégrables.

En supposant donc $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, effectuons alors quelques rappels de résultats fondamentaux d'un cours d'intégration, sous forme de théorèmes énoncés sans démonstrations, résultats qui sont tout aussi valables en remplaçant $\mathbb{R}^d$ par un sous-ensemble mesurable quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$.

Définition 1.1. Deux nombres réels p et p' appartenant à l'intervalle ouvert $]1, \infty[$ sont dits *conjugués* lorsque :

$$\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'} = 1.$$

Par extension, on dit aussi que 1 et ∞ sont conjugués.

L'inégalité suivante dite « *de Hölder* » généralise la classique et basique *inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, g(x)\, dx \right| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.2}$$

valable pour tout couple de fonctions f et g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, sachant que $2' = 2$ puisque $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Théorème 1.3. [Inégalité de Hölder] *Pour toute paire d'exposants conjugués* p, p' *avec* $1 < \mathsf{p}, \mathsf{p}' < \infty$ *et toute paire de fonctions mesurables* $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ *et* $g \in L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)$*, le produit* $f(x)\, g(x)$ *appartient à* $L^1(\mathbb{R}^d)$*, et sa norme* L^1 *est contrôlée par le produit simple et nu des normes* L^{p} *et* $L^{\mathsf{p}'}$ *de* f *et de* g *:*

$$\|f\, g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\, \|g\|_{L^{\mathsf{p}'}},$$

à savoir en d'autres termes plus explicites mais complètement équivalents :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, g(x)\, dx \right| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^{\mathsf{p}}\, dx \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^{\mathsf{p}'}\, dx \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}. \tag{1.4}$$

De cette inégalité, on déduit que $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ constitue un vrai espace vectoriel normé.

Théorème 1.5. [Inégalité de Minkowski] *Pour tout exposant* $\mathsf{p} \in [1, \infty[$ *et toute paire de fonctions mesurables* f, g *sur* $\mathbb{R}^d$ *telles que* $f(x)^{\mathsf{p}}$ *et* $g(x)^{\mathsf{p}}$ *soient intégrables,* i.e. *appartiennent à* $L^1(\mathbb{R}^d)$*, on a :*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x) + g(x)\big|^{\mathsf{p}}\, dx \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\, dx \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \big|g(x)\big|^{\mathsf{p}}\, dx \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}. \tag{1.6}$$

Grâce à cette inégalité triangulaire, la quantité :

$$\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\, dx \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}$$

constitue bien une *norme* sur l'espace $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$. Voici maintenant un résultat beaucoup plus profond.

Théorème 1.7. *Pour* $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$*, l'espace vectoriel normé* $\big(L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d),\, \|\cdot\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)$ *est complet et séparable.* □

Pour la distance $\operatorname{dist}(f, g) := \|f - g\|_{L^{\mathsf{p}}}$ issue de la norme, rappelons que la *complétude* signifie la convergence dans l'espace ambiant de toute suite de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall\, (f_n)_{n=1}^{\infty} \text{ satisfaisant } \Big(\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1 \quad \forall\, n_2 \geqslant n_1 \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \quad \big\|f_{n_2} - f_{n_1}\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \varepsilon\Big) \\ \exists\, f_\infty \in L^{\mathsf{p}} \text{ appartenant à l'espace en question avec } 0 = \lim_{n \to \infty} \big\|f_n - f_\infty\big\|_{L^{\mathsf{p}}}, \end{cases}$$

et que la *séparabilité* signifie l'existence d'une suite dénombrable dense :

$$\exists\, (h_n)_{n=1}^{\infty} \in L^{\mathsf{p}} \quad \forall\, g \in L^{\mathsf{p}} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n(\varepsilon) \quad \big\|g - h_{n(\varepsilon)}\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \varepsilon.$$

Un autre autre résultat utile se révèle incidemment lorsqu'on examine la démonstration de la complétude de $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 1.8. *Étant donné une suite quelconque de fonctions $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ appartenant toutes à $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ qui convergent en norme L^{p} vers une certaine fonction $f_\infty \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$:*

$$0 \,=\, \big\| f_n - f_\infty \big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)},$$

il existe au moins une sous-suite $\big(f_{n_k}\big)_{k=1}^{\infty}$ qui converge ponctuellement presque partout :

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \,=\, f_\infty(x) \qquad\qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)}. \qquad \square$$

Enfin, le résultat classique suivant de densité va s'avérer être l'outil le plus utile pour tout ce chapitre.

Théorème 1.9. *L'espace $\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est dense dans $\big(L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d),\, \|\cdot\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)$:*

$$\forall\, f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, g \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d) \quad \big\| f - g \big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

2. Translations dans $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$

Définition 2.1. Soit $a \in \mathbb{R}^d$ un vecteur constant et soit $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$. On appelle *translatée de f par a*, et on note $\tau_a f$, la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par :

$$\big(\tau_a f\big)(x) := f(x-a).$$

Théorème 2.2. *Si deux fonctions mesurables f et g vérifient $f(x) = g(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, et si $a \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur constant, alors $\tau_a f(x) = \tau_a g(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ aussi. On peut donc définir, pour tout $\mathsf{p} \in [1, +\infty]$, l'application quotient τ_a sur l'espace $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ par la formule ci-dessus $\tau_a f(x) := f(x-a)$. De plus, τ_a est une isométrie linéaire de $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même pour tout $\mathsf{p} \in [1, +\infty]$:*

$$\big\|\tau_a f\big\|_{L^{\mathsf{p}}} = \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

Enfin, pour tout $\mathsf{p} \in [1, +\infty[$, à l'exclusion de $\mathsf{p} = +\infty$, et pour toute fonction $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$0 = \lim_{a\to 0} \big\|\tau_a f - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}}. \tag{2.3}$$

Démonstration. On a tout simplement :

$$\begin{aligned}\big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ \tau_a f(x) \neq \tau_a g(x)\big\} &= \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ f(x-a) \neq g(x-a)\big\} \\ &= a + \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ f(x) \neq g(x)\big\},\end{aligned}$$

donc grâce à l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue, si le second ensemble est de mesure nulle, le premier l'est aussi. C'est pourquoi l'on peut définir τ_a sur $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$.

Ensuite, si $1 \leqslant \mathsf{p} < +\infty$, l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue est encore utilisée pour vérifier la conservation de la norme L^{p} (poser $y := x - a$, d'où $dy_1 \cdots dy_d = dx_1 \cdots dx_d$) :

$$\big(\|\tau_a f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-a)|^{\mathsf{p}}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^{\mathsf{p}}\, dy = \big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}}.$$

Le cas $\mathsf{p} = +\infty$ se traite séparément en notant que :

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \qquad \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ |\tau_a f(x)| > u\big\} = a + \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ |f(x)| > u\big\}.$$

L'invariance de la mesure de Lebesgue par translation (à nouveau elle !) entraîne alors la conservation de la norme L^∞ à travers τ_a :

$$\begin{aligned}\big\|f\big\|_{L^\infty} &:= \inf\big\{M > 0 \text{ tel que } \mathsf{mesure}\big(\{x \in \mathbb{R}^d \colon |f(x)| > M\}\big) = 0\big\} \\ &= \|\tau_a f\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Soit maintenant $\mathsf{p} \in [1, +\infty[$, à l'exclusion de $\mathsf{p} = +\infty$. Pour démontrer la continuité de la norme L^p par rapport aux (petites) translations, à savoir pour établir (2.3) ci-dessus, nous commencerons par supposer que $f \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$ est continue à support compact, avant de vérifier qu'il suffit d'utiliser la densité de $\mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^\mathsf{p}(\mathbb{R}^d)$ pour conclure. La densité : souvenons-nous en !

Si donc f est continue à support compact, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ tout entier, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$|a| \leqslant \eta \Longrightarrow \Big(\forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ \ \big|f(x-a) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Par suite, dès que l'on suppose $|a| \leqslant \eta$, on peut estimer la puissance p-ème de la norme L^p de la différence entre $\tau_a f$ et f comme suit, en restreignant « bêtement » l'intégration à l'ensemble où ni f ni $\tau_a f$ ne s'annulent :

$$\begin{aligned}\big(\big\|\tau_a f - f\big\|_{L^\mathsf{p}}\big)^\mathsf{p} &= \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x-a) - f(x)\big|^\mathsf{p}\, dx \\ &= \int_{(a+\{f\neq 0\})\cup\{f\neq 0\}} \big|f(x-a) - f(x)\big|^\mathsf{p}\, dx \\ &\leqslant \big(\mathsf{mesure}(a + \{f \neq 0\}) + \mathsf{mesure}(\{f \neq 0\})\big)\,\varepsilon^\mathsf{p} \\ &\leqslant \underbrace{2\,\mathsf{mesure}\big(\{f \neq 0\}\big)}_{\mathsf{constante}<\infty}\,\varepsilon^\mathsf{p}.\end{aligned}$$

Or la mesure (de Lebesgue) de la fermeture de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ en lesquels $f(x) \neq 0$ est évidemment finie, puisque cet ensemble est, disons, contenu dans une certaine boule fermée $\overline{B}(0, R)$ de rayon $R \gg 1$ assez grand. Comme tout terme :

$$\mathsf{constante} \cdot \varepsilon^\mathsf{p}$$

tend vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$, ceci montre, comme voulu et comme désiré, que :

$$0 = \lim_{a\to 0} \big\|\tau_a f - f\big\|_{L^\mathsf{p}},$$

pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$.

Supposons maintenant en toute généralité que $f \in L^\mathsf{p}(\mathbb{R}^d)$. D'après le résultat de densité rappelé et admis ci-dessus, il existe une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions $f_n \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$ telles que :

$$\big\|f_n - f\big\|_{L^\mathsf{p}} \longrightarrow 0 \quad \text{ lorsque } \ n \to \infty.$$

Or on peut estimer la norme L^p de la différence entre $\tau_a f$ et f en y insérant les quatre termes $-\tau_a f_n + \tau_a f_n - f_n + f_n$ qui s'additionnent à 0, et en appliquant ensuite l'inégalité triangulaire (Minkowski !) à trois membres, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\big\|\tau_a f - f\big\|_{L^\mathsf{p}} &\leqslant \big\|\tau_a f - \tau_a f_n\big\|_{L^\mathsf{p}} + \big\|\tau_a f_n - f_n\big\|_{L^\mathsf{p}} + \|f_n - f\|_{L^\mathsf{p}} \\ &= 2\,\|f_n - f\|_{L^\mathsf{p}} + \big\|\tau_a f_n - f_n\big\|_{L^\mathsf{p}}.\end{aligned}$$

Si maintenant $\varepsilon > 0$ est un nombre réel arbitrairement petit, il existe un entier N_ε tel que :

$$\|f_{N_\varepsilon} - f\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Mais puisque cette fonction f_{N_ε} est continue à support compact, la première partie de la démonstration assure qu'il existe un η_ε suffisamment petit pour que :

$$|a| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow \big\|\tau_a f_{N_\varepsilon} - f_{N_\varepsilon}\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Enfin, si l'on pose $n := N_\varepsilon$ dans le jeu d'inégalités triangulaires effectué à l'instant, on obtient qu'avec le même η_ε :

$$|a| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow \big\|\tau_a f - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant 2\,\tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui achève notre première démonstration basée sur un argument de densité — Dieu sait qu'il y en aura d'autres ! □

3. Produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Définition 3.1. On dit que deux fonctions mesurables f et g de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont *convolables* si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction :

$$t \longmapsto f(x-t)\,g(t)$$

est intégrable, *i.e.* appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$. Lorsque c'est le cas, on définit alors le *produit de convolution* (ou la *convolée*) de f et de g par :

$$(f*g)\,(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\,g(t)\,dt.$$

Le changement de variable $x \longmapsto x-t$ montre alors que g et f sont convolables dès lors que f est g le sont, avec en bonus la *commutativité* (exercice impératif : vérifier cela !) :

$$f*g = g*f,$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\,g(t)\,dt \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} g(x-t)\,f(t)\,dt.$$

Évidemment, si f est convolable avec deux fonctions g_1 et g_2, alors pour toutes constantes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, la convolée de f avec $\lambda_1\,g_1 + \lambda_2\,g_2$ existe et l'on a la *linéarité* par rapport au second facteur :

$$f*(\lambda_1\,g_1 + \lambda_2\,g_2) = \lambda_1\,f*g_1 + \lambda_2\,f*g_2,$$

d'où il découle aussi, grâce à la commutativité, que le produit de convolution $*$ est en fait bilinéaire par rapport à chacun de ses facteurs gauche ou droite.

Cette définition du produit de convolution, qui est possible « si la fonction $t \mapsto f(x-t)\,g(t)$ est intégrable », procède par abstraction d'une condition de définissabilité minimale. Lorsque les fonctions appartiennent à des espaces fonctionnels raisonnablement réguliers, par exemple l'espace des fonctions continues à support compact ou $\mathscr{C}^1$ à support compact, on vérifie grâce au théorème de Fubini et grâce à des changements de variables élémentaires — exercice impératif : vérifier cela ! — que le produit de convolution est de plus *associatif* :

$$f*(g*h) = (f*g)*h.$$

Toutefois, avec la définition minimale énoncée ci-dessus, quelques « pathologies » (à oublier rapidement ...) peuvent se produire, comme le montre l'Exercice 4 ci-dessous. En tout cas, lorsqu'on suppose que les fonctions appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^d)$, tout se passe très bien comme le montre le premier théorème fondamental suivant.

Théorème 3.2. *Soient deux fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction :*

$$\mathbb{R}^d \ni t \longmapsto f(t)\, g(x-t) \in \mathbb{C}$$

est intégrable, i.e. *elle appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$, donc la convolution de f et de g a un sens, et, de plus, cette convolée :*

$$\begin{aligned} f * g\,(x) \;&=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\, g(t)\, dt \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\, g(x-t)\, dt \end{aligned}$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$ avec un contrôle de sa norme L^1 par le produit nu et simple des normes L^1 de f et L^1 de g :

$$\|f * g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}.$$

Démonstration. Nous traiterons le cas $d = 1$, les arguments pour d quelconque ne demandant qu'une adaptation mineure quant au formalisme des signes d'intégration.

Commençons par observer que l'intégrale double, étendue à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tout entier, du produit des deux fonctions positives $|f(x-t)|$ et $|g(t)|$ est finie :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\, |g(t)|\, dt\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt\, |f(x-t)|\, dx \\ \text{[poser } y := x-t\text{]} \qquad\qquad &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\, dy \\ &= \|g\|_{L^1}\, \|f\|_{L^1} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

majorée par le produit des normes L^1 de g et de f. Grâce au théorème de Fubini-Tonelli ceci entraîne que pour presque toute « tranche unidimensionnelle horizontale » $\{x = \mathsf{constante}\}$, la restriction de la fonction de deux variables :

$$(t, x) \;\longmapsto\; f(x-t)\, g(t)$$

à ladite tranche, à savoir l'application d'*une* variable :

$$t \longmapsto f(x-t)\, g(t)$$

est (de valeur absolue) intégrable sur $\mathbb{R}$ par rapport à dt. Aussi l'intégrale qui définit la convolution entre f et g existe-t-elle bien pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Ensuite, l'inégalité triangulaire évidente entre intégrales :

$$|f * g\,(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\, |g(t)|\, dt,$$

intégrée par rapport à dx sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \big\|f * g\big\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} |f * g\,(x)|\, dx \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\, |g(t)|\, dt\, dx \\ &= \|g\|_{L^1}\, \|f\|_{L^1}, \end{aligned}$$

permet d'obtenir, grâce à une répétition du calcul qui précède, l'inégalité annoncée sur les normes L^1. Ceci achève la simple et belle démonstration de notre tout premier résultat sur l'opération de convolution. $\square$

4. Produit de convolution et support

La notion de support joue un rôle important dans la théorie des opérateurs de convolution. Lorsqu'une fonction est continue, son *support* est tout simplement l'adhérence de l'ouvert constitué des points en lesquels elle prend des valeurs non nulles :

$$\text{si } f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d): \qquad \mathsf{supp}\, f = \overline{\big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ f(x) \neq 0\big\}}.$$

L'idée sous-jacente, c'est qu'un point est dans le support d'une fonction si la fonction n'est pas nulle en ce point, où à la rigueur, s'il existe d'autres points arbitrairement proches en lesquels la fonction est non nulle, et cette idée est tout à fait adéquate lorsque la fonction est continue.

Cependant, on sait bien que la théorie des fonctions mesurables, des fonctions L^1 au sens de Lebesgue, des fonctions L^{p}, n'a un sens qu'à un ensemble de mesure nulle près, et la définition du support valable pour les fonctions continues ne peut alors plus avoir de sens cohérent. Par exemple, la fonction indicatrice de l'ensemble des nombres rationnels dans $\mathbb{R}$, à savoir :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \;\text{ si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 \;\text{ si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

a la propriété évidente que la fermeture de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas remplit $\mathbb{R}$ tout entier :

$$\overline{\big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) \neq 0\big\}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R},$$

bien que cette fonction indicatrice soit nulle *presque partout*, puisque l'ensemble des nombres rationnels est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$. Il est clair qu'au sens de la mesure, cette fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ doit être considérée comme s'identifiant à la fonction identiquement nulle, et par conséquent, on ne peut pas définir la notion de support pour les fonctions mesurables ou intégrables en calquant la définition naturelle qui était valable pour les fonctions $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$ ou $\mathscr{C}^\infty$.

La solution à toutes ces errances dialectiques n'est pourtant pas difficile. Il suffit de raisonner par passage au complémentaire, comme le dévoile très précisément la Proposition-Définition suivante.

Proposition 4.1. [Définition du support des fonctions définies à un ensemble de mesure nulle près] *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soit f une fonction mesurable définie dans Ω et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On considère la famille $(\omega_i)_{i \in \mathscr{I}}$ de tous les* ouverts *$\omega_i \subset \Omega$ tels que, pour chaque $i \in \mathscr{I}$, on ait :*

$$f(x) = 0 \qquad \textit{pour presque tout } \; x \in \omega_i,$$

et on introduit leur réunion ensembliste complète :

$$\omega := \bigcup_{i \in \mathscr{I}} \omega_i,$$

qui est bien sûr un sous-ensemble ouvert *de Ω. Alors (proposition) on a de même :*

$$f(x) = 0 \qquad \textit{pour presque tout } \; x \in \omega$$

et (définition) on définit le support de f :

$$\mathsf{supp}\, f := \Omega \setminus \omega$$

comme étant le complémentaire*, dans l'ouvert ambient Ω, de ce plus gros ouvert ω sur lequel f s'annule identiquement (à un ensemble de mesure nulle près).*

Démonstration. Par définition des ω_i, il existe, pour chaque $i \in \mathscr{I}$, un ensemble négligeable $\mathscr{N}_i \subset \omega_i$ en dehors duquel f ne prend que des valeurs exactement nulles :

$$\forall\, x \in \omega_i \setminus \mathscr{N}_i, \qquad f(x) = 0.$$

Le « hic » ici, c'est que la famille des ω_i n'a aucune raison, en général, d'être dénombrable, et donc, qu'on ne peut pas conclure directement : la réunion des $\mathscr{N}_i$ est de mesure nulle elle aussi (en appliquant l'énoncé bien connu que toute réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est elle aussi de mesure nulle).

Heureusement, on va pouvoir se ramener au cas dénombrable par le procédé suivant, dit d'*exhaustion*, qui est classique en Analyse. Considérons à cet effet, pour tout $n \geqslant 1$, l'ensemble :

$$K_n := \big\{x \in \omega \colon \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \omega) \geqslant \tfrac{1}{n}\big\} \cap \overline{B}(0, n)$$

constitué de tous les points du gros ouvert ω qui sont :

- situés à une distance $\geqslant \frac{1}{n}$ de l'extérieur $\mathbb{R}^d \setminus \omega$, à savoir enceints à l'intérieur de ω par une bande de sécurité d'épaisseur $\frac{1}{n}$;
- contenus dans une (grosse) boule fermée de rayon n, pour que tout soit compact.

Alors il est intuitivement suggestif que ces compacts K_n forment une famille dénombrable et que, lorsque n se rapproche de $+\infty$, les K_n « remplissent » de plus en plus ω tout entier. En effet, le lecteur est invité à vérifier rigoureusement que :

$$K_n \subset K_{n+1} \qquad \text{et que :} \qquad \omega = \bigcup_{n \geqslant 1} K_n.$$

En particulier, on a pour tout $n \geqslant 1$ fixé :

$$K_n \subset \bigcup_{i \in \mathscr{I}} \omega_i.$$

Par compacité de K_n, on peut alors, pour tout $n \geqslant 1$ fixé, extraire de $\mathscr{I}$ un sous-ensemble fini $\mathscr{I}_n$ tel que :

$$K_n \subset \bigcup_{i \in \mathscr{I}_n} \omega_i.$$

Parce que toute réunion dénombrable d'ensemble finis est elle-même dénombrable, l'ensemble $\mathscr{J} := \cup_{n \geqslant 1} \mathscr{I}_n$ est dénombrable et l'on voit ainsi :

$$\omega = \bigcup_{n \geqslant 1} K_n \subset \bigcup_{n \geqslant 1} \bigcup_{i \in \mathscr{I}_n} \omega_i = \bigcup_{i \in \mathscr{J}} \omega_i$$

que l'ensemble $\omega = \cup_{i \in \mathscr{J}} \omega_i$ (puisque l'inclusion inverse $\cup_{i \in \mathscr{J}} \omega_i \subset \omega$ est trivialement satisfaite) est réalisé comme réunion maintenant *dénombrable* d'ouverts ω_i. Comme par hypothèse $f(x) = 0$ pour tout $x \in \omega_i \setminus \mathscr{N}_i$ hors de l'ensemble de mesure nulle $\mathscr{N}_i$, et comme la réunion *dénombrable* :

$$\mathscr{N} := \bigcup_{i \in \mathscr{J}} \mathscr{N}_i$$

des ensembles de mesure nulle $\mathscr{N}_i$ lorsque l'indice i parcourt $\mathscr{J}$ est encore de mesure nulle, nous en déduisons que :

$$f(x) = 0 \quad \text{pour tout } \ x \in \omega \setminus \mathscr{N}$$

en dehors de cet ensemble $\mathscr{N}$. Ceci achève de démontrer que $f = 0$ presque partout sur ω, et conclut enfin l'argument qui devait donner un sens complètement cohérent à la définition généralisée du support. □

Proposition 4.2. *Soient f et g deux fonctions convolables. Alors :*

$$\mathsf{supp}\, f * g \subset \overline{\mathsf{supp}\, f + \mathsf{supp}\, g},$$

où la somme $A + B$ de deux sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^d$ est définie par :

$$A + B := \big\{a + b\colon \ a \in A, \ b \in B\big\},$$

et où $\overline{C}$ désigne, comme à l'accoutumée, l'adhérence d'un sous-ensemble $C \subset \mathbb{R}^d$.

Démonstration. Pour tout x en lequel $f * g$ est bien définie, si l'on introduit l'ensemble :

$$A(x) := \big\{t \in \mathbb{R}^d\colon \ (x - t) \in \mathsf{supp}\, f \ \text{ et } \ t \in \mathsf{supp}\, g\big\},$$

alors pour $t \notin A(x)$, le produit $f(x - t)\, g(t) = 0$ s'annule, donc le domaine de l'intégrale de convolution se restreint spontanément à $A(x)$:

$$f * g\,(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - t)\, g(t)\, dt = \int_{A(x)} f(x - t)\, g(t)\, dt.$$

Assertion 4.3. *Lorsque $x \notin \big(\mathsf{supp}\, f + \mathsf{supp}\, g\big)$, on a $A(x) = \emptyset$ — exercice mental laissé au lecteur —, donc $f * g\,(x) = \int_\emptyset = 0$.* □

Si donc nous introduisons le sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$:

$$E := \mathsf{supp}\, f + \mathsf{supp}\, g,$$

et si l'on désigne, comme à l'accoutumée son *complémentaire* par $E^c := \mathbb{R}^d \backslash E$, alors l'Assertion nous dit que :

$$f * g\,(x) = 0 \quad \text{pour tout } \ x \in E^c,$$

donc par conséquence directe, pour tout x dans l'*intérieur* de E^c.

Un exercice élémentaire de topologie générale montre alors [1] que pour tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$, on a :

$$\mathsf{intérieur}(E^c) = \big(\overline{E}\big)^c.$$

On déduit de tout cela que que :

$$f * g\,(x) = 0 \quad \text{pour tout } \ x \in \Big(\overline{\mathsf{supp}\, f + \mathsf{supp}\, g}\Big)^c,$$

1. En voici la solution. Si $x \in \mathsf{Int}\, E^c$, il existe une boule ouverte $B_\varepsilon(x)$ de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ telle que $\emptyset = B_\varepsilon(x) \cap E$, ce qui signifie $E \subset \mathbb{R}^d \backslash B_\varepsilon(x)$, et comme $\mathbb{R}^d \backslash B_\varepsilon(x)$ est fermé, cela implique :

$$\overline{E} \subset \mathbb{R}^d \backslash B_\varepsilon(x),$$

d'où il découle que $x \notin \overline{E}$, c'est-à-dire $x \in (\overline{E})^c$.

Inversement, si $x \in (\overline{E})^c$, ensemble qui est ouvert car complémentaire du fermé $\overline{E}$, il existe une boule ouverte $B_\varepsilon(x)$ de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ telle que $\emptyset = B_\varepsilon \cap \overline{E}$, d'où aussi $\emptyset = B_\varepsilon \cap E$, ce qui signifie $x \in \mathsf{Int}\, E^c$.

et par définition exacte du support, cette dernière relation exprime précisément que :

$$\mathsf{supp}\,(f*g)\subset\overline{\mathsf{supp}\,f+\mathsf{supp}\,g}.\qquad\square$$

5. Convolution dans $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$

Théorème 5.1. *Soient deux fonctions $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g\in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$, avec $1\leqslant\mathsf{p}<\infty$. Alors pour presque tout $x\in\mathbb{R}^d$, la fonction :*

$$\mathbb{R}^d\ni y\longmapsto f(y)\,g(x-y)\in\mathbb{C}$$

est intégrable, i.e. *elle appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$, donc la convolution de f et de g a un sens.*

De plus, cette convolée $f*g$ appartient à $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ avec un contrôle de sa norme L^{p} par le produit nu et simple des normes L^1 de f et L^{p} de g :

$$\|f*g\|_{L^{\mathsf{p}}}\leqslant\|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

Démonstration. Nous traiterons seulement le cas $d=1$, car le cas d quelconque ne présente qu'une légère différence quant au formalisme.

Observons d'abord que le cas $\mathsf{p}=1$ a déjà été vu dans le Théorème 3.2 ci-dessus. Nous pouvons donc supposer que $\mathsf{p}>1$, d'où $1<\mathsf{p}<+\infty$ et aussi $1<\mathsf{p}'<+\infty$. Il va être nécessaire de restreindre pour commencer les considérations à un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$, donc nous introduisons la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[a,b]}$ d'un intervalle fermé $[a,b]\subset\mathbb{R}$, avec $a<b$ (si l'on travaillait dans $\mathbb{R}^d$, on introduirait à la place un produit $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]$ de tels intervalles fermés), laquelle vaut bien entendu :

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1\ \text{ si }x\in[a,b];\\ 0\ \text{ si }x\notin[a,b].\end{cases}$$

En effet, grâce au théorème de Fubini-Tonelli et grâce à l'inégalité de Hölder, on peut montrer que l'intégrable double suivante, tronquée par rapport à x au moyen de cette fonction indicatrice :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\bigg(\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|\,|g(x-y)|\,\mathbf{1}_{[a,b]}(x)\,dy\bigg)\,dx&=\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|\,\bigg(\int_{-\infty}^{\infty}|g(x-y)|\,\mathbf{1}_{[a,b]}(x)\,dx\bigg)\,dy\\&\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|\,\bigg(\int_{-\infty}^{\infty}|g(x-y)|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\,\bigg(\int_a^b1^{\mathsf{p}'}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}\,dy\\&=\|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\,\big(b-a\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}\\&<\infty\end{aligned}$$

est convergente, *i.e.* est de valeur finie. Il découle alors du théorème de Fubini appliqué à l'intégrale double initiale que, pour presque tout $x\in[a,b]$, la fonction :

$$\begin{aligned}y\longmapsto&\ \big|f(y)\big|\,\big|g(x-y)\big|\,\mathbf{1}_{[a,b]}(x)\\&=\big|f(y)\big|\,\big|g(x-y)\big|\end{aligned}$$

est d'intégrale finie par rapport à y sur $\mathbb{R}$, et comme l'intervalle $[a,b]$ choisi à l'instant était arbitraire, on en déduit immédiatement sans effort que la même conclusion est en fait vraie pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, puisque tout x quelconque peut être inclus dans un tel intervalle $[a,b]$.

De plus, cette même inégalité, bien entendu, montre aussi que l'application :

$$x\longmapsto\mathbf{1}_{[a,b]}(x)\,\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|\,|g(x-y)|\,dy$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.

En appliquant alors l'inégalité de Hölder au produit suivant de deux fonctions (soulignées chacune pour plus de clarté) :

$$\begin{aligned} y \longmapsto & \underline{|f(y)|^{\frac{1}{\mathsf{p}}}|g(x-y)|}\ \ \underline{|f(y)|^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}} \\ & = |f(y)|\,|g(x-y)| \end{aligned}$$

on en déduit une inégalité auxiliaire à conserver en mémoire :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dy & \leqslant \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,|g(x-y)|^{\mathsf{p}}\,dy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,dy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}{}'} \\ & = \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,|g(x-y)|^{\mathsf{p}}\,dy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \Big(\|f\|_{L^1}\Big)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Nous pouvons maintenant examiner la norme L^{p} du produit de convolution $f * g$, que nous élèverons à la puissance p-ème, afin de déterminer si elle est finie :

$$\begin{aligned} \big(\|f*g\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} & = \int_{-\infty}^{\infty} \bigg|\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,g(x-y)\,dy\bigg|^{\mathsf{p}} dx \\ & \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dy\bigg)^{\mathsf{p}} dx \\ \text{[Utiliser (5.2)]} \qquad & \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,|g(x-y)|^{\mathsf{p}}\,dy \Big(\|f\|_{L^1}\Big)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}} dx \\ \text{[Fubini-Tonelli]} \qquad & = \Big(\|f\|_{L^1}\Big)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}} \int_{-\infty}^{\infty} \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-y)|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)|f(y)|\,dy \\ [x-y=:z] \qquad & = \Big(\|f\|_{L^1}\Big)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}} \int_{-\infty}^{\infty} |g(z)|^{\mathsf{p}}\,dz \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,dy \\ & = \Big(\|f\|_{L^1}\Big)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}} \Big(\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \|f\|_{L^1} \\ [\tfrac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}+1=\mathsf{p}] \qquad & = \Big(\|f\|_{L^1}\Big)^{\mathsf{p}} \Big(\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}}, \end{aligned}$$

et cette dernière inégalité, dont il ne reste plus qu'à prendre la racine p-ème, montre bien que $f * g$ appartient à $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$. □

« Découvrons » maintenant dans ce cours la première manifestation d'une propriété particulièrement « magique » que possède le produit de convolution : il rend le résultat $f * g$ *plus régulier* que ne le sont séparément f et g, et c'est cette propriété de *régularisation* qui constitue le thème principal de ce chapitre. En effet, le théorème suivant montre que la convolution $f * g\,(x)$ de deux fonctions f et g qui appartiennent à des espaces L^{p} et $L^{\mathsf{p}'}$ d'exposants conjugués n'est pas seulement définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ (comme nous le savions au niveau de la définition initiale du produit de convolution), mais mieux, que cette convolution $f * g\,(x)$ possède une valeur bien définie $\in \mathbb{C}$ pour *tout* $x \in \mathbb{R}^d$, et beaucoup mieux, que la fonction $x \mapsto f * g\,(x)$ est *continue*, et même beaucoup mieux encore, qu'elle est *uniformément continue* sur $\mathbb{R}^d$ tout entier.

Théorème 5.3. *Soit un exposant* $\mathsf{p} \in [1, \infty]$ *et soit* p' *son exposant conjugué. Alors pour toute paire de fonctions* $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ *et* $g \in L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)$*, la convolée :*

$$f * g\,(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

est une fonction partout définie *et bornée sur* $\mathbb{R}^d$*, avec le contrôle de sa norme* L^∞ *par le produit nu et simple des normes* L^{p} *de* f *et* $L^{\mathsf{p}'}$ *de* g *:*

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\, \|g\|_{L^{\mathsf{p}'}}.$$

Qui plus est, cette convolée $f * g$ *est même* uniformément continue *sur* $\mathbb{R}^d$ *tout entier.*

Nous allons voir principalement que pour $f \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$ et pour $g \in L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)$, la convolée $f * g$ est *uniformément continue* sur $\mathbb{R}^d$.

Un théorème général qui sera vu dans la suite du cours montrera que la convolution $f * g$ est essentiellement aussi régulière que l'est le plus régulier de ses deux facteurs f et g, par exemple, si f est $\mathscr{C}^1$ à support compact, alors $f * g$ est aussi $\mathscr{C}^1$ (mais pas forcément à support compact, en fait).

Démonstration. La première assertion découle aisément de l'inégalité de Hölder et montre que la meilleure circonstance dans laquelle on peut convoler deux fonctions intégrables, par exemple $|f|$ et $|g|$, c'est lorsque les exposants sont conjugués l'un et l'autre :

$$\begin{aligned} |f| * |g|\,(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)|\, |g(x-t)|\, dt \\ &\leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t)|^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-t)|^{\mathsf{p}'}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}, \end{aligned}$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la valeur de $f * g\,(x)$ est bien définie par une intégrale qui est absolument convergente :

$$|f * g\,(x)| \leqslant |f| * |g|\,(x) \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\, \|g\|_{L^{\mathsf{p}'}},$$

ce qui fournit immédiatement l'inégalité annoncée :

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\, \|g\|_{L^{\mathsf{p}'}}.$$

Traitons maintenant la continuité uniforme de $f * g$ sur $\mathbb{R}^d$. Comme souvent, un raisonnement par densité sera possible ensuite. Supposons donc d'abord que $f \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$ est continue à support compact, toujours avec $g \in L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)$.

Si la philosophie générale est respectée, on doit s'attendre par conséquent à ce que $f * g$ soit elle aussi continue (pas forcément à support compact) ; ce qui est remarquable ensuite, c'est que la densité (supposée connue dans ce cours) de $\mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ va permette de déduire que $f * g$ est aussi uniformément continue lorsqu'on suppose seulement que $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$, comme nous allons le voir à la fin de la démonstration.

Soit donc $f \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)$. Notons $K := \operatorname{supp} f$, ensemble compact d'intérieur non vide (sinon $f \equiv 0$), et introduisons la fonction indicatrice $\mathbf{1}_K$ de K. La fonction f étant continue sur ce compact K, elle y est en fait continue uniformément :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta = \eta(\varepsilon) > 0 \quad \Big(\forall\, u, v \in K\colon\ \ |u - v| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon\Big).$$

De cette inégalité, on peut déduire une inégalité légèrement plus attrayante car préparée sous forme très pratique pour la suite.

Réexpression de l'uniforme continuité. *Pour tous* $u, v \in \mathbb{R}^d$ *avec* $|u - v| \leqslant \eta(\varepsilon)$, *on a :*

$$|f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon \big(\mathbf{1}_K(u) + \mathbf{1}_K(v)\big).$$

Démonstration. Tout d'abord, lorsque u et v appartiennent tous deux à K, on trouve $2\,\varepsilon$ à droite, ce qui fonctionne puisque $2\,\varepsilon > \varepsilon$.

Ensuite, lorsque l'un des deux arguments u ou v appartient à K, disons v pour fixer les idées, tandis que l'autre, u, appartient à $\mathbb{R}^d \backslash K$, on trouve au moins un point $u' \in [u, v]$ qui appartient à $K \cap \overline{(\mathbb{R}^d \backslash K)}$, d'où $f(u') = 0$ et $|u' - v| \leqslant \eta$ puis $|f(u) - f(v)| = |f(v)| = |f(u') - |f(v)| \leqslant \varepsilon$.

Enfin, lorsque u et v appartiennent tous deux au complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash K$, on trouve $|f(u) - f(v)| = |0 - 0| = 0$ à gauche et 0 à droite aussi. □

Grâce, donc, à cette inégalité auxiliaire générale, on peut alors estimer la différence entre les valeurs de la convolée en deux points quelconques u et v avec $|u - v| \leqslant \eta(\varepsilon)$ de $\mathbb{R}^d$ qui sont η-proches l'un de l'autre :

$$\begin{aligned}
\big|f * g\,(u) - f * g\,(v)\big| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(u-t) - f(v-t)|\,|g(t)|\,dt \\
&\leqslant \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_K(u-t)\,|g(t)|\,dt + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_K(v-t)\,|g(t)|\,dt \right) \\
&\leqslant 2\,\varepsilon\,||\mathbf{1}_K||_{L^{\mathsf{p}}}\,||g||_{L^{\mathsf{p}'}},
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder. Mais comme $||\mathbf{1}_K||_{L^{\mathsf{p}}} \neq 0$ puisque $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$ par hypothèse (sinon $f \equiv 0$), et comme on peut supposer depuis le début que $||g||_{L^{\mathsf{p}'}} \neq 0$ (sinon $f * g \equiv 0$), on déduit de cette inégalité que, quitte à choisir η plus petit, $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ tout entier :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\eta = \eta\Big(\tfrac{\varepsilon}{2\,||\mathbf{1}_K||_{L^{\mathsf{p}}}\,||g||_{L^{\mathsf{p}'}}}\Big) \quad \Big(\forall\,u, v \in \mathbb{R}^d\colon\;\; |u-v| \leqslant \eta \Longrightarrow \big|f{*}g\,(u) - f{*}g\,(v)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Pour terminer, voici le raisonnement par densité annoncé ci-dessus. Puisque $\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'} = 1$, l'un des deux exposants conjugués p ou p' est $< \infty$. Quitte à intervertir f et g, on peut donc supposer que $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathsf{p} < \infty$. D'après un théorème connu, il existe une suite $(f_k)_{k \geqslant 1}$ de fonctions $f_k \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$ telle que :

$$0 = \lim_{k \to \infty} ||f_k - f||_{L^{\mathsf{p}}}.$$

Grâce à la première partie de la démonstration, on sait déjà que pour tout entier $k \geqslant 1$, la convolée $f_k * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.

Estimons alors la différence entre $f * g$ et $f_k * g$, en appliquant naturellement l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
\big|\big|f * g - f_k * g\big|\big|_{L^\infty} &= \big|\big|(f - f_k) * g\big|\big|_{L^\infty} \\
&\leqslant \big|\big|f - f_k\big|\big|_{L^{\mathsf{p}}}\,\big|\big|g\big|\big|_{L^{\mathsf{p}'}}.
\end{aligned}$$

Or, puisque le membre de droite tend par hypothèse vers 0 lorsque k tend vers ∞, il en découle que $f * g$ est *limite uniforme*, en norme L^∞, de la suite de fonctions $f_k * g$ qui sont toutes *continues uniformément* sur $\mathbb{R}^d$.

Lemme 5.4. *Si une fonction mesurable presque partout bornée* $h \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ *est limite uniforme :*

$$0 \;=\; \lim_{k \to \infty} \big|\big|h - h_k\big|\big|_{L^\infty},$$

d'une suite $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ de fonctions h_k uniformément continues sur $\mathbb{R}^d$:

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\eta_k(\varepsilon)>0\quad \Big(\;|u-v|\,\leqslant\,\eta_k(\varepsilon)\quad\Longrightarrow\quad \big|h_k(u)-h_k(v)\big|\,\leqslant\,\varepsilon\;\Big),$$

alors h est elle-même continue sur $\mathbb{R}^d$ aussi, et même, uniformément continue.

Preuve. Soit $\varepsilon>0$ arbitrairement petit. Fixons un entier $k\gg 1$ assez grand pour que :

$$\big|h_k(u)-h(u)\big|\,\leqslant\,\varepsilon \qquad\qquad (\forall\,u\in\mathbb{R}^d),$$

quitte à changer les valeurs de h sur un ensemble de mesure nulle.

Alors avec $\eta:=\eta_k(\varepsilon)$ il vient :

$$\begin{aligned}|u-v|\,\leqslant\,\eta\quad\Longrightarrow\quad \big|h(u)-h(v)\big|\,&=\,\Big|h(u)-h_k(u)+h_k(u)-h_k(v)+h_k(v)-h(v)\Big|\\ &\leqslant\,\big|h(u)-h_k(u)\big|+\big|h_k(u)-h_k(v)\big|+\big|h_k(v)-h(v)\big|\\ &\leqslant\,\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui montre bien que h est continue, uniformément sur $\mathbb{R}^d$. □

En conclusion, il suffit d'appliquer ce lemme aux fonctions :

$$h\,:=\,f*g, \qquad\qquad h_k\,:=\,f_k*g.$$ □

6. Inégalité de Young

Le résultat suivant fournit une estimation améliorée lorsque les deux fonctions convolées n'appartiennent pas exactement à des espaces conjugués.

Théorème 6.1. [Inégalité de Young] *Soient $1\leqslant \mathsf{p},\mathsf{q},\mathsf{r}\leqslant\infty$ trois nombres réels tels que :*

$$\frac{1}{\mathsf{p}}+\frac{1}{\mathsf{q}}=\frac{1}{\mathsf{r}}+1,$$

et soient deux fonctions $f\in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ et $g\in L^{\mathsf{q}}(\mathbb{R}^d)$. Alors la convolée $f*g$ appartient à $L^{\mathsf{r}}(\mathbb{R}^d)$ et sa norme L^{r} satisfait la majoration :

$$\|f*g\|_{L^{\mathsf{r}}}\leqslant\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\,\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}.$$

Observons que l'on a $\mathsf{p},\mathsf{q}\leqslant\mathsf{r}$ nécessairement, car si on avait par exemple $\mathsf{p}>\mathsf{r}$, d'où $\frac{1}{\mathsf{p}}<\frac{1}{\mathsf{r}}$, alors à l'aide de $0\leqslant\frac{1}{\mathsf{q}}\leqslant 1$ il viendrait par addition $\frac{1}{\mathsf{p}}+\frac{1}{\mathsf{q}}<\frac{1}{\mathsf{r}}+1$, ce qui contredirait l'hypothèse $\frac{1}{\mathsf{p}}+\frac{1}{\mathsf{q}}=\frac{1}{\mathsf{r}}+1$, et le même argument s'applique pour justifier $\mathsf{q}\leqslant\mathsf{r}$.

Démonstration. Le cas $\mathsf{r}=+\infty$ correspond exactement au Théorème 5.3 qui vient d'être démontré. Supposons donc désormais que $\mathsf{r}<+\infty$. Comme on a (nécessairement) $\mathsf{p},\mathsf{q}\leqslant\mathsf{r}$, on a aussi $\mathsf{p},\mathsf{q}<+\infty$.

Dans le cas où $\mathsf{p}=\mathsf{q}=1$, le premier Théorème 3.2 assure que $f*g$ est intégrable et que :

$$\|f*g\|_{L^1}\leqslant\|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^1}. \tag{6.2}$$

Traitons maintenant le cas général en admettant provisoirement que l'inégalité cruciale suivante :

$$\Big(\big(|f|*|g|\big)(x)\Big)^{\mathsf{r}}\leqslant\underbrace{\big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{r}-\mathsf{p}}\,\big(\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}\big)^{\mathsf{r}-\mathsf{q}}}_{\text{constantes}}\cdot\big(|f|^{\mathsf{p}}*|g|^{\mathsf{q}}\big)(x) \tag{6.3}$$

est satisfaite pour presque tout $x\in\mathbb{R}^d$.

Dans le second membre de cette inégalité (6.3), on a par hypothèse $|f|^{\mathsf{p}} \in L^1$ et $|g|^{\mathsf{q}} \in L^1$, et puisque $L^1 * L^1 \subset L^1$, on voit que le membre à droite de l'inégalité est une fonction intégrable par rapport à x, d'où l'on déduit que le membre à gauche est dans L^1, ce qui revient à dire que $|f| * |g|$ appartient à $L^{\mathsf{r}}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire en détail :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)|\, |g(t)|\, dt \right)^{\mathsf{r}} dx < \infty.$$

Il découle en particulier de cette inégalité que la fonction $t \mapsto f(x-t)\, g(t)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, et donc que la convolée $f * g\,(x)$ est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Maintenant, grâce à (6.2) et à (6.3), on peut estimer la puissance r-ème de la norme L^{r} de cette convolée :

$$\begin{aligned}
\left(\|f * g\|_{L^{\mathsf{r}}}\right)^{\mathsf{r}} = \int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)|^{\mathsf{r}}\, dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\, g(t)\, dt \right|^{\mathsf{r}} dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \Bigg(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)|\, |g(t)|\, dt}_{|f|*|g|(x)} \Bigg)^{\mathsf{r}} dx \\
&= \left(\big\| |f| * |g| \big\|_{L^{\mathsf{r}}} \right)^{\mathsf{r}} \\
\text{[appliquer (6.3)]} \qquad &\leqslant \left(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\right)^{\mathsf{r}-\mathsf{p}} \left(\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}\right)^{\mathsf{r}-\mathsf{q}} \cdot \Big\| \underbrace{|f|^{\mathsf{p}}}_{\in L^1} * \underbrace{|g|^{\mathsf{q}}}_{\in L^1} \Big\|_{L^1} \\
\text{[appliquer (6.2)]} \qquad &\leqslant \left(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\right)^{\mathsf{r}-\mathsf{p}} \left(\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}\right)^{\mathsf{r}-\mathsf{q}} \big\| |f|^{\mathsf{p}} \big\|_{L^1} \big\| |g|^{\mathsf{q}} \big\|_{L^1} \\
&= \left(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\right)^{\mathsf{r}-\mathsf{p}} \left(\|g\|_{L^{\mathsf{q}}}\right)^{\mathsf{r}-\mathsf{q}} \left(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\right)^{\mathsf{p}} \left(\|f\|_{L^{\mathsf{q}}}\right)^{\mathsf{q}} \\
&= \left(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\right)^{\mathsf{r}} \left(\|f\|_{L^{\mathsf{q}}}\right)^{\mathsf{r}},
\end{aligned}$$

et en prenant finalement la racine r-ème de cette dernière inégalité, on obtient la majoration annoncée dans le théorème.

Il reste maintenant à établir (6.3). Notons p' et q' les deux exposants conjugués de p et de q :

$$\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\mathsf{q}} + \frac{1}{\mathsf{q}'} = 1.$$

De la relation $\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{q}} = \frac{1}{\mathsf{r}} + 1$ qui existe par hypothèse entre p, q et r, il vient :

$$\begin{aligned}
1 - \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{r}} &= \mathsf{p}\left(\frac{1}{\mathsf{p}} - \frac{1}{\mathsf{r}}\right) = \mathsf{p}\left(1 - \frac{1}{\mathsf{q}}\right) = \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}'}, \\
1 - \frac{\mathsf{q}}{\mathsf{r}} &= \mathsf{q}\left(\frac{1}{\mathsf{q}} - \frac{1}{\mathsf{r}}\right) = \mathsf{q}\left(1 - \frac{1}{\mathsf{p}}\right) = \frac{\mathsf{q}}{\mathsf{p}'},
\end{aligned}$$

d'où en regardant les deux membres extrêmes de ces deux jeux de trois égalités, on en déduit les deux relations auxiliaires utiles dans un instant :

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{r}} + \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}'}, \\
1 &= \frac{\mathsf{q}}{\mathsf{r}} + \frac{\mathsf{q}}{\mathsf{p}'}.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

De la relation $\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{q}} = \frac{1}{\mathsf{r}} + 1$, on déduit aussi immédiatement que :

$$1 = \frac{1}{\mathsf{p}'} + \frac{1}{\mathsf{q}'} + \frac{1}{\mathsf{r}}.$$

Or il existe une :

Inégalité de Hölder généralisée à trois termes. *Pour tout triplet d'exposants réels* $1 < \mathsf{s}_1 < +\infty$, $1 < \mathsf{s}_2 < +\infty$, $1 < \mathsf{s}_3 < +\infty$ *tels que :*

$$1 = \frac{1}{\mathsf{s}_1} + \frac{1}{\mathsf{s}_2} + \frac{1}{\mathsf{s}_3},$$

et tout triplet de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ *:*

$$f_1 \in L^{\mathsf{s}_1}, \qquad f_2 \in L^{\mathsf{s}_2}, \qquad f_3 \in L^{\mathsf{s}_3},$$

le produit $f_1(x)\, f_2(x)\, f_3(x)$ *appartient à* $L^1(\mathbb{R}^d)$*, et sa norme* L^1 *est contrôlée par le produit simple et nu des trois normes* L^{s_1}*,* L^{s_2} *et* L^{s_1} *de* f_1*, de* f_2 *et de* f_3 *:*

$$\| f_1\, f_2\, f_3 \|_{L^1} \leqslant \| f_1 \|_{L^{\mathsf{s}_1}}\, \| f_2 \|_{L^{\mathsf{s}_2}}\, \| f_3 \|_{L^{\mathsf{s}_3}},$$

à savoir en d'autres termes plus explicites mais complètement équivalents :

(6.5)
$$\int_{\mathbb{R}^d} \big| f_1(x)\, f_2(x)\, f_3(x) \big|\, dx \leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x)|^{\mathsf{s}_1}\, dx \bigg)^{\frac{1}{\mathsf{s}_1}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |f_2(x)|^{\mathsf{s}_2}\, dx \bigg)^{\frac{1}{\mathsf{s}_2}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |f_3(x)|^{\mathsf{s}_3}\, dx \bigg)^{\frac{1}{\mathsf{s}_3}}.$$

En guise d'exercice, nous laissons au lecteur le soin d'établir indépendamment une telle inégalité, ou plus simplement, de la déduire de l'inégalité de Hölder à deux termes.

Pour l'appliquer avec la décomposition $1 = \frac{1}{\mathsf{p}'} + \frac{1}{\mathsf{q}'} + \frac{1}{\mathsf{r}}$ ci-dessus, nous observons à dessein la décomposition suivante en trois termes dans laquelle les deux exposants de $|f(x-t)|$ et de $|g(t)|$ sont adaptés pour être chacun de somme égale à 1, si nous nous rappelons les deux relations (6.4) :

$$|f(x-t)|\, |g(t)| = \underbrace{\big(|f(x-t)|^{\mathsf{p}} \big)^{\frac{1}{\mathsf{q}'}}}_{=:\, h_1(x)} \ \underbrace{\big(|g(t)|^{\mathsf{q}} \big)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}}_{=:\, h_2(x)} \ \underbrace{\big(|f(x-t)|^{\mathsf{p}}\, |g(t)|^{\mathsf{q}} \big)^{\frac{1}{\mathsf{r}}}}_{=:\, h_3(x)}.$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Hölder à trois termes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\big(|f| * |g| \big)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \big| h_1(x)\, h_2(x)\, h_3(x) \big|\, dx \\
&\leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)|^{\mathsf{p}}\, dt \bigg)^{\frac{1}{\mathsf{q}'}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|^{\mathsf{q}}\, dt \bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)|^{\mathsf{p}}\, |g(t)|^{\mathsf{q}}\, dt \bigg)^{\frac{1}{\mathsf{r}}} \\
&= \big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \big)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}'}} \big(\|g\|_{L^{\mathsf{q}}} \big)^{\frac{\mathsf{q}}{\mathsf{p}'}} \cdot \Big(\big(|f|^{\mathsf{p}} * |g|^{\mathsf{q}} \big)(x) \Big)^{\frac{1}{\mathsf{r}}},
\end{aligned}$$

d'où, en prenant la puissance r-ème de part et d'autre de cette dernière inégalité :

$$\begin{aligned}
\Big(\big(|f| * |g| \big)(x) \Big)^{\mathsf{r}} &\leqslant \big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \big)^{\frac{\mathsf{rp}}{\mathsf{q}'}} \big(\|g\|_{L^{\mathsf{q}}} \big)^{\frac{\mathsf{rq}}{\mathsf{p}'}} \cdot \big(|f|^{\mathsf{p}} * |g|^{\mathsf{q}} \big)(x) \\
&= \big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \big)^{\mathsf{r}-\mathsf{p}} \big(\|g\|_{L^{\mathsf{q}}} \big)^{\mathsf{r}-\mathsf{q}} \cdot \big(|f|^{\mathsf{p}} * |g|^{\mathsf{q}} \big)(x),
\end{aligned}$$

ce qui est (6.3) comme désiré. Le théorème de Young est donc complètement démontré. □

7. Non-existence d'une unité pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Les théorèmes précédents vont maintenant nous permettre de constater qu'il n'existe aucune fonction $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ qui serait une unité pour la convolution, à savoir qui satisferait :

$$u * f = f * u = f,$$

pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Ce constat un peu gênant sera entièrement « réparé » dans la section suivante où l'on construira des *approximations de l'identité*, à savoir des *suites* de fonctions $(u_k)_{k \geqslant 1}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ qui auront la propriété que pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$0 = \lim_{k \to \infty} \|f - u_k * f\|_{L^1} = \lim_{k \to \infty} \|f - f * u_k\|_{L^1}.$$

En effet, supposons par l'absurde l'existence d'un tel élément $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ qui satisfasse $u * f = f * u = f$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et convolons alors u à une famille f_ρ bien choisie de fonctions, par exemple :

$$e^{-\rho\,|x|^2} = e^{-\rho\,(x_1^2 + \cdots + x_d^2)},$$

où $\rho > 0$ est un paramètre réel que l'on fera tendre vers $+\infty$. Par hypothèse, on a donc :

$$\left(e^{-\rho\,|\cdot|^2} * u\right)(x) = e^{-\rho\,|x|^2},$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, le paramètre ρ étant arbitraire.

Or le Théorème 5.3 avec $\mathsf{p} = 1$ et $\mathsf{p}' = +\infty$ montre que la fonction convolée à gauche est en fait (uniformément) continue sur $\mathbb{R}^d$, et puisque la fonction à droite est elle-même continue, l'identité en question :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\rho\,|x-y|^2}\, u(y)\, dy = e^{-\rho\,|x|^2}$$

est alors satisfaite *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$, ce qui devient avantageux.

En effet, on peut donc poser $x = 0$ et obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\rho\,|y|^2}\, u(y)\, dy = 1,$$

et ce, quel que soit le paramètre ρ. Mais comme il est clair grâce au théorème de la convergence dominée que l'intégrale à gauche tend vers zéro lorsque $\rho \to \infty$, cette absurdité informatique $0 = 1$ contredit l'hypothèse de l'existence d'une unité $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour la convolution $*$. □

8. Approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Définition 8.1. [Approximation de l'unité] On appelle *approximation de l'unité*, ou *unité approchée*, dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ toute suite $(\varphi_j)_{j \geqslant 1}$ de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}^d$ telles que :

- pour tout entier $j \geqslant 1$:

$$\varphi_j \geqslant 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}^d;$$

- pour tout entier $j \geqslant 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j(x)\, dx = 1;$$

- pour tout réel $\delta > 0$ arbitrairement petit :

$$0 = \lim_{j \to \infty} \int_{|x|>\delta} \varphi_j(x)\, dx.$$

Nous avons déjà vu, dans le chapitre sur la convergence des série de Fourier sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, que le noyau de Fejér :

$$\mathsf{F}_n(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \left[\dfrac{\sin(\frac{n}{2}\,\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right]^2 & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ n & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z}, \end{cases}$$

avait toutes les propriétés requises pour être une approximation de l'unité, à savoir :

- ses valeurs sont positives : $\mathsf{F}_n(\theta) \geqslant 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{T}$;
- ce noyau F_n est une mesure de probabilité sur le cercle unité pour tout $n \geqslant 1$:

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{F}_n(\theta)\, \frac{d\theta}{2\pi} = \|\mathsf{F}_n\|_{L^1};$$

- pour tout réel $\delta > 0$ fixé et arbitrairement petit, la portion de l'aire du graphe de F_n située hors du petit intervalle $[-\delta, \delta]$ autour de 0 tend vers zéro quand n tend vers l'infini :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} \mathsf{F}_n(\theta)\, \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{\delta}^{\pi} \mathsf{F}_n(\theta)\, \frac{d\theta}{2\pi} \right).$$

La seule différence entre $\big(\mathsf{F}_n\big)_{n\geqslant 1}$ et les $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ définies ci-dessus, c'est le domaine : $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}^d$ sur lequel on les considère, compact dans le premier cas, non compact dans le second, mais nous allons voir et constaster que les théorèmes fondamentaux sont essentiellement les mêmes. En effet, dans la partie du cours consacrée aux séries trigonométriques, nous avons établi le fameux et très fondamental *théorème de Fejér*, d'après lequel, pour toute fonction continue 2π-périodique $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$, on a :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \|f - \mathsf{F}_n * f\|_{\mathscr{C}^0} = \lim_{n \to \infty} \|f - f * \mathsf{F}_n\|_{\mathscr{C}^0},$$

les trois propriétés de F_n rappelées ci-dessus ayant été toutes utilisées dans la démonstration. Ce qui est remarquable ici, c'est que la 'découverte' faite par Fejér que les sommes de Cesàro permettent de contourner le difficile problème de la convergence des séries de Fourier des fonctions continues a révélé l'existence de trois propriétés élémentaires dont jouissent les approximations de l'unité φ_j et permet d'ériger une théorie assez simple (ci-dessous) qui a de nombreuses applications en Analyse.

En fait, il existe beaucoup d'approximations de l'unité $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ différentes dans leur forme, mais similaires dans leur principe fondamental.

Exemple 8.2. [Approximations de Laplace, de Cauchy, et de Gauss] En dimension $d = 1$, les trois exemples suivants jouent régulièrement un rôle en Analyse et dans les sujets d'examens ou de concours. Le troisième est particulièrement utile pour l'étude de la transformation de Fourier.

$$\text{Approximation de Laplace :} \qquad \varphi_j(x) = \frac{j}{2}\, e^{-j\,|x|}.$$

$$\text{Approximation de Cauchy :} \qquad \varphi_j(x) = \frac{j}{\pi}\,\frac{1}{1+j^2\,x^2}.$$

$$\text{Approximation de Gauss :} \qquad \varphi_j(x) = \frac{j}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-j^2\,x^2}.$$

Exercice de lecture impératif : se convaincre, pour chaque famille, que les trois propriétés que doit satisfaire une approximation sont effectivement réalisées.

Théorème 8.3. *Si $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, les deux énoncés suivants sont satisfaits.*

(1) *Pour toute fonction f uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$:*

$$f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{unif^t}} \cap L^\infty(\mathbb{R}^d),$$

la suite des convolées $\big(f * \varphi_j\big)_{j\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^d$:

$$0 = \lim_{j\to\infty} \big\|f - \varphi_j * f\big\|_{\mathscr{C}^0}.$$

(2) *Pour tout réel $\mathsf{p} \in [1, +\infty[$ et toute fonction :*

$$f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d),$$

la suite des convolées $\big(f * \varphi_j\big)_{j\geqslant 1}$ converge vers f en norme L^{p} :

$$0 = \lim_{j\to\infty} \big\|f - \varphi_j * f\big\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

L'étudiant averti aura réalisé ici que nous n'avons pas parlé, dans le chapitre sur les séries trigonométriques, de convergence en norme L^{p} des convolées $\mathsf{F}_n * f$ d'une fonction $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{T})$ avec le noyau de Fejér F_n, et il aura deviné tout seul qu'un énoncé entièrement analogue à **(2)** ci-dessus est aussi valable sur le cercle unité $\mathbb{T}$: *exercice requis*, en s'inspirant bien sûr de la démonstration qui suit ci-dessous.

Démonstration. Traitons d'abord **(1)**. La fonction f étant uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$, elle définit un élément de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Comme $\varphi_j \in L^1(\mathbb{R}^d)$, le Théorème 5.3 montre que la fonction $\varphi_j * f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée. Il s'agit maintenant de démontrer que :

$$\forall\,\varepsilon > 0, \quad \exists\, J \in \mathbb{N}^* \quad \Big(\forall\, j \geqslant J, \qquad \big\|f * \varphi_j - f\big\|_{\mathscr{C}^0} \leqslant \varepsilon\Big).$$

À cette fin, majorons, pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$, la différence à étudier, en insérant $1 = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j(t)\,dt$ à la place du 1 dans $-f(x) = -f(x)\cdot 1$:

$$\begin{aligned}\big|(f * \varphi_j)(x) - f(x)\big| &= \bigg|\int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x-t) - f(x)\big)\,\varphi_j(t)\,dt\bigg| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x-t) - f(x)\big|\,\varphi_j(t)\,dt.\end{aligned}$$

Mais comme $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{unif^t}}(\mathbb{R}^d)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\forall\,\varepsilon_1 > 0, \qquad \exists\,\eta = \eta(\varepsilon_1) \qquad \Big(\forall\,x,\,y \in \mathbb{R}^d, \qquad |x-y| \leqslant \eta(\varepsilon_1) \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon_1\Big).$$

Il sera donc avantageux, comme dans la démonstration du théorème de Fejér, de découper l'intégrale majorante ci-dessus en deux morceaux :

$$\int_{\mathbb{R}^d} = \int_{|t|\leqslant\eta(\varepsilon_1)} + \int_{|t|>\eta(\varepsilon_1)},$$

de manière à bénéficier de la petitesse des valeurs de $f(x-t)-f(x)$ lorsque t est petit, à savoir lorsque $|t| \leqslant \eta(\varepsilon_1)$, ce qui nous donne, en poursuivant la majoration commencée à l'instant :

$$\begin{aligned}\big|(f*\varphi_j)(x)-f(x)\big| &\leqslant \varepsilon_1 \int_{|t|\leqslant\eta(\varepsilon_1)} \varphi_j(t)\,dt + \int_{|t|>\eta(\varepsilon_1)} \big|f(x-t)-f(x)\big|\,\varphi_j(t)\,dt \\ &\leqslant \varepsilon_1 + \int_{|t|>\eta(\varepsilon_1)} \big|f(x-t)-f(x)\big|\,\varphi_j(t)\,dt.\end{aligned}$$

Toutefois, il reste un deuxième terme intégral à estimer qui pourrait poser problème, mais heureusement, il se trouve que la troisième condition à laquelle est soumise une approximation de l'unité est justement faite pour que ce deuxième terme soit lui aussi petit lorsque j est assez grand, puisque l'on peut en effet le majorer simplement par :

$$\int_{|t|>\eta(\varepsilon_1)} \big|f(x-t)-f(x)\big|\,\varphi_j(t)\,dt \leqslant 2\,\|f\|_{\mathscr{C}^0} \int_{|t|>\eta(\varepsilon_1)} \varphi_j(t)\,dt;$$

plus précisément, choisissons $J \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour que :

$$j \geqslant J \Longrightarrow \int_{|t|>\eta(\varepsilon_1)} \varphi_j(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2\,\|f\|_{\mathscr{C}^0}},$$

ce qui est possible, puisque $\eta(\varepsilon_1) > 0$ est strictement positif. En sommant donc les deux termes, on obtient que :

$$j \geqslant J \Longrightarrow \big|(f*\varphi_j)(x)-f(x)\big| \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_1,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et comme ε_1 était arbitrairement petit, on a bien démontré que $f*\varphi_j$ tend uniformément vers f sur $\mathbb{R}^d$ tout entier.

Démontrons maintenant la deuxième assertion **(2)**. Si donc $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathsf{p} \in [1,\infty[$, il s'agit d'établir que $f*\varphi_j$ converge vers f en norme L^{p}. Nous allons d'abord supposer que f est en fait continue à support compact, avant de raisonner par densité, comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois.

Soit donc $f \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$. Évidemment, il existe un rayon positif R assez grand tel que la boule fermée de rayon R centrée à l'origine contienne le support de f :

$$\mathsf{supp}\, f \subset \overline{B}(0,R).$$

Nous considérerons aussi la boule fermée de rayon double $2R$:

$$\overline{B}(0,2R) = \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| \leqslant 2R\big\},$$

afin de se garantir une certaine « marge de sécurité ». Notons $\mathbf{1}_{|x|\leqslant 2R}$ la fonction indicatrice de cette boule fermée et $\mathbf{1}_{|x|>2R}$ la fonction indicatrice de son complémentaire, l'ouvert $\mathbb{R}^d\backslash\overline{B}(0,2R)$. Puisque l'on a trivialement :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d} = \mathbf{1}_{|x|\leqslant 2R} + \mathbf{1}_{|x|>2R},$$

on peut décomposer :

$$f*\varphi_j - f = \big(f*\varphi_j - f\big)\,\mathbf{1}_{|x|\leqslant 2R} + \big(f*\varphi_j - f\big)\,\mathbf{1}_{|x|>2R},$$

d'où en prenant les normes L^{p} *via* l'inégalité de Minkowski :

$$\big\|f*\varphi_j - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \underbrace{\big\|\big(f*\varphi_j - f\big)\,\mathbf{1}_{|x|\leqslant 2R}\big\|_{L^{\mathsf{p}}}}_{=:\,\mathbf{I}} + \underbrace{\big\|\big(f*\varphi_j - f\big)\,\mathbf{1}_{|x|>2R}\big\|_{L^{\mathsf{p}}}}_{=:\,\mathbf{II}}.$$

Montrons premièrement que le premier terme **I** du membre de droite de cette inégalité tend vers 0 lorsque $j\to+\infty$. Comme f est continue à support compact dans $\mathbb{R}^d$, elle y est uniformément continue et bornée, donc elle vérife les hypothèses de la première assertion **(1)** du théorème, assertion que l'on peut alors appliquer, ce qui nous offre la convergence *uniforme* :

$$0 = \lim_{j\to\infty} \big\|f*\varphi_j - f\big\|_{\mathscr{C}^0}.$$

Mais en effectuant la majoration élémentaire d'une intégrale par la mesure du domaine d'intégration que multiplie le supremum de l'intégrande :

$$\begin{aligned}\big\|\big(f*\varphi_j - f\big)\,\mathbf{1}_{|x|\leqslant 2R}\big\|_{L^{\mathsf{p}}} &= \bigg(\int_{|x|\leqslant 2R} \big|\big(f*\varphi_j - f\big)(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\\ &\leqslant \underbrace{\Big(\mathrm{Vol}\big(\overline{B}(0,2R)\big)\Big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}}_{\text{constante}\,<\,\infty}\cdot\big\|f*\varphi_j - f\big\|_{\mathscr{C}^0},\end{aligned}$$

on voit bien alors que ce premier terme **I** tend vers 0 lorsque $j\to\infty$, puisque le facteur à droite $\big\|f*\varphi_j - f\big\|_{\mathscr{C}^0}$ tend vers 0.

Montrons deuxièmement que le second terme **II** du membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend également vers 0 lorsque $j\to\infty$. Observons à cet effet que si $x\in\mathbb{R}^d$ satisfait $|x|>2R$, alors $f(x)=0$ et de plus :

$$\forall\, t\in\mathbb{R}^d,\qquad |t|\leqslant R \Longrightarrow |x-t|>R \Longrightarrow f(x-t)=0,$$

puisque $\mathrm{supp}\, f\subset\overline{B}(0,R)$, d'où pour de tels x avec $|x|>2R$:

$$\begin{aligned}\big(f*\varphi_j - f\big)(x) = f*\varphi_j(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\,\varphi_j(t)\,dt\\ &= \int_{|t|>R} f(x-t)\,\varphi_j(t)\,dt\\ &= f*\big(\varphi_j\,\mathbf{1}_{|\cdot|>R}\big)(x).\end{aligned}\tag{8.4}$$

Mais comme $f\in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ et comme $\varphi_j\,\mathbf{1}_{|\cdot|>R}\in L^1(\mathbb{R}^d)$, le Théorème 5.1 montre que cette dernière convolée $f*\big(\varphi_j\,\mathbf{1}_{|\cdot|>R}\big)$ appartient à L^{p}, avec de plus majoration suivante :

$$\big\|f*\big(\varphi_j\,\mathbf{1}_{|\cdot|>R}\big)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\big\|\varphi_j\,\mathbf{1}_{|\cdot|>R}\big\|_{L^1}.$$

À présent, le raisonnement est presque achevé, car on (on = l'étudiant qui commence à bien comprendre en profondeur la théorie) reconnaît à droite un facteur qui tend visiblement vers 0 lorsque $j \to +\infty$:

$$0 = \lim_{j \to \infty} \big\| \varphi_j \, \mathbf{1}_{|\cdot|>R} \big\|_{L^1},$$

puisque φ_j est par hypothèse une approximation de l'unité [2]. Ainsi, en revenant à (8.4) dont on intègre par rapport à x sur $\{|x| > 2R\}$ la puissance p-ème, on peut effectuer la majoration finale :

$$\begin{aligned}(\mathbf{II})^{\mathsf{p}} = \int_{|x|>2R} \big|\big(f * \varphi_j - f\big)(x)\big|^{\mathsf{p}} &= \int_{|x|>2R} \big|f * \big(\varphi_j \, \mathbf{1}_{|\cdot|>R}\big)(x)\big|^{\mathsf{p}} \, dx \\ &\leqslant \Big(\big\|f * \big(\varphi_j \, \mathbf{1}_{|\cdot|>R}\big)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \\ &\leqslant \underbrace{\big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}}}_{\text{constante} < \infty} \cdot \Big(\underbrace{\big\|\varphi_j \, \mathbf{1}_{|\cdot|>R}\big\|_{L^1}}_{\longrightarrow 0 \text{ quand } j \to \infty}\Big)^{\mathsf{p}},\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de l'assertion **(2)** dans le cas où f est supposée continue à support compact.

Il ne reste plus qu'à formuler le raisonnement basé sur la densité de $\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$. Soit donc une fonction quelconque $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$. Quel que soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe une fonction $g \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que :

$$\big\|f - g\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Mais comme la première partie de la démonstration s'applique à la fonction $g \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$, on a aussi l'existence d'un entier $J = J_\varepsilon \gg 1$

$$j \geqslant J \implies \big\|g * \varphi_j - g\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Alors avec ce même entier J, l'astuce déjà vue d'insertion de quatre termes et l'utilisation d'une inégalité triangulaire triple montre que pour tout $j \geqslant J$, on a aussi :

$$\begin{aligned}\big\|f * \varphi_j - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}} &\leqslant \big\|(f-g) * \varphi_j\big\|_{L^{\mathsf{p}}} + \big\|g * \varphi_j - g\big\|_{L^{\mathsf{p}}} + \big\|g - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \\ \text{[Théorème 5.1]} \qquad &\leqslant \big\|f - g\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \|\varphi_j\|_{L^1} + \big\|g * \varphi_j - g\big\|_{L^{\mathsf{p}}} + \big\|g - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \\ [\|\varphi_j\|_{L^1} = 1] \qquad &\leqslant 2 \, \big\|g - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}} + \big\|g * \varphi_j - g\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \\ &\leqslant 2 \, \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $0 = \lim_{j \to +\infty} \big\|f * \varphi_j - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}}$, et achève la preuve. □

2. Remarque en passant : le lecteur averti pourra aussi faire remarquer ici que la « marge de sécurité » $R = 2R - R$ entre les deux boules que nous avions choisie au départ n'était pas obligatoire, et que tout autre marge de sécurité $R' = R + R' - R$ correspondant à des boules fermées $\overline{B}(0, R) \subset \overline{B}(0, R + R')$ avec $R' > 0$ aurait tout aussi bien convenu, puisqu'on se serait ramené à constater à la fin que :

$$0 = \lim_{j \to \infty} \big\|\varphi_j \, \mathbf{1}_{|\cdot|>R'}\big\|_{L^1},$$

ce qui est tout aussi vrai par hypothèse, quel que soit le choix d'un $R' > 0$ fixé.

9. Fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact

Soient $x = (x_1, \dots, x_d)$ les coordonnées standard sur $\mathbb{R}^d$. On notera :

$$\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$$

les espaces vectoriels de fonctions infiniment différentiables sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, respectivement. Les sous-espaces correspondants de fonctions dont le support est *compact* seront notés :

$$\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}),$$

la lettre '$_c$' en indice inférieur étant l'initiale du mot compact.

Les dérivées partielles d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ seront notées :

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

pour des multi-entiers $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$.

La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ sera notée :

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}.$$

Lemme 9.1. [Existence de fonctions lisses à support compact] *La fonction définie par :*

$$\psi(x) := \begin{cases} \mathsf{exp}\Big(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\Big) & \text{lorsque } |x| < 1, \\ 0 & \text{lorsque } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

est indéfiniment différentiable à support compact, i.e. *:*

$$\psi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+).$$

Démonstration. Manifestement :

$$\mathsf{supp}\, \psi \subset \overline{B(0,1)},$$

est compact. Reste à voir que ψ est $\mathscr{C}^\infty$.

Introduisons à cet effet la fonction :

$$\begin{aligned} \varphi \colon \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{lorsque } t \leqslant 0, \\ \mathsf{exp}(-1/t) & \text{lorsque } t > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Clairement, φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$. De plus, toutes ses dérivées s'annulent identiquement sur $]-\infty, 0[$.

Assertion 9.2. *Cette fonction φ est en fait $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.*

Démonstration. Il s'agit donc de faire voir que toutes ses dérivées $\frac{d^k \varphi}{dt^k}$ sont continues en 0.

Pour $k = 0$, c'est clair. Pour $k = 1$, la dérivée sur $]0, \infty[$:

$$\frac{1}{t^2}\, e^{-1/t} \longrightarrow 0 \longleftarrow \frac{e^{-1/t} - 0}{t - 0}$$

tend bien, aussi, vers 0 avec $t > 0$, et la dérivée à droite en 0 aussi.

Maintenant, pour $k \geqslant 1$ quelconque, on se convainc aisément qu'il existe un polynôme P_k de degré $2k$ à coefficients entiers tel que :

$$\frac{d^k}{dt^k}\big(e^{-1/t}\big) = P_k\left(\frac{1}{t}\right) e^{-1/t},$$

donc la limite vaut encore 0 lorsque $t \underset{>0}{\longrightarrow} 0$, et de même pour la dérivée à droite en 0 de :

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\big(e^{-1/t}\big). \qquad \square$$

Grâce à cette assertion, la fonction ψ s'avère alors être la composée :

$$\psi(x) = \varphi\big(1 - |x|^2\big)$$

de cette fonction φ qui est $\mathscr{C}^\infty$! avec la fonction $x \longmapsto 1-|x|^2$, laquelle est aussi $\mathscr{C}^\infty$! $\square$

10. Convolution et dérivation

Nous allons maintenant « découvrir » que la convolution $f * g$ est une opération *régularisante* « magique », au sens où si l'une des deux fonctions convolées, disons f, jouit d'une régularité importante, alors *quelle que puisse être l'irrégularité de la fonction g*, le produit de convolution $f * g$ *hérite* entièrement de la régularité de f. Il peut même se produire que $f * g$ possède un type de régularité qui devient supérieur simultanément à celui de f et à celui de g, dans certaines circonstances où f et g mettent en commun leurs meilleures propriétés.

Commençons par le cas où f est continûment différentiable à support compact, et où g n'est qu'intégrable, donc éventuellement très irrégulière, très discontinue.

Théorème 10.1. *Étant donné deux fonctions :*

$$f \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad g \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

leur convolée $f * g$, qui existe dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ partout sur $\mathbb{R}^d$, et ses dérivées partielles d'ordre 1 s'obtiennent simplement en convolant g avec les dérivées partielles correspondantes de f :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big(f * g\big) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) * g \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}.$$

Autrement dit, la dérivation passe sous le signe d'intégration :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(f * g\big)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\,g(t)\,dt\right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-t)\,g(t)\,dt \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) * g(x).\end{aligned}$$

Démonstration. Traitons d'abord le cas de la dimension $d = 1$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ petit. Par linéarité, on calcule :

$$\frac{f*g(x+h) - f*g(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(x+h-t) - f(x-t)}{h}\right) g(t)\,dt,$$

d'où sans effort en soustrayant $f' * g(x)$:

$$\frac{f*g(x+h) - f*g(x)}{h} - f' * g(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(x-t+h) - f(x-t)}{h} - f'(x-t)\right) g(t)\,dt.$$

Maintenant, la formule de Taylor avec reste intégral — que nous allons reconstituer soigneusement — va nous permettre de justifier le fait que le quotient sous l'intégrale tend uniformément vers $f'(x-t)$.

À cet effet, posons :

$$z := x - t,$$

considéré comme constant. La primitive de f' est f :

$$f(z+h) - f(z) = \int_z^{z+h} f'(u)\,du,$$

donc en soustrayant $h\,f'(z)$, envisagé comme constant :

$$f(z+h) - f(z) - h\,f'(z) = \int_z^{z+h} \big(f'(u) - f'(z)\big)\,du.$$

En effectuant le changement de variable d'intégration :

$$\begin{aligned} u &=: z + h\,v, \\ \text{d'où :} \qquad du &= 0 + h\,dv, \end{aligned}$$

on introduit une nouvelle variable d'intégration v qui varie dans $[0,1]$, ce qui donne :

$$f(z+h) - f(z) - h\,f'(z) = h\,\underbrace{\int_0^1 \big(f'(z+h\,v) - f'(z)\big)\,dv}_{=:\,\mathsf{Reste}_{f'}(z,h)}.$$

Autrement dit après division par h :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) = \mathsf{Reste}_{f'}(z,h). \tag{10.2}$$

Or la dérivée $f' \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R})$ est uniformément continue (puisqu'elle est à support compact, grâce à un lemme déjà vu), à savoir on a une *inégalité d'uniforme continuité* :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\eta = \eta(\varepsilon) \quad \Big(|z_2 - z_1| \leqslant \eta \implies \big|f'(z_2) - f'(z_1)\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\,z_1, z_2 \in \mathbb{R}\Big).$$

Alors pour tout $|h| \leqslant \eta(\varepsilon)$, puisqu'on a trivialement pour tout $v \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} \big|z + h\,v - z\big| &\leqslant |h\,v| \\ &\leqslant \eta(\varepsilon), \end{aligned}$$

l'inégalité d'uniforme continuité s'applique et permet de majorer :

$$\begin{aligned} \big|\mathsf{Reste}_{f'}(z,h)\big| &\leqslant \int_0^1 \big|f'(z+hv) - f'(z)\big|\,dv \\ &\leqslant \int_0^1 \varepsilon\,dv \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc en revenant à l'équation (10.2), écrite avec $z := x - t$, multipliée par $g(t)$ et intégrée, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f*g(x+h)-f*g(x)}{h}-f'*g(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \mathsf{Reste}_{f'}(x-t,h)\,g(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \big|g(t)\big|\,dt \\ &= \varepsilon\,\|g\|_{L^1},\end{aligned}$$

et ce, pour tout $|h| \leqslant \eta(\varepsilon)$, ce qui conclut (exercice mental) dans le cas de la dimension $d = 1$.

Ensuite, en dimension $d \geqslant 1$ quelconque, on procède d'une manière complètemement similaire, en considérant des petits vecteurs non nuls :

$$h_i = \big(0,\dots,0,h,0,\dots,0\big),$$

avec $h \in \mathbb{R}^*$ à la i-ème position, et on obtient, en termes de :

$$\mathsf{Reste}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(z,h) := \int_0^1 \bigg(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(z+h_i\,v\big)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\bigg)\,dv,$$

l'équation :

$$\frac{f*g(x+h_i\,v)-f*g(x)}{h}-\frac{\partial f}{\partial x_i}*g(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathsf{Reste}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}\big(x-t,\,h\big)\,g(t)\,dt,$$

avec les mêmes estimées conclusives (exercice de compréhension). □

Théorème 10.3. [Corollaire direct] *Étant donné deux fonctions :*

$$f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad g \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

leur convolée $f * g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ partout sur $\mathbb{R}^d$, et ses dérivées partielles d'ordre quelconque s'obtiennent simplement en convolant g avec les dérivées partielles correspondantes de f :

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\big(f*g\big) = \bigg(\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\bigg)*g \qquad {\scriptstyle(\forall\,(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\,\in\,\mathbb{N}^d)}.$$

Démonstration. Raisonner par récurrence sur l'ordre des dérivées, et leur ré-appliquer successivement le théorème qui précède. Exercice de compréhension : formuler un théorème valable pour $f \in \mathscr{C}_c^\kappa(\mathbb{R}^d)$ avec $\kappa \geqslant 1$. □

Définition 10.4. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on dit que $f * \varphi$ est une *régularisée* de f par la fonction φ.

Dans le même état d'esprit, on peut établir d'autres résultats analogues qui sont des variations de ces théorèmes, et nous les proposons en exercice.

Théorème 10.5. *Soit $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, soit un exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, et soit $g \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$. Alors $f * g$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ et satisfait :*

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\big(f*g\big) = \bigg(\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\bigg)*g \qquad {\scriptstyle(\forall\,(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\,\in\,\mathbb{N}^d)}.$$

Démonstration. Détailler les arguments complets est proposé comme Exercice 17. □

11. Fonctions-plateau (de Saclay ?)

Les fonctions-plateau jouent un rôle essentiel en Analyse lisse : elles permettent en effet de *localiser* l'étude au voisinage d'un point, ou au voisinage d'un compact arbitraire.

Définition. On appelle *fonction-plateau* — le génitif « de Saclay » n'existe que dans les définitions qu'on donne à Orsay — sur $\mathbb{R}^d$ relative à deux boules concentriques, toute fonction $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant :

(i) pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$0 \leqslant \chi(x) \leqslant 1;$$

(ii) il existe $0 < a < b$ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } |x| \leqslant a, \\ 0 & \text{lorsque } |x| \geqslant b. \end{cases}$$

Le résultat principal de cette section va établir que tout ensemble fermé-borné *absolument quelconque* dans $\mathbb{R}^d$, *i.e.* tout compact $K \Subset \mathbb{R}^d$ — aux formes éventuellement les plus étranges possibles —, admet des fonctions-plateaux égales à 1 sur lui, et égales à 0 dans le complémentaire :

$$\mathbb{R}^d \big\backslash K_\varepsilon$$

d'un voisinage ouvert arbitrairement petit $K_\varepsilon \supset K$ de lui, disons :

$$K_\varepsilon := \big\{ x \in \mathbb{R}^d : \ \mathsf{dist}(x, K) < \varepsilon \big\},$$

avec $\varepsilon > 0$ très petit. Or la fonction indicatrice $\mathbf{1}_K$ de K, égale à 1 sur K, et à 0 sur le complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash K$ ne convient pas tout à fait, parce qu'elle n'est pas $\mathscr{C}^\infty$! Qu'à cela ne tienne, nous allons *régulariser cette fonction indicatrice* $\mathbf{1}_K$ *de* K en la convolant avec une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact ρ_ε dont le support est ε-concentré autour de $0 \in \mathbb{R}^d$. Commençons par demander seulement que le support soit contenu dans la boule unité fermée.

Lemme 11.1. *Il existe une fonction $\rho \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant :*

(i) $\rho \geqslant 0$ *sur* $\mathbb{R}^d$ *;*

(ii) $\mathsf{supp}\, \rho \subset \overline{B(0,1)}$ *;*

(iii) $1 = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\, dx$.

Démonstration. Nous avons vu il y a quelques instants au Lemme 9.1 que la fonction :

$$\psi(x) := \begin{cases} \exp\bigg(-\dfrac{1}{1 - |x|^2} \bigg) & \text{lorsque } |x| < 1, \\ 0 & \text{lorsque } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

remplit les conditions **(i)** et **(ii)**. Il suffit alors seulement de la dilater par une constante appropriée pour assurer que son intégrale soit égale à 1 :

$$\rho(x) := \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} \psi}\, \psi(x),$$

ce qui conclut. □

Une simple dilatation-renormalisation :

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\,\rho\bigg(\frac{x}{\varepsilon}\bigg),$$

fournit alors la fonction recherchée ; ε apparaît à la puissance d-ème au dénominateur, car la mesure de Lebesgue $dx = dx_1 \cdots dx_d$ sur $\mathbb{R}^d$ est d-dimensionnelle. En résumé :

Corollaire 11.2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\rho_\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant :*
(i) $\rho_\varepsilon \geqslant 0$ *sur* $\mathbb{R}^d$ *;*
(ii) $\mathsf{supp}\,\rho_\varepsilon \subset \overline{B(0,\varepsilon)}$ *;*
(iii) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1$*, c'est-à-dire* $1 = \int_{|x| \leqslant \varepsilon} \rho_\varepsilon(x)\,dx$. □

Géométriquement et géographiquement, le bord du plateau de Saclay est plein d'irrégularités, de ravines, de semi-falaises, de sentiers qui le mordent, et pourtant, le plateau existe ! Mathématiquement, voici ce qui lui correspond.

Proposition 11.3. [Existence de fonctions-plateau ε-indicatrices $\mathscr{C}^\infty$] *Étant donné un ensemble mesurable borné quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$ (pas forcément fermé), pour tout $\varepsilon > 0$, si on pose :*

$$E_\varepsilon := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ \mathsf{dist}(x,E) < \varepsilon\big\},$$
$$\widetilde{E}_\varepsilon := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ \mathsf{dist}(x,E) \leqslant \varepsilon\big\}\ \supset \overline{E}_\varepsilon,$$

alors il existe une fonction-plateau $\chi_\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ satisfaisant :
(i) $0 \leqslant \chi_\varepsilon(x) \leqslant 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$ *;*
(ii) $\chi_\varepsilon(x) \equiv 1$ *pour tout* $x \in \overline{E} =$ *adhérence de* E *;*
(iii) $\chi_\varepsilon(x) \equiv 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d \big\backslash E_{3\varepsilon}$.

Le fait crucial, c'est que χ_ε est $\mathscr{C}^\infty$: elle « descend » du niveau 1 vers le niveau 0 de la mer, de manière certes nécessairement « abrupte » lorsque $\varepsilon > 0$ est petit, mais aussi lisse qu'un toboggan de longueur $\leqslant 3\,\varepsilon$ — donc au final, mieux que le plateau de Saclay !

Démonstration. Comme nous l'avons déjà anticipé, il va suffire de prendre la convolée de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\widetilde{E}_\varepsilon}$ avec la fonction ρ_ε :

$$\chi_\varepsilon := \mathbf{1}_{\widetilde{E}_\varepsilon} * \rho_\varepsilon.$$

Autrement dit :

$$\chi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\widetilde{E}_\varepsilon}(x-t)\,\rho_\varepsilon(t)\,dt,$$

ce qui montre instantanément que $\chi_\varepsilon \geqslant 0$, et aussi en majorant la fonction indicatrice simplement par 1, que :

$$\begin{aligned}\chi_\varepsilon(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} 1 \cdot \rho_\varepsilon(t)\,dt \\ &\leqslant 1,\end{aligned}$$

ce qui donne **(i)**.

Ensuite, montrons que $\chi_\varepsilon\big|_E \equiv 1$, d'où il découlera par continuité que $\chi_\varepsilon\big|_{\overline{E}} \equiv 1$ aussi.

Le support de ρ_ε étant contenu dans la boule fermée $\overline{B}(0,\varepsilon)$, on a en fait :

$$\chi_\varepsilon(x) = \int_{|t| \leqslant \varepsilon} \mathbf{1}_{\widetilde{E}_\varepsilon}(x-t)\,\rho_\varepsilon(t)\,dt.$$

Assertion 11.4. *Pour tout $x \in E$ et tout $|t| \leqslant \varepsilon$, on a $\mathbf{1}_{\widetilde{E}_\varepsilon}(x-t) = 1$.*

Démonstration. Autrement dit, il s'agit de voir que $x - t \in \widetilde{E}_\varepsilon$, *i.e.* que :

$$\mathsf{dist}(x-t, E) \leqslant \varepsilon.$$

Mais comme $x \in E$, on a au moins :

$$\mathsf{dist}(x-t, E) \leqslant \mathsf{dist}(x-t, x) = |t| \leqslant \varepsilon,$$

ce qu'il fallait voir. □

Donc dans l'intégrale ci-dessus, on peut remplacer identiquement par 1 la fonction indicatrice, ce qui donne, pour tout $x \in E$:

$$\chi_\varepsilon(x) = \int_{|t|\leqslant\varepsilon} 1 \cdot \rho_\varepsilon(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(t)\,dt = 1,$$

et achève **(ii)**.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^d \big\backslash E_{3\varepsilon}$. On a encore :

$$\chi_\varepsilon(x) = \int_{|t|\leqslant\varepsilon} \mathbf{1}_{\widetilde{E}_\varepsilon}(x-t)\,\rho_\varepsilon(t)\,dt.$$

Assertion 11.5. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \big\backslash E_{3\varepsilon}$ et tout $|t| \leqslant \varepsilon$, on a :*

$$\mathsf{dist}(x-t, E) > \varepsilon.$$

Démonstration. L'hypothèse que $\mathsf{dist}(x, E) \geqslant 3\,\varepsilon$ signifie :

$$\forall\, y \in E \qquad \mathsf{dist}(x, y) \geqslant 3\,\varepsilon.$$

Avec $|t| \leqslant \varepsilon$, supposons par l'absurde que $\mathsf{dist}(x-t, E) \leqslant \varepsilon$. Ceci signifie que pour tout $\varepsilon' \ll \varepsilon$, il existe $y \in E$ avec :

$$\mathsf{dist}(x-t, y) \leqslant \varepsilon + \varepsilon'.$$

Mais alors l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\mathsf{dist}(x, y) &\leqslant \mathsf{dist}(x, x-t) + \mathsf{dist}(x-t, y) \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon' \\
&< 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

apporte une contradiction. □

Pour terminer, on a donc toujours $x - t \notin \widetilde{E}_\varepsilon$ dans l'intégrale ci-dessus, donc $\mathbf{1}_{\widetilde{E}_\varepsilon}(x-t) \equiv 0$, d'où l'intégrale s'annule, ce qui achève **(iii)**. □

Théorème 11.6. *Soit $K \Subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble compact quelconque et soit $\Omega \supset K$ un voisinage ouvert quelconque de K, éventuellement arbitrairement resserré autour de K. Alors il existe une fonction-plateau $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ telle que $0 \leqslant \chi(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ satisfaisant :*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } x \in K; \\ 0 & \text{lorsque } x \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega. \end{cases}$$

Démonstration. Pour pouvoir appliquer la proposition qui précède, il suffit de faire voir qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\overline{K}_{3\varepsilon} = \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \ \mathsf{dist}(x, K) \leqslant 3\varepsilon\big\} \subset \Omega.$$

Mais puisque Ω est un ouvert contenant K, la distance :

$$\begin{aligned}\mathsf{dist}\big(K, \mathbb{R}^d \backslash \Omega\big) &:= \inf_{\substack{x \in K \\ y \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega}} |x - y| \\ &=: \delta > 0\end{aligned}$$

est strictement positive (exercice de topologie métrique), donc en prenant $\varepsilon < \frac{\delta}{4}$, le support de la fonction χ_ε de la proposition qui précède satisfait :

$$\mathsf{supp}\, \chi_\varepsilon \subset \overline{K}_{3\varepsilon} \subset \Omega,$$

ce qui conclut. □

12. Suites régularisantes et densité de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$

En revenant aux fonctions $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\, \rho\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$ utilisées ci-dessus, et en prenant :

$$\varepsilon := \frac{1}{j} \qquad\qquad (j \geqslant 1),$$

on obtient une suite de fonction $(\rho_j)_{j=1}^\infty$ satisfaisant ce qui suit.

Définition 12.1. On appelle *suite régularisante* dans $\mathbb{R}^d$ toute suite :

$$\big(\rho_j\big)_{j=1}^\infty$$

de fonctions satisfaisant :

(i) $\rho_j \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$;

(ii) $\rho_j \geqslant 0$;

(iii) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_j = 1$;

(iv) $\mathsf{supp}\, \rho_j \subset \overline{B}(0, \frac{1}{j})$.

Alors nous pouvons effectuer une *observation synthétique fondamentale :* toute suite régularisante est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, mais bien mieux que les φ_j dont il est question dans le Théorème 8.3, parce que ces ρ_j sont maintenant de classe $\mathscr{C}^\infty$! On en déduit donc sans effort l'énoncé suivant, dans lequel les fonctions-approximantes $\rho_j * f$ sont $\mathscr{C}^\infty$.

Théorème 12.2. *Si $(\rho_j)_{j=1}^\infty$ est une suite régularisante appartenant à $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, les deux énoncés suivants sont satisfaits.*

(1) *Pour toute fonction f uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$:*

$$f \in \mathscr{C}^0_{\text{unif}^{\text{t}}} \cap L^\infty(\mathbb{R}^d),$$

la suite des convolées $\big(f * \rho_j\big)_{j \geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^d$:

$$0 = \lim_{j \to \infty} \big\| f - \rho_j * f \big\|_{\mathscr{C}^0},$$

et chacune des fonctions $\rho_j * f$ de cette suite est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ tout entier.

(2) *Pour tout réel* $\mathsf{p} \in [1, \infty[$ *et toute fonction :*

$$f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d),$$

la suite des convolées $\big(f * \rho_j\big)_{j=1}^{\infty}$ *converge vers* f *en norme* L^{p} *:*

$$0 = \lim_{j \to \infty} \big\| f - \rho_j * f \big\|_{L^{\mathsf{p}}},$$

et chacune des fonctions $\rho_j * f$ *de cette suite est* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^d$ *tout entier.* □

Enfin, on obtient une conséquence remarquable : les fonctions les plus lisses possible, à savoir les fonctions $\mathscr{C}_c^\infty$, même à support compact, approximent à volonté les fonctions irrégulières continues ou intégrables. Cet énoncé raffine donc considérablement le théorème de densité des fonctions étagées (non lisses !), voire continues à support compact, dans l'espace des fonctions mesurables ou intégrables.

Voici donc un résultat profond et très important pour toute l'Analyse mathématique.

Théorème 12.3. *L'espace* $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *des fonctions indéfiniment différentiables à support compact est* dense *dans* $\mathscr{C}^0_{\mathrm{unif^t}} \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ *:*

$$\forall\, g \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{unif^t}} \cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, f_\varepsilon \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \big\| g - f_\varepsilon \big\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

ainsi que dans $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall\, g \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, f_\varepsilon \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \big\| g - f_\varepsilon \big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. Traitons seulement le cas L^{p}. Soit donc $g \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Par densité — maintes fois utilisée auparavant — de $\mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$, il existe $h \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ avec :

$$\| g - h \|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant, le théorème qui précède fournit un entier $j(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\big\| h - h * \rho_{j(\varepsilon)} \big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Or nous avons vu dans le Théorème 10.5 que $h * \rho_{j(\varepsilon)}$ est $\mathscr{C}^\infty$, et de surcroît, elle est à support compact, car une application de la Proposition 4.2 donne :

$$\begin{aligned} \mathsf{supp}\, h * \rho_{j(\varepsilon)} &\subset \overline{\mathsf{supp}\, h + \mathsf{supp}\, \rho_{j(\varepsilon)}} \\ &\subset \Big\{ x \in \mathbb{R}^d \colon\ \mathsf{dist}\, (x, \mathsf{supp}\, h) \leqslant \tfrac{1}{j(\varepsilon)} \Big\}, \end{aligned}$$

ensemble manifestement fermé et borné !

Pour terminer, avec le choix évident :

$$f_\varepsilon := h * \rho_{j(\varepsilon)},$$

une simple inégalité triangulaire :

$$\big\| g - f_\varepsilon \big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} = \big\| g - h + h - h * \rho_{j(\varepsilon)} \big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2},$$

conclut les arguments. □

13. Théorème de Borel

Une application élémentaire des fonctions-plateau est le :

Théorème 13.1. [de Borel] *Pour toute suite de nombres complexes :*

$$\big(a_n\big)_{n\geqslant 0}, \qquad a_n \in \mathbb{C},$$

il existe une fonction indéfiniment différentiable :

$$\begin{aligned} f \in \mathscr{C}^\infty\big(\mathbb{R}, \mathbb{C}\big),& \\ x \longmapsto f(x),& \end{aligned}$$

dont les n-èmes dérivées en $x = 0$ sont précisément les a_n :

$$f^{(n)}(0) = a_n \qquad\qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}),$$

à savoir de manière équivalente, dont la série de Taylor à l'origine $x = 0$ est prescrite par les a_n :

$$\mathsf{Taylor}_0^\infty(f) = \sum_{n\geqslant 0} a_n\,\frac{x^n}{n!}.$$

Bien entendu, si la décroissance des modules $|a_n|$ est assez forte lorsque $n \to \infty$, la série entière brute :

$$\sum_{n=0}^\infty a_n\,\frac{x^n}{n!}$$

peut fort bien avoir un rayon de convergence strictement positif, voire même infini, ce qui donnerait immédiatement une solution au problème, mais en fait, le théorème *n'exige, et c'est sa force, aucune hypothèse sur la taille des a_n*. Par exemple, ce théorème s'applique aussi pour :

$$a_n := \big(n!\big)^2,$$

et l'on sait pertinemment que la série infinie :

$$\sum_{n\geqslant 0} n!\,x^n$$

a un rayon de convergence *nul*, égal à 0, puisque :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\textsf{rayon de convergence}} = \mathsf{lim\,sup}\,\sqrt[n]{|a_n|} = \mathsf{lim\,sup}\,\sqrt[n]{n!} &= \mathop{\mathsf{lim\,sup}}_{n\to\infty} \bigg(\Big(\frac{n}{e}\Big)^n\sqrt{2\pi n}\bigg)^{\frac{1}{n}} \\ &= \infty, \end{aligned}$$

grâce à la formule (connue) de Stirling :

$$n! \sim \Big(\frac{n}{e}\Big)^n\sqrt{2\pi n}.$$

Ainsi faut-il une nouvelle *idée* pour passer par-dessus cet obstacle, et cette nouvelle *idée*, ce sont les fonctions-plateau qui vont nous l'offrir ... *sur un plateau* !

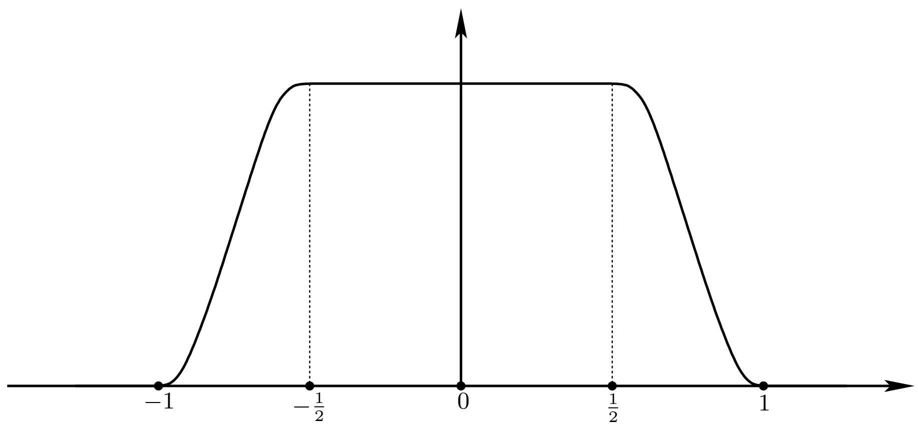
Démonstration. Introduisons en effet une fonction-plateau

$$\varphi \in \mathscr{C}^\infty\big(\mathbb{R},\, [0,1]\big),$$

satisfaisant :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } |x| \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 0 & \text{lorsque } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

On peut construire une telle fonction en adaptant légèrement les arguments qui précèdent. En tout cas, le graphe d'une telle fonction a l'aspect très parlant suivant :



Maintenant, puisque $\varphi(x) \equiv 1$ pour $|x| \leqslant \frac{1}{2}$, on a :

$$\varphi(x) \cdot a_n \frac{x^n}{n!} \equiv 1 \cdot a_n \frac{x^n}{n!},$$

et donc la propriété évidente des dérivées en $x = 0$:

$$\frac{d^k}{dx^k}\bigg(a_n \frac{x^n}{n!}\bigg)\bigg|_{x=0} = \begin{cases} a_n & \text{lorsque } k = n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est encore satisfaite lorsqu'on multiplie par $\varphi(x)$, et même plus généralement encore, lorsqu'on multiplie par :

$$\varphi\big(\lambda\, x\big)$$

pour $\lambda > 0$ arbitraire, puisque $\varphi(\lambda\, x) \equiv 1$ quand $|x| \leqslant \frac{1}{2\lambda}$, à savoir on a encore en $x = 0$:

$$\frac{d^k}{dx^k}\bigg(\varphi\big(\lambda\, x\big) \cdot a_n \frac{x^n}{n!}\bigg)\bigg|_{x=0} = \begin{cases} a_n & \text{lorsque } k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'idée principale va alors consister à choisir des $\lambda = \lambda_n$ qui dépendent de n pour corriger la série $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$ de manière à la rendre convergente. Plus précisément :

Proposition 13.2. *On peut choisir des $\lambda_n \geqslant 1$ pour tout $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ de telle sorte que la série :*

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sum_{n \geqslant 0} \underbrace{\varphi\big(\lambda_n x\big) \cdot a_n \frac{x^n}{n!}}_{=: f_n(x)} \\ &= \sum_{n \geqslant 0} f_n(x) \end{aligned}$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$*, donc uniformément, et de telle sorte de plus que pour tout ordre de dérivation arbitraire* $k = 0, 1, 2, \dots,$ *la même série dérivée* k *fois terme à terme :*

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}(x)$$

converge aussi normalement sur $\mathbb{R}$*, donc uniformément, ce qui assure grâce à un théorème connu que la fonction est indéfiniment différentiable :*

$$f \,\in\, \mathscr{C}^\infty\big(\mathbb{R}, \mathbb{C}\big).$$

De plus, le choix explicite simple :

$$\lambda_n := \mathsf{max}\big(1,\, |a_n|\big)$$

convient.

Démonstration. Comme la fonction φ est $\mathscr{C}^\infty$, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, sa dérivée k-ème $\varphi^{(k)}$ est continue, et comme elle est identiquement nulle pour $|x| \geqslant 1$, les quantités :

$$\max_{x\,\in\,\mathbb{R}} \big|\varphi^{(k)}(x)\big| = \max_{|x|\,\leqslant\, 1} \big|\varphi^{(k)}(x)\big| \,=:\, M_k \,<\, \infty$$

sont toutes finies.

Fixons maintenant $k \in \mathbb{N}$ un entier quelconque. Rappelons que la dérivée k-ème d'un produit de fonctions est donnée par la formule :

$$\big(f\cdot g\big)^{(k)} = \sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!}\, f^{(k_1)}\cdot g^{(k_2)}.$$

Cette formule appliquée ici au produit :

$$f_n(x) = a_n\,\varphi\big(\lambda_n\,x\big)\cdot\frac{x^n}{n!}$$

donne :

$$\frac{d^kf_n}{dx^k}(x) = a_n \sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!}\,\big(\lambda_n\big)^{k_1} \underbrace{\frac{d^{k_1}\varphi}{dx^{k_1}}\big(\lambda_n\,x\big)}_{\substack{\equiv\, 0 \text{ pour } |x|\geqslant \frac{1}{\lambda_n} \\ \text{et } \leqslant\, M_{k_1} \text{ en valeur absolue}}} \cdot\frac{x^{n-k_2}}{(n-k_2)!}.$$

Le membre de droite étant identiquement nul pour $|x| \geqslant \frac{1}{\lambda_n}$, on peut majorer la valeur absolue en supposant $|x| \leqslant \frac{1}{\lambda_n}$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d^k f_n}{dx^k}(x)\right| &\leqslant |a_n| \sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!}\,\big(\lambda_n\big)^{k_1}\,M_{k_1}\,\frac{|x|^{n-k_2}}{(n-k_2)!} \\
&\leqslant |a_n|\,\mathsf{max}\big(M_0,\dots,M_k\big) \sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!}\,\big(\lambda_n\big)^{k_1}\,\frac{\frac{1}{(\lambda_n)^{n-k_2}}}{(n-k_2)!} \\
&\leqslant |a_n|\,\mathsf{max}\big(M_0,\dots,M_k\big) \sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!}\,\big(\lambda_n\big)^{k_1+k_2-n}\,\frac{1}{(n-k_2)!} \\
&= \frac{|a_n|\,\mathsf{max}\big(M_0,\dots,M_k\big)}{\big(\lambda_n\big)^{n-k}} \sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!}\,\underbrace{\frac{1}{(n-k_2)!}}_{\leqslant \frac{1}{(n-k)!}} \\
&\leqslant \frac{|a_n|\,\mathsf{max}\big(M_0,\dots,M_k\big)}{\big(\lambda_n\big)^{n-k}\,(n-k)!}\,\underbrace{\sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!}}_{(1+1)^k\,=\,2^k} \\
&= \frac{|a_n|\,\mathsf{max}\big(M_0,\dots,M_k\big)\,2^k}{\big(\lambda_n\big)^{n-k}\,(n-k)!}
\end{aligned}$$

Si donc on choisit :

$$\lambda_n := \mathsf{max}\big(1,\,|a_n|\big),$$

alors pour tout $n \geqslant k+1$ on a :

$$\big(\lambda_n\big)^{n-k} \;\geqslant\; \lambda_n \;\geqslant\; |a_n|,$$

d'où :

$$\frac{1}{\big(\lambda_n\big)^{n-k}} \;\leqslant\; \frac{1}{|a_n|},$$

et enfin, toujours pour $n \geqslant k+1$, en achevant les majorations qui précèdent :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d^k f_n}{dx^k}(x)\right| &\leqslant \frac{\mathsf{max}\big(M_0,\dots,M_k\big)\,2^k}{(n-k)!} \\
&= \mathsf{constante}_k\,\frac{1}{(n-k)!}.
\end{aligned}$$

À présent, la convergence normale de la série dérivée k fois terme à terme est aisée, en tronquant comme on s'y attend :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0}\left|\frac{d^kf_n}{dx^k}(x)\right| &\leqslant \underbrace{\sum_{n=0}^{k}\left|\frac{d^kf_n}{dx^k}(x)\right|}_{\text{somme finie}} + \mathsf{constante}_k \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{(n-k)!} \\
&= \mathsf{quantit\acute{e}\ finie} + \mathsf{constante}_k \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!} \\
&= \mathsf{quantit\acute{e}\ finie} + \mathsf{constante}_k \big(e^1-1\big) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

En conclusion, la fonction $f(x)$ est bien $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. □

La fin de la démonstration du théorème tombe maintenant vraiment comme un fruit mûr gorgé de sève. Soit $k \in \mathbb{N}$ un ordre de dérivation quelconque. Grâce à la convergence normale-uniforme, la dérivée k-ème en $x = 0$ de la fonction $f(x)$ s'obtient donc simplement en dérivant ses termes k fois et en sommant :

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(0).$$

Or puisque :

$$\varphi\big(\lambda_n\,x\big) \equiv 1 \qquad \text{pour } |x| \leqslant \frac{1}{2\,\lambda_n},$$

on a trivialement :

$$\begin{aligned}
f_n^{(k)}(0) &= \frac{d^kf_n}{dx^k}\bigg|_{x=0} \\
&= \frac{d^k}{dx^k}\bigg(\varphi\big(\lambda_n\,x\big)\cdot a_n\,\frac{x^n}{n!}\bigg)\bigg|_{x=0} \\
&= \frac{d^k}{dx^k}\bigg(a_n\,\frac{x^n}{n!}\bigg)\bigg|_{x=0} \\
&= \begin{cases} a_k & \text{lorsque } n=k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}
\end{aligned}$$

et donc au final :

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(0) \\
&= a_k,
\end{aligned}$$

ce qui est l'assignation désirée. □

14. Exercices

Exercice 1. Montrer que la propriété :

$$0 = \lim_{a\to 0}\big\|\tau_a\,f - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}},$$

vraie pour $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$ est *fausse* pour $\mathsf{p} = \infty$. *Indication :* En dimension $d = 1$, sur $\mathbb{R}$, considérer la fonction indicatrice du segment fermé $[\alpha, \beta]$ pour deux nombres réels $-\infty < \alpha < \beta < \infty$.

Exercice 2. Soient deux réels $0 < \alpha < \beta < \infty$. On introduit les deux fonctions indicatrices :

$$f := \mathbf{1}_{[-\alpha,\alpha]} \qquad \text{et} \qquad g := \mathbf{1}_{[-\beta,\beta]}.$$

(a) Montrer que f et g sont convolables.

(b) Montrer que leur convolution possède l'expression explicite :

$$f * g(x) = \begin{cases} 2\,\alpha & \text{lorsque } \ 0 \leqslant |x| \leqslant \beta - \alpha, \\ \beta + \alpha - |x| & \text{lorsque } \ \beta - \alpha \leqslant |x| \leqslant \beta + \alpha, \\ 0 & \text{lorsque } \ \beta + \alpha < |x|. \end{cases}$$

(c) Quelle est la régularité de f et de g ? Quelle est celle de $f * g$? S'améliore-t-elle ?

Exercice 3. Soient trois fonctions Lebesgue-intégrables $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que le produit de convolution est commutatif :

$$f * g = g * f.$$

(b) Montrer que le produit de convolution est associatif :

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Exercice 4. Sur $\mathbb{R}$, on introduit les trois (combinaisons de) fonctions indicatrices :

$$f := \mathbf{1}_{[0,\infty[}, \qquad g := \mathbf{1}_{[-1,0]} - \mathbf{1}_{[0,1]}, \qquad h := \mathbf{1}_{\mathbb{R}}.$$

(a) Montrer que f et g sont convolables et que :

$$f * g(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \ |x| \geqslant 1, \\ 1 + x & \text{lorsque } \ -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 - x & \text{lorsque } \ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

(b) Montrer que $f * g$ et h sont convolables et que :

$$(f * g) * h \equiv 1.$$

(c) Montrer que g et h sont convolables, puis que f est convolable avec $g * h$ et enfin que :

$$f * (g * h) \equiv 0.$$

(d) Interpréter intelligemment ce paradoxe. D'ailleurs, si f et g sont convolables, a-t-on toujours $f*g = g*f$? (oui, mais pourquoi ?).

Exercice 5. Soient $f = f(x)$ et $g = g(x)$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, l'une au moins étant à support compact. Montrer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la relation :

$$(x^k\, f) * g = \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!}\,\big(x^j\, f\big) * \big(x^{k-j}\, g\big).$$

Exercice 6. Étant donné une fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ identiquement nulle sur les réels négatifs :

$$f\big|_{]-\infty,0]} \equiv 0,$$

sa primitive nulle en 0 est donnée par l'intégrale $\int_0^x f(t)\,dt$, puis ses primitives d'ordre supérieur sont données en intégrant de telles intégrales. Cet exercice fournit des formules alternatives pour obtenir ces primitives itérées en utilisant la convolution.

Rappelons que la *fonction* Γ *d'Euler* est définie, pour tout réel $\alpha > 0$, par :

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt.$$

Elle satisfait $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geqslant 1$ (exercice de révision). On pourra admettre que la fonction B d'Euler, définie pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ par une intégrale, s'exprime au moyen de la fonction Γ :

$$\begin{aligned} B(\alpha,\beta) &\overset{\text{déf}}{:=} \int_0^1 t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\beta-1}\,dt \\ &\overset{\text{admis}}{=} \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

On pourra aussi redémontrer cette relation, au moins lorsque α et β sont tous deux des entiers $\geqslant 1$. On introduit alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions :

$$Y_\alpha := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\,x^{\alpha-1} & \text{lorsque } x > 0, \\ 0 & \text{lorsque } x \leqslant 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$Y_\alpha * Y_\beta = Y_{\alpha+\beta}.$$

(b) Soit donc une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ identiquement nulle sur $]-\infty, 0]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$F_n := Y_n * f.$$

Montrer pour commencer que F_1 est la primitive de f s'annulant en 0, satisfaisant d'ailleurs aussi $F_1'(0) = 0$.

(c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$F_n^{(n)}(x) = f(x) \qquad \text{avec } 0 = F_n(0) = F_n'(0) = \cdots = F_n^{(n)}(0).$$

Exercice 7. **(a)** Montrer par un exemple très simple qu'on ne peut en général pas convoler deux fonctions quelconques appartenant à l'espace des *fonctions localement intégrables sur* $\mathbb{R}$, défini par :

$$L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}) \overset{\text{déf}}{:=} \left\{ f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables}\colon \int_K |f(t)|\,dt < \infty \text{ pour tout compact } K \Subset \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Soient une première fonction :

$$f \in L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R})$$

et soit une deuxième fonction intégrable *et à support compact :*

$$g \in L^1_c(\mathbb{R}) \overset{\text{déf}}{:=} \big\{ g \in L^1(\mathbb{R})\colon \operatorname{supp} g \text{ est compact} \big\}.$$

Montrer que f et g sont convolables, à savoir que $f * g(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) En utilisant des fonctions indicatrices appropriées, montrer que $f * g \in L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que la convolution $f * g(x)$ est définie pour *tout* $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit $f \in L^{\mathsf{p}}_c(\mathbb{R})$ à support compact avec $1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$, soit $\mathsf{p}' := \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}$ l'exposant conjugué avec $1 \leqslant \mathsf{p}' \leqslant \infty$, et soit $g \in L^{\mathsf{p}'}_{\mathsf{loc}}$. Montrer que $f * g(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et est continue.

Exercice 10. Pour tout réel $a > 0$ strictement positif on définit sur $\mathbb{R}$ les deux familles à un paramètre de fonctions :

$$g_a(x) := e^{-a|x|} \qquad \text{et} \qquad h_a(x) := \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

(a) Montrer, en appliquant un théorème du cours, que pour tous $a, b > 0$, on a :

$$g_a * g_b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}),$$

puis aussi que :

$$g_a * g_b \in \bigcap_{1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty} L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}).$$

(b) Calculer explicitement :

$$g_a * g_b(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a^2-b^2}\left(a\,e^{-b|x|} - b\,e^{-a|x|}\right) & \text{lorsque } a \neq b, \\ e^{-a|x|}\left(\dfrac{1}{a} + |x|\right) & \text{lorsque } a = b. \end{cases}$$

(c) Montrer de même que :

$$h_a * h_b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \bigcap_{1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty} L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}).$$

(d) Calculer explicitement :

$$\begin{aligned} h_a * h_b &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,e^{-\frac{x^2}{2(a^2+b^2)}} \\ &= h_{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}$$

Exercice 11. Montrer en détail que les trois familles de noyaux, de Laplace, de Cauchy, et de Gauss, satisfont les trois conditions que doit satisfaire une approximation de l'unité.

Exercice 12. Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,dy = 1$. On pose :

$$\begin{aligned} \mathsf{c}_- &:= \int_{-\infty}^{0} g(y)\,dy, \\ \mathsf{c}_+ &:= \int_{0}^{\infty} g(y)\,dy. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}\,g\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$.

(a) Si f est une fonction continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}$, montrer qu'en tout point $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f * g_\varepsilon(x) = \mathsf{c}_-\,f(x+0) + \mathsf{c}_+\,f(x-0).$$

(b) Si de plus f ne présente pas de points de discontinuité sur un intervalle fermé donné, montrer que la convergence est uniforme sur cet intervalle.

(c) Que se passe-t-il si l'intervalle en question contient un point de discontinuité de f ?

Exercice 13. [Approximation polynomiale de Weierstrass, d'après Landau] Soient deux nombres réels $-\infty < a < b < \infty$, et soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ une fonction continue. L'objectif est d'établir qu'il existe une suite $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ de polynômes $p_n(x) \in \mathbb{C}[x]$ qui converge uniformément vers f :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big\|p_n - f\big\|_{\mathscr{C}^0} = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} \big|p_n(x) - f(x)\big|.$$

(a) Montrer qu'on peut supposer $f(a) = f(b) = 0$. Indication: Retrancher à f une fonction affine appropriée.

(b) On pose $R := b - a > 0$, et on introduit la fonction quadratique :

$$q(x) := \begin{cases} R^2 - x^2 & \text{lorsque } |x| \leqslant R, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Soit $0 < \delta < R$. Montrer, pour tout $n \geqslant 1$, l'inégalité :

$$\int_{-\infty}^{-\delta} \big(q(x)\big)^n\,dx + \int_{\delta}^{\infty} \big(q(x)\big)^n\,dx \leqslant 2R\,\big(q(\delta)\big)^n.$$

(c) Montrer aussi :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big(q(x)\big)^n\,dx \geqslant \delta\,\big(q(\tfrac{\delta}{2})\big)^n.$$

(d) Montrer, pour tout $\delta > 0$, que l'on a :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_{|x|\geqslant\delta} (q(x))^n\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} (q(x))^n\,dx}.$$

(e) Introduire :

$$\mathsf{Q}_n(x) \;:=\; \frac{\big(q(x)\big)^n}{\int_{\mathbb{R}} q^n},$$

et montrer que $\big(\mathsf{Q}_n\big)_{n=1}^{\infty}$ constitue une famille de bons noyaux sur $\mathbb{R}$, lorsque $n \longrightarrow \infty$.

(f) Avec $\widetilde{f}(x) := \mathbf{1}_{[a,b]}(x)\,f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$, en déduire la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$:

$$\widetilde{p}_n(x) \;:=\; \big(\mathsf{Q}_n * \widetilde{f}\big)(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{f}(x).$$

(g) Montrer que la restriction $p_n := \widetilde{p}_n\big|_{[a,b]}$ est un polynôme de degré $\leqslant 2n$, pour tout $n \geqslant 1$.

(h) Énoncer précisément le résultat obtenu.

Exercice 14. Soit $g \in L^1_c(\mathbb{R}^d)$ une fonction Lebesgue-intégrable à support compact.

(a) Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d)$ est une fonction dont le support n'est pas forcément compact, en s'inspirant de raisonnements qui précèdent, établir que la convolée :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\,g(t)\,dt$$

existe pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$, et qu'elle satisfait :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big(f * g\big) = \bigg(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg) * g \qquad\qquad (i = 1 \cdots d).$$

(b) Lorsque $f \in \mathscr{C}^\kappa(\mathbb{R}^d)$ pour un entier $\kappa \geqslant 1$ toujours sans restriction de compacité concernant son support, montrer que $f * g(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\kappa$ et satisfait, pour tous entiers positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_d \geqslant 0$ avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_d \leqslant \kappa$, la relation de percolation des dérivées :

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\big(f * g\big) = \bigg(\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\bigg) * g.$$

(c) Formuler une version $\mathscr{C}^\infty$ de cet énoncé.

(d) Déduire de ces considérations que pour tout polynôme :

$$P = P(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d],$$

la convolée $P * g$ est aussi un polynôme, dont le degré est inférieur ou égal à celui de P. Interpréter ce résultat en le reliant mentalement (et en faisant preuve d'intelligence synthétique) aux sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, ainsi qu'aux sommes de Cesàro-Fejér correspondantes.

Exercice 15. Montrer directement que la convolée sur $\mathbb{R}^d$ entre un polynôme et une fonction L^1 à support compact fournit toujours un polynôme.

Exercice 16. Étant donné une première fonction $f \in \mathscr{C}^\kappa(\mathbb{R}^d)$ *bornée sur* $\mathbb{R}^d$ *ainsi que ses dérivées d'ordre* $\leqslant \kappa$, et étant donné une deuxième fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ dont le support n'est maintenant plus supposé compact, montrer que la convolée $f * g(x)$ existe en tout point $x \in \mathbb{R}^d$, qu'elle est classe $\mathscr{C}^\kappa$ sur $\mathbb{R}^d$ tout entier et qu'elle vérifie de même :

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\big(f * g\big) = \bigg(\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}\bigg) * g \qquad\qquad (\alpha_1+\cdots+\alpha_d \leqslant \kappa),$$

en ayant pris bien soin de vérifier que le membre de droite a un sens. *Indication* : En dimension $d = 1$, on pourra traiter d'abord le cas $\kappa = 0$, puis le cas $\kappa = 1$, en utilisant à nouveau une formule de Taylor appropriée avec reste intégral, et en introduisant les quantités suivantes :

$$A_{\alpha_1,\dots,\alpha_d} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\bigg|\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}(x)\bigg| \;<\; \infty,$$

finies par hypothèse.

Exercice 17. Démontrer rigoureusement le Théorème 10.5.

Exercice 18. [Fonctions-plateau] Soient deux nombres réels $-\infty < a < b < \infty$.

(a) Montrer que la fonction :

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \leqslant a, \\ e^{-\frac{1}{x-a}}\, e^{-\frac{1}{b-x}} & \text{lorsque } a < x < b, \\ 0 & \text{lorsque } x \geqslant b, \end{cases}$$

est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(b) Montrer qu'il existe une fonction $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui commence par $F(x) \equiv 0$ pour $x \leqslant a$, qui est strictement croissante sur $[a, b]$, et qui termine par $F(x) \equiv 1$ pour $x \geqslant b$. Indication: Prendre $F(x) := c \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$, en choisissant une constante appropriée $c > 0$.

(c) Soit $\delta > 0$ assez petit pour que $a + \delta < b - \delta$. Montrer qu'il existe une fonction $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ satisfaisant :

- $g\big|_{]-\infty,a]\cup[b,\infty[} \equiv 0$;
- $g\big|_{[a+\delta,b-\delta]} \equiv 1$;
- g est strictement croissante sur $[a, a + \delta]$, et est strictement décroissante sur $[b - \delta, b]$.

Exercice 19. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que :

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R})$. Soit $(\rho_j)_{j\geqslant 1}$ une suite régularisante lisse à support compact, c'est-à-dire plus précisément une suite de fonctions $\rho_j \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ telles que $\rho_j \geqslant 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_j(x)\, dx = 1$ et $\mathsf{supp}\, \rho_j \subset [-\varepsilon_j, +\varepsilon_j]$ pour une certaine suite de réels ε_j tels que $0 < \varepsilon_j \leqslant 1$ satisfaisant $\lim_{j\to+\infty} \varepsilon_j = 0$.

(a) Montrer que toutes les régularisées $f * \rho_j$ de la fonction f sont identiquement nulles.

(b) Soit a un réel strictement positif et posons $b := a + 1$. Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \leqslant a$ et pour tout entier $j \geqslant 1$, on a :

$$\rho_j * f(x) = \rho_j * \big(\mathbf{1}_{[-b,b]}\, f\big)(x) = 0.$$

(c) Montrer que :

$$\big\|\mathbf{1}_{[-b,b]}\, f - \rho_j * \big(\mathbf{1}_{[-b,b]}\, f\big)\big\|_{L^1} \geqslant \int_{-a}^{+a} |f(x)|\, dx.$$

(d) En déduire que $f = 0$ presque partout.

Exercice 20. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ satisfaisant $f(0) = 0$ et $f'(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$. L'objectif est d'établir une inégalité due à Young d'après laquelle, pour tous $0 \leqslant b \leqslant a$:

$$a\, b \leqslant \int_0^a f(t)\, dt + \int_0^b f^{-1}(t)\, dt,$$

avec égalité lorsque, et seulement lorsque $b = a$.

(a) Montrer, en la dérivant, que la fonction auxiliaire :

$$x \longmapsto -x f(x) + \int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt,$$

est identiquement nulle.

(b) Soit maintenant $b > 0$ fixé. Conclure en étudiant le tableau de variation de la fonction :

$$a \longmapsto -a f(b) + \int_0^a f(t)\, dt + \int_0^{f(b)} f^{-1}(t)\, dt.$$

(c) Première application : déduire l'inégalité de Young classique d'après laquelle, pour toute paire d'exposants $\mathsf{p}, \mathsf{q} \in]1, \infty[$ qui sont conjugués :

$$\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{q}} = 1,$$

et toute paire de réels $a, b \geqslant 0$, on a :

$$ab \leqslant \frac{a^{\mathsf{p}}}{\mathsf{p}} + \frac{b^{\mathsf{q}}}{\mathsf{q}},$$

avec égalité lorsque et seulement lorsque $b = a^{\mathsf{p}-1}$.

(d) Deuxième application (utile pour traiter l'exercice qui suit) : déduire que pour toute paire de réels $a, b \geqslant 0$, on a :

$$ab \leqslant a \log(1+a) + e^b - 1.$$

Exercice 21. Sur le cercle unité :

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

on considère l'espace fonctionnel des fonctions :

$$\mathscr{E} := \Big\{ f \colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables telles que } \int_0^{2\pi} |f(t)| \log\big(1 + |f(t)|\big) \frac{dt}{2\pi} < \infty \Big\}.$$

(a) Montrer qu'elles satisfont toutes :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)| \frac{dt}{2\pi} < \infty,$$

i.e. qu'elles appartiennent à $L^1(\mathbb{T})$. On fixe maintenant une telle fonction f et l'objectif est d'étudier comment elle se convole avec certaines autres fonctions.

(b) Si $g \colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction mesurable ayant la propriété qu'il existe une constante $\lambda > 1$ telle que :

$$e^{\frac{|g|}{\lambda}} \in L^1(\mathbb{T}),$$

montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{T}$, on a l'inégalité :

$$\int_0^{2\pi} \big| f(t)\, g(\theta - t) \big| \frac{dt}{2\pi} \leqslant \lambda \int_0^{2\pi} |f(t)| \log\big(1 + \lambda\, |f(t)|\big) \frac{dt}{2\pi} + \int_0^{2\pi} \big(e^{\frac{|g(t)|}{\lambda}} - 1\big) \frac{dt}{2\pi}.$$

Indication : on pourra utiliser une inégalité de l'Exercice qui précède :

$$ab \leqslant a \log(1+a) + e^b - 1 \qquad\qquad (a, b \geqslant 0).$$

(c) Utiliser en la vérifiant l'inégalité valable pour deux nombres réels $c \geqslant 1$ et $e \geqslant 0$:

$$\log(1 + ce) \leqslant \log c + \log(1+e),$$

pour obtenir que la convolée $f * g(\theta)$ existe pour *tout* $\theta \in \mathbb{T}$, et qu'elle est majorée par l'expression-à-trois-girafes-$\int$:

$$\big| f * g(\theta) \big| \leqslant \lambda \log \lambda \int_0^{2\pi} |f(t)| \frac{dt}{2\pi} + \lambda \int_0^{2\pi} |f(t)| \log\big(1 + |f(t)|\big) \frac{dt}{2\pi} + \int_0^{2\pi} \big(e^{\frac{|g(t)|}{\lambda}} - 1\big) \frac{dt}{2\pi}.$$

(d) On choisit dorénavant :

$$g(\theta) := \log \frac{1}{|\cos \theta|}.$$

Montrer que $g \in L^1(\mathbb{T})$ et aussi, pour *tout* $\lambda > 1$, que :

$$e^{\frac{|g|}{\lambda}} \in L^1(\mathbb{T}).$$

(e) En se rapportant à un théorème du cours, justifier que des modifications mineures de sa démonstration permettent d'établir que pour toute paire de fonctions $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ et $g \in L^1(\mathbb{T})$, la convolée $f * g$ est continue sur $\mathbb{T}$.

(f) Soit à nouveau f appartenant à l'espace fonctionnel ci-dessus. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on la tronque par-dessous en définissant :

$$f_n(\theta) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } |f(\theta)| < n, \\ f(\theta) & \text{lorsque } |f(\theta)| \geqslant n. \end{cases}$$

Vérifier que $(f - f_n) * g(\theta)$ existe pour *tout* $\theta \in \mathbb{T}$.

(h) Introduire en conséquence pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions :

$$h_n := (f - f_n) * g,$$

montrer qu'elles sont continues, et établir que :

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} \big\| f * g - h_n \big\|_{L^\infty} \leqslant \int_0^{2\pi} \big(e^{\frac{|g(t)|}{\lambda}} - 1 \big) \frac{dt}{2\pi}.$$

(i) Conclure la démonstration de l'énoncé qui était visé : *pour toute fonction $f \in \mathscr{E}$, la convolée :*

$$f * \log \tfrac{1}{|\cos|}$$

est continue sur $\mathbb{T}$.