Théorème des nombres premiers

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

On note :

$$\mathscr{P} := \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ \dots\}$$

l'ensemble des nombres entiers positifs premiers. Pour $x \geqslant 1$ réel, soit :

$$\pi(x) := \mathsf{Card}\,\{p \in \mathscr{P} \colon\ 1 \leqslant p \leqslant x\}.$$

L'objectif de ce chapitre est d'établir le

Théorème 1.1. [des nombres premiers] *Asymptotiquement lorsque $x \longrightarrow \infty$:*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

La démonstration s'organise en une série de 7 lemmes '*capitaux*', accompagnés d'un théorème de type '*taubérien*' dû à D.J. Newman, montrant qu'une certaine intégrale dépendant d'un paramètre réel $0 \leqslant \mathrm{T} < \infty$ a une limite quand $\mathrm{T} \longrightarrow \infty$.

Convention 1.2. La lettre p désignera toujours un nombre premier.

2. Sept lemmes capitaux

Les 7 lemmes dévoilent progressivement des propriétés de 3 fonctions, la *fonction zêta de Riemann :*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

holomorphe en $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, puis la fonction dérivée :

$$\Phi(s) := -\frac{d}{ds}\left(\sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p^s}\right)$$

$$= \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\log p}{p^s},$$

elle aussi holomorphe dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$, et enfin la fonction, positive et croissante par sauts, d'un réel $x \geqslant 1$:

$$\vartheta(x) := \sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant x}} \log p.$$

En effet, on se convainc aisément (exercice de révision) que les séries définissant $\zeta(s)$ et $\Phi(s)$ sont normalement, donc uniformément, convergentes sur les demi-plans fermés $\{\mathsf{Re}\, s \geqslant 1+\delta\}$, quel que soit $\delta > 0$, d'où leur holomorphie.

Lemme 2.1. [Euler] *Pour* $\mathsf{Re}\, s > 1$*, on a la formule de produit d'Euler :*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

Démonstration. La factorisation unique des entiers $n \geqslant 1$, et la convergence justifient le calcul formel :

$$\begin{aligned}\zeta(s) = \sum_{r_2, r_3, r_5, \dots \geqslant 0} \frac{1}{\big(2^{r_2}\, 3^{r_3}\, 5^{r_5}\, \cdots\big)^s} &= \prod_{p \in \mathscr{P}} \bigg(\sum_{r \geqslant 0} \frac{1}{p^{rs}}\bigg) \\ &= \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},\end{aligned}$$

les détails étant laissés au lecteur — qui n'a pas l'interdiction de s'aider du fait que ces détails ont déjà été fournis dans un chapitre qui précède ! □

En $s=1$, il y a divergence de $\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, mais après soustraction d'un pôle simple :

Lemme 2.2. *La fonction* $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ *se prolonge holomorphiquement à* $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$.

Démonstration. En effet, avec $\mathsf{Re}\, s > 1$, il apparaît dans la différence une série :

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_n^{n+1} dx \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right)}_{=:\, a_n(s)}$$

de fonctions holomorphes qui sont majorables grâce à l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{aligned}\big|a_n(s)\big| = \left|\int_n^{n+1} dx \int_n^x \frac{s\, du}{u^{s+1}}\right| &\leqslant 1 \cdot \max_{n \leqslant u \leqslant n+1} \left|\frac{s}{u^{s+1}}\right| \\ &= \frac{|s|}{n^{1+\mathsf{Re}\, s}},\end{aligned}$$

ce qui montre la convergence uniforme sur $\{\mathsf{Re}\, s > 0\}$ vers une fonction-limite holomorphe. □

Lemme 2.3. *Il existe une constante universelle* $C < \infty$ *telle que, pour tout* $x \geqslant 1$ *:*

$$(0 \leqslant) \qquad \vartheta(x) = \sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant x}} \log p \leqslant C\, x.$$

Démonstration. Pour $n \geqslant 1$ entier, il est clair que :

$$\begin{aligned}4^n = \big(1+1\big)^{2n} = \binom{2n}{0} + \cdots + \binom{2n}{n} + \cdots + \binom{2n}{2n} \geqslant \binom{2n}{n} &\geqslant \prod_{n < p \leqslant 2n} p \\ &= e^{\vartheta(2n) - \vartheta(n)},\end{aligned}$$

puisque les nombres premiers $n < p \leqslant 2n$ au numérateur de $\frac{(n+1)\cdots(n+n)}{1\cdots n}$ ne peuvent être effacés par le dénominateur.

Ainsi :

$$n \log 4 \geqslant \vartheta(2n) - \vartheta(n).$$

Or une sommation téléscopique :

$$\begin{aligned}
\vartheta\big(2^{k+1}\big) - \vartheta(2^k) &\leqslant 2^k \log 4, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\vartheta(4) - \vartheta(2) &\leqslant 2^1 \log 4, \\
\vartheta(2) - \underline{\vartheta(1)}_{\circ} &\leqslant 2^0 \log 4,
\end{aligned}$$

donne :

$$\vartheta\big(2^{k+1}\big) \leqslant 2^{k+1} \log 4,$$

et comme pour tout $x \geqslant 1$ réel, il existe un unique entier $k_x \geqslant 1$ encadrant :

$$2^{k_x} \leqslant x < 2^{k_x+1},$$

il vient par croissance de ϑ :

$$\vartheta(x) \leqslant \vartheta\big(2^{k_x+1}\big) \leqslant 2^{k_x}\, 2 \log 4 \leqslant x\, 4 \log 2. \qquad \square$$

La formule d'Euler $\zeta(s) = \prod_p \big(1 - \frac{1}{p^s}\big)^{-1}$ garantit, grâce aux propriétés générales des produits infinis convergents de fonctions holomorphes, que $\zeta(s) \neq 0$, quel que soit $\mathrm{Re}\, s > 1$. L'énoncé suivant est un point-clé.

Lemme 2.4. *Hors du pôle $\{s = 1\}$, la fonction ζ, holomorphe dans $\{\mathrm{Re}\, s > 0\} \backslash \{1\}$, ne s'annule jamais sur $\{\mathrm{Re}\, s = 1\}$:*

$$\zeta\big(1 + it\big) \neq 0 \qquad {\scriptstyle (\forall\, t \in \mathbb{R}^*)}.$$

Rappelons que :

$$\Phi(s) := \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\log p}{p^s} \qquad {\scriptstyle (\mathrm{Re}\, s > 1)}.$$

Démonstration. Pour $\mathrm{Re}\, s > 1$, une dérivée logarithmique du produit $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$ donne :

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{p \in \mathscr{P}} \Big(\log\big(1 - e^{-s \log p}\big)\Big)' = \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{p^{-s} \log p}{1 - p^{-s}} \\
&= \Phi(s) + \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\log p}{p^s (p^s - 1)}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Pour tout $c > \frac{1}{2}$, cette dernière somme converge normalement-uniformément sur $\{\mathrm{Re}\, s \geqslant c\}$, donc définit une fonction-reste holomorphe dans $\{\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}\}$.

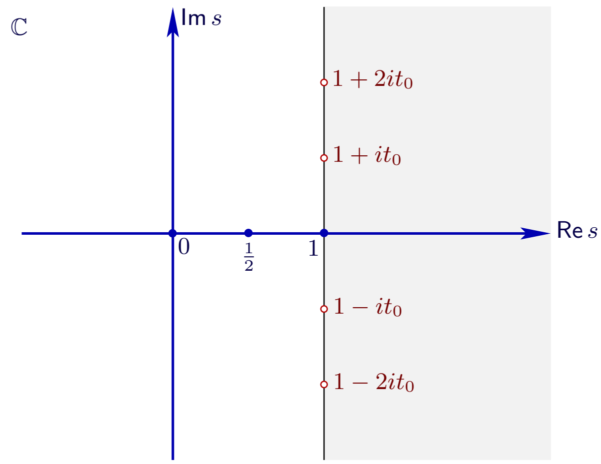
Dans l'éventualité où $\zeta(s)$ a un zéro en un point $s_0 = 1 + it_0$ avec $t_0 \neq 0$:

$$\zeta(s) = (s - s_0)^{\mu_0}\, \eta(s),$$

avec $\mu_0 \geqslant 1$ entier, et avec $\eta(s)$ holomorphe au voisinage de s_0 satisfaisant $\eta(s_0) \neq 0$, il vient :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{\mu_0}{s - s_0} + \text{reste holomorphe} \qquad {\scriptstyle (s \sim s_0)}.$$

Par conséquent, $\Phi(s)$ se prolonge méromorphiquement à un voisinage ouvert de $\{\mathrm{Re}\, s \geqslant 1\}$, avec des pôles d'ordre 1 en tous les zéros de ζ sur $\{\mathrm{Re}\, s = 1\} \backslash \{1\}$, et aussi un pôle d'ordre 1 en $s = 1$, puisque $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$, d'où $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \sim \frac{1}{s-1}$.



Pour aboutir à une contradiction, un raisonnement particulièrement astucieux consiste à regarder aussi le point $1 + 2it_0$, en lequel ζ a un certain ordre d'annulation $\nu_0 \geqslant 0$.

Puisque la relation $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\overline{s})$, valable pour $\mathrm{Re}\, s > 1$, est héritée par continuité via le Lemme 2.2 sur la droite épointée $\{\mathrm{Re}\, s = 1\} \backslash \{1\}$, la fonction ζ a les mêmes ordres d'annulation en $1 + it$ et en $1 - it$, quel que soit $t \neq 0$. Ainsi :

$$1 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \Big(- \frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)} \Big), \qquad - \mu_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \Big(- \frac{\zeta'(1+\varepsilon \pm it_0)}{\zeta(1+\varepsilon \pm it_0)} \Big),$$

$$- \nu_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \Big(- \frac{\zeta'(1+\varepsilon \pm 2it_0)}{\zeta(1+\varepsilon \pm 2it_0)} \Big),$$

d'où par holomorphie du reste dans (2.5) :

$$1 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \, \Phi(1+\varepsilon), \qquad - \mu_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \, \Phi\big(1+\varepsilon \pm it_0\big),$$

$$- \nu_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \, \Phi\big(1+\varepsilon \pm 2it_0\big).$$

Le point-clé de l'astuce est alors la reconstitution algébrique d'une puissance quatrième positive :

$$\begin{aligned}
\sum_{-2 \leqslant l \leqslant 2} \binom{4}{2+l} \Phi\big(1+\varepsilon+ilt_0\big) &= \sum_{-2 \leqslant l \leqslant 2} \binom{4}{2+l} \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon+ilt_0}} \\
&= \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \sum_{-2 \leqslant l \leqslant 2} \binom{4}{2+l} \bigg(\frac{1}{p^{it_0/2}} \bigg)^{l+2} \bigg(\frac{1}{p^{-it_0/2}} \bigg)^{-l+2} \\
&= \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}} \Big(p^{it_0/2} + p^{-it_0/2} \Big)^4 \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

car en appliquant alors $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} (\cdot)$ à cette inégalité :

$$- \nu_0 - 4\, \mu_0 + 6 - 4\, \mu_0 - \nu_0 \geqslant 0,$$

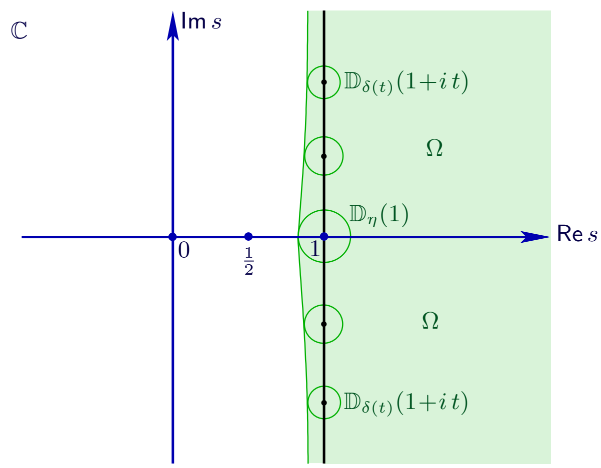
on déduit que $\mu_0 = 0$ nécessairement (exercice visuel). En définitive, $\zeta(1+it) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$. $\square$

Maintenant, récrivons (2.5) sous la forme :

$$\Phi(s) \;=\; -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \mathscr{R}(s),$$

avec une fonction-reste $\mathscr{R}(s)$ qui est holomorphe dans $\big\{\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}\big\}$. Nous venons de démontrer que $\zeta(s) \neq 0$ dans $\big\{\mathrm{Re}\, s \geqslant 1\big\}\backslash\{1\}$, et donc $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ puis $\Phi(s)$ sont holomorphes au voisinage de tout point appartenant à $\big\{\mathrm{Re}\, s \geqslant 1\big\}\backslash\{1\}$.

Mais comme $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ pour $s \sim 1$, d'où $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \sim \frac{1}{s-1}$ pour $s \sim 1$, en soustrayant cette partie singulière, on élimine la singularité en $s = 1$ et on obtient une fonction qui est aussi holomorphe au voisinage de $s = 1$.



Lemme 2.6. *La fonction :*

$$\Phi(s) - \frac{1}{s-1} \;=\; -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} - \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\log p}{p^s(p^s-1)}$$

est holomorphe dans un certain voisinage ouvert :

$$\Omega \;\supset\; \{\mathrm{Re}\, s \geqslant 1\}.$$

Démonstration. Comme on a éliminé la partie singulière de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, il existe un rayon $\eta > 0$ tel que cette fonction est holomorphe dans $\mathbb{D}_\eta(1)$. Comme $\zeta(s)$ n'a aucun zéro dans $\big\{\mathrm{Re}\, s \geqslant 1\big\}\backslash\{1\}$, et comme la fonction-reste $\mathscr{R}(s)$ est holomorphe dans $\big\{\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}\big\}$, pour tout nombre $1 + i\,t$ avec $t \in \mathbb{R}^*$, il existe un rayon $\delta(t) > 0$ tel que $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ est holomorphe dans le disque ouvert $\mathbb{D}_{\delta(t)}\big(1+i\,t\big)$. Alors la fonction incriminée est bel et bien holomorphe dans l'ouvert :

$$\begin{aligned}\Omega \;:=\; &\big\{\mathrm{Re}\, s > 1\big\} \cup \mathbb{D}_\eta(1) \bigcup_{t \in \mathbb{R}^*} \mathbb{D}_{\delta(t)}\big(1+i\,t\big) \\ &\supset \big\{\mathrm{Re}\, s \geqslant 1\big\}.\end{aligned}$$

$\square$

Avant de poursuivre, faisons remarquer qu'il est tout à fait possible qu'il existe une suite $\big(\rho_n\big)_{n=1}^{\infty}$ de zéros de $\zeta(s)$ avec :

$$\mathsf{Im}\,\rho_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty \qquad\qquad \text{tandis que} \qquad\qquad \mathsf{Re}\,\rho_n \overset{<}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 1,$$

ce qui force alors $\partial\Omega$ à devenir de plus en plus « plaqué » contre $\big\{\mathsf{Re}\,s = 1\big\}$ quand $|t| \longrightarrow \infty$, car $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ n'est *pas* holomorphe au voisinage de tout $\rho \in \mathbb{C}$ en lequel $\zeta(\rho) = 0$.

En vérité, la région la plus grande contenue dans $\big\{\mathsf{Re}\,s > \frac{1}{2}\big\}$ où on sait actuellement démontrer que $\zeta(s)$ n'a aucun zéro est de la forme :

$$\sigma \,>\, 1 - \frac{C}{\big(\log|t|\big)^{\frac{2}{3}}\,\big(\log\log|t|\big)^{\frac{1}{3}}},$$

pour $|t| \geqslant t_*$, où $C > 0$ est une constante, et une région de cette forme « épouse » asymptotiquement $\big\{\mathsf{Re}\,s \geqslant 1\big\}$ lorsque $|t| \longrightarrow \infty$.

En résumé, dès que $\zeta(s_0) = 0$ possède un zéro de partie réelle $0 < \mathsf{Re}\,s_0 < 1$ éventuellement très proche de 1, la fonction $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ possède un *pôle* en $s = s_0$, donc les raisonnements précédents ne produisent aucun contrôle explicite sur le voisinage ouvert $\Omega \supset \{\mathsf{Re}\,s \geqslant 1\}$ dans lequel le Lemme 2.6 affirme que $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ est holomorphe. Autrement dit, quel que soit $\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-137}, \dots$, personne sur Terre n'est jamais parvenu jusqu'à présent à démontrer que $\zeta(s)$ n'a *aucun* zéro dans un demi-plan ε-décalé $\big\{\mathsf{Re}\,s > 1 - \varepsilon\big\}$, bien que ceci semble *a priori* moins difficile qu'établir l'*Hypothèse de Riemann*, d'après laquelle tous les zéros de $\zeta(s)$ dans la *bande critique* $\big\{0 < \mathsf{Re}\,s < 1\big\}$ devraient être situés sur la droite médiane $\big\{\mathsf{Re}\,s = \frac{1}{2}\big\}$.

Mais reprenons le cours de nos raisonnements en direction du théorème des nombres premiers.

Lemme 2.7. *L'intégrale :*

$$\int_1^\infty \frac{\vartheta(x) - x}{x^2}\,dx \,=\, \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \int_1^{\mathrm{T}} \frac{\vartheta(x) - x}{x^2}\,dx$$

converge.

Démonstration. Pour $\mathsf{Re}\,s > 1$, une intégration par parties dans l'intégrale de Riemann-Stieltjes donne :

$$\begin{aligned}
\Phi(s) \,&=\, \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\log p}{p^s} \,=\, \int_1^\infty \frac{d\vartheta(x)}{x^s} \\
\text{[Lemme 2.3]} \qquad &=\, \underbrace{\bigg[\frac{\vartheta(x)}{x^s}\bigg]_1^\infty}_{\circ} + s\int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}\,dx \\
[x = e^t] \qquad &=\, 0 + s\int_0^\infty e^{-st}\,\vartheta\big(e^t\big)\,dt.
\end{aligned}$$

Introduisons la fonction :

$$f(t) \,:=\, \frac{\vartheta(e^t)}{e^t} - 1 \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}_+),$$

discontinue sur un ensemble de mesure nulle puisque $\vartheta(e^t)$ est constante par morceaux, donc localement (Riemann-)intégrable, et bornée en vertu du Lemme 2.3 :

$$f \,\in\, L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Introduisons aussi, pour $\operatorname{Re} z > 0$:

$$g(z) := \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}.$$

Le Lemme 2.6 garantit que g se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert dans $\mathbb{C}$ de $\{\operatorname{Re} z \geqslant 0\}$. De plus, un calcul simple fait voir, pour $\operatorname{Re} z > 0$, que :

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} &= \int_0^\infty e^{-(z+1)\,t}\,\vartheta\big(e^t\big)\,dt - \int_0^\infty e^{-zt}\,dt \\ &= \int_0^\infty \Big(\vartheta\big(e^t\big)\,e^{-t} - 1\Big)\,e^{-zt}\,dt \\ &= \int_0^\infty f(t)\,e^{-zt}\,dt. \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème suivant, dont la démonstration est repoussée à une section ultérieure, sont vérifiées.

Théorème 2.8. *Sur $[0,\infty[$, soit $f \in L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Si la fonction :*

$$g(z) := \int_0^\infty f(t)\,e^{-zt}\,dt,$$

holomorphe dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert dans $\mathbb{C}$ du demi-plan fermé $\{\operatorname{Re} z \geqslant 0\}$, alors $\lim_{\mathrm{T}\to\infty} \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,dt$ existe et vaut :

$$g(0) = \int_0^\infty f(t)\,dt.$$

On conclut alors bien que l'intégrale :

$$\begin{aligned} g(0) = \int_0^\infty f(t)\,dt &= \int_0^\infty \Big(\vartheta\big(e^t\big)\,e^{-t} - 1\Big)\,dt \\ &= \int_1^\infty \frac{\vartheta(x) - x}{x^2}\,dx. \end{aligned}$$

existe. □

Le septième et dernier lemme capital précise ce que cachait la constante C du Lemme 2.3.

Lemme 2.9. *Asymptotiquement quand $x \longrightarrow \infty$, on a :*

$$\vartheta(x) \sim x.$$

Démonstration. Supposons par l'absurde que pour un $\lambda > 1$, il existe une suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ avec $x_n \longrightarrow \infty$ telle que :

$$\vartheta(x_n) \geqslant \lambda\,x_n \qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Comme ϑ croît, pour tout $t \geqslant x_n$, on a $\vartheta(t) \geqslant \vartheta(x_n) \geqslant \lambda\,x_n$, ce qui conduit à un jeu contradictoire d'inégalités :

$$0 \underbrace{\underset{\infty \leftarrow n}{\longleftarrow}}_{\text{Lemme 2.7}} \int_{x_n}^{\lambda\,x_n} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\,dt \geqslant \int_{x_n}^{\lambda\,x_n} \frac{\lambda\,x_n - t}{t^2}\,dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda - u}{u^2}\,du > 0.$$

De manière similaire, si pour un $\lambda < 1$, avec $x_n \longrightarrow \infty$, on avait $\vartheta(x_n) \leqslant \lambda\, x_n$ quel que soit $n \geqslant 1$, d'où $\vartheta(t) \leqslant \vartheta(x_n) \leqslant \lambda\, x_n$ pour $t \leqslant x_n$, ceci impliquerait aussi contradiction :

$$0 \underbrace{\underset{\infty \leftarrow n}{\longleftarrow}}_{\text{Lemme 2.7}} \int_{\lambda\, x_n}^{x_n} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2}\, dt \;\leqslant\; \int_{\lambda\, x_n}^{x_n} \frac{\lambda\, x_n - t}{t^2}\, dt \;=\; \int_{\lambda}^{1} \frac{\lambda - u}{u^2}\, du \;<\; 0. \qquad \square$$

Fin de la démonstration du Théorème 1.1. En partant de l'inégalité (non fine) :

$$\vartheta(x) \;=\; \sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant x}} \log p \;\leqslant\; \sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant x}} \log x \;=\; \pi(x) \log x,$$

il vient premièrement grâce à l'information cruciale $x \sim \vartheta(x)$ du Lemme 2.9 :

$$\frac{x}{\log x} \;\sim\; \frac{\vartheta(x)}{\log x} \;\leqslant\; \pi(x).$$

Pour l'inégalité inverse, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit :

$$\begin{aligned} \vartheta(x) \;\geqslant\; \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leqslant x} \log p \;&\geqslant\; \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leqslant x} \log x^{1-\varepsilon} \\ &=\; \Big[\pi(x) - \pi\big(x^{1-\varepsilon}\big)\Big]\, (1-\varepsilon) \log x \\ [-\,\pi(y) \geqslant -y] \qquad &\geqslant\; \Big[\pi(x) - x^{1-\varepsilon}\Big]\, (1-\varepsilon) \log x, \end{aligned}$$

et donc deuxièmement :

$$\frac{x}{\log x} \;\sim\; \frac{\vartheta(x)}{\log x} \;\geqslant\; (1-\varepsilon) \Big[\pi(x) - x^{1-\varepsilon}\Big],$$

et comme $x^{1-\varepsilon}$ est négligeable devant $\frac{x}{\log x}$ lorsque $x \longrightarrow \infty$, ceci conclut. $\square$

3. Démonstration du théorème analytique

Il ne reste plus qu'à démontrer le Théorème 2.8, dont nous recopions l'énoncé.

Théorème 3.1. *Sur* $[0, \infty[$, *soit* $f \in L^1_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$. *Si la fonction :*

$$g(z) \;:=\; \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt,$$

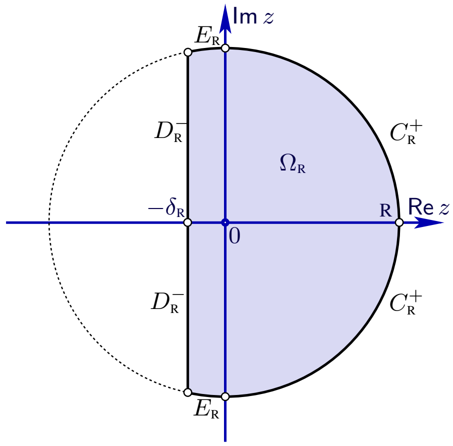
holomorphe dans $\{\mathsf{Re}\, z > 0\}$, *se prolonge holomorphiquement à un voisinage ouvert dans* $\mathbb{C}$ *du demi-plan fermé* $\{\mathsf{Re}\, z \geqslant 0\}$, *alors* $\lim_{\mathrm{T} \to \infty} \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\, dt$ *existe et vaut :*

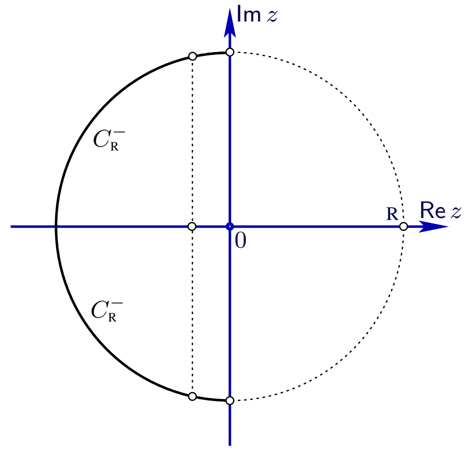
$$g(0) \;=\; \int_0^\infty f(t)\, dt.$$

Démonstration. Pour $\mathrm{T} > 0$, la fonction :

$$g_{\mathrm{T}}(z) \;:=\; \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\, e^{-zt}\, dt$$

est clairement holomorphe entière en $z \in \mathbb{C}$. On doit montrer que $\lim_{\mathrm{T} \to \infty} g_{\mathrm{T}}(0)$ existe, et vaut $g(0)$.





Soit un rayon $\text{R} \gg 1$, et soit l'ouvert :

$$\Omega_{\text{R}} := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < \text{R},\ \operatorname{Re} z > -\delta_{\text{R}}\big\},$$

où $\delta_{\text{R}} > 0$ est choisi assez petit pour que g soit holomorphe au voisinage de sa fermeture $\overline{\Omega}_{\text{R}}$. Sa frontière $\partial\Omega_{\text{R}} = D_{\text{R}}^- \cup E_{\text{R}} \cup C_{\text{R}}^+$ se décompose en :

$$\begin{aligned} D_{\text{R}}^- &:= \big\{|z| \leqslant \text{R},\ \operatorname{Re} z = -\delta_{\text{R}}\big\},\\ E_{\text{R}} &:= \big\{|z| = \text{R},\ -\delta_{\text{R}} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 0\big\},\\ C_{\text{R}}^+ &:= \big\{|z| = \text{R},\ \operatorname{Re} z \geqslant 0\big\}. \end{aligned}$$

Avec le poids astucieux utile plus tard $e^{z\text{T}}\left(1 + \frac{z^2}{\text{R}^2}\right)$ sans pôle, le théorème des résidus de Cauchy donne :

$$\begin{aligned} g(0) - g_{\text{T}}(0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega_{\text{R}}} \big(g(z) - g_{\text{T}}(z)\big)\, e^{z\text{T}} \left(1 + \frac{z^2}{\text{R}^2}\right) \frac{dz}{z}\\ &= \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{D_{\text{R}}^-} + \int_{E_{\text{R}}} + \int_{C_{\text{R}}^+} \right). \end{aligned}$$

Il s'agit de démontrer que ces trois intégrales tendent vers 0 quand $\text{T} \longrightarrow \infty$.

Lemme 3.2. *Sur le demi-cercle $C_{\text{R}}^+ \ni z$, l'intégrande est borné par :*

$$\left| \big(g(z) - g_{\text{T}}(z)\big)\, e^{z\text{T}} \left(1 + \frac{z^2}{\text{R}^2}\right) \frac{1}{z} \right| \leqslant \frac{2\, \|f\|_{L^\infty}}{\text{R}\,\text{R}}.$$

Démonstration. En tout point $z \in C_{\text{R}}^+$ avec $\operatorname{Re} z > 0$:

$$\begin{aligned} \big|g(z) - g_{\text{T}}(z)\big| = \left| \int_{\text{T}}^{\infty} f(t)\, e^{-zt}\, dt \right| &\leqslant \|f\|_{L^\infty} \int_{\text{T}}^{\infty} e^{-t \operatorname{Re} z}\, dt\\ &= \|f\|_{L^\infty} \frac{e^{-\text{T} \operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z}. \end{aligned}$$

Ensuite, comme $\frac{z}{\text{R}} = e^{i\theta}$ avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \left| e^{z\text{T}} \left(1 + \frac{z^2}{\text{R}^2}\right) \frac{1}{z} \right| = \big|e^{z\text{T}}\big| \cdot \big|1 + e^{2i\theta}\big| \cdot \frac{1}{\text{R}} = e^{\text{T}\operatorname{Re} z} \big|e^{-i\theta} + e^{i\theta}\big| \frac{1}{\text{R}} &= e^{\text{T}\operatorname{Re} z} \left|2 \operatorname{Re} \frac{z}{\text{R}}\right| \frac{1}{\text{R}}\\ &\leqslant \frac{2\, e^{\text{T}\operatorname{Re} z} \operatorname{Re} z}{\text{R}\,\text{R}}. \end{aligned}$$

Une multiplication de ces deux majorations conclut. □

Grâce à cela, avec $\int_{C_{\mathrm{R}}^+} |dz| = \pi\,\mathrm{R}$, on majore la troisième intégrale par une quantité qui tend vers zéro :

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\mathrm{R}}^+}\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\,\pi\,\mathrm{R}\,\frac{2\,\|f\|_{L^\infty}}{\mathrm{R}\,\mathrm{R}} \\
&= \frac{\|f\|_{L^\infty}}{\mathrm{R}} \underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Maintenant, pour les deux intégrales sur D_{R}^- et sur E_{R}, on traite $g(z)$ et $g_{\mathrm{T}}(z)$ séparément dans $\big(g(z) - g_{\mathrm{T}}(z)\big)$.

Puisque $g_{\mathrm{T}}(z) = \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,e^{-zt}\,dt$ est holomorphe entière, grâce à Cauchy, le contour d'intégration $D_{\mathrm{R}}^- \cup E_{\mathrm{R}}$ peut être remplacé par le demi-cercle :

$$
C_{\mathrm{R}}^- := \big\{|z| = \mathrm{R},\ \mathsf{Re}\,z \leqslant 0\big\},
$$

à savoir :

$$
\frac{1}{2i\pi}\int_{D_{\mathrm{R}}^-\cup E_{\mathrm{R}}} \big(-g_{\mathrm{T}}(z)\big)\,e^{z\mathrm{T}}\left(1+\frac{z^2}{\mathrm{R}^2}\right)\frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\mathrm{R}}^-} \big(\text{même intégrande}\big).
$$

Or pour $\mathsf{Re}\,z < 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
\big|g_{\mathrm{T}}(z)\big| \leqslant \|f\|_{L^\infty}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t\,\mathsf{Re}\,z}\,dt &\leqslant \|f\|_{L^\infty}\int_{-\infty}^{\mathrm{T}} e^{-t\,\mathsf{Re}\,z}\,dt \\
&= \|f\|_{L^\infty}\,\frac{e^{-\mathrm{T}\,\mathsf{Re}\,z}}{|\mathsf{Re}\,z|},
\end{aligned}
$$

et alors exactement la même estimée qu'à l'instant donne :

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\mathrm{R}}^-}\big(-g_{\mathrm{T}}(z)\big)\,e^{z\mathrm{T}}\left(1+\frac{z^2}{\mathrm{R}^2}\right)\frac{dz}{z}\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\,\|f\|_{L^\infty}\int_{C_{\mathrm{R}}^-}\frac{e^{-\mathrm{T}\,\mathsf{Re}\,z}}{|\mathsf{Re}\,z|}\,\frac{2\,e^{\mathrm{T}\,\mathsf{Re}\,z}\,|\mathsf{Re}\,z|}{\mathrm{R}\,\mathrm{R}}\,|dz| \\
&= \frac{1}{2\pi}\,\|f\|_{L^\infty}\,\frac{2}{\mathrm{R}\,\mathrm{R}}\,\pi\,\mathrm{R} \\
&= \frac{\|f\|_{L^\infty}}{\mathrm{R}} \underset{\mathrm{R}\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Il reste à contrôler :

$$
\frac{1}{2i\pi}\int_{D_{\mathrm{R}}^-\cup E_{\mathrm{R}}} \big(g(z)\big)\,e^{z\mathrm{T}}\left(1+\frac{z^2}{\mathrm{R}^2}\right)\frac{dz}{z}.
$$

Il y a ici le produit d'une fonction indépendante de T, holomorphe au voisinage de $D_{\mathrm{R}}^- \cup E_{\mathrm{R}}$, donc intégrable, par la fonction $e^{z\mathrm{T}}$ dépendant de T, de module $\leqslant 1$, et satisfaisant :

$$
\big|e^{z\mathrm{T}}\big| \leqslant e^{\mathrm{T}\,\mathsf{Re}\,z} \underset{\mathrm{T}\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (\forall\,\mathsf{Re}\,z<0),
$$

donc le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne :

$$
0 = \lim_{\mathrm{T}\to\infty}\int_{D_{\mathrm{R}}^-\cup E_{\mathrm{R}}} \big(g(z)\big)\,e^{z\mathrm{T}}\left(1+\frac{z^2}{\mathrm{R}^2}\right)\frac{dz}{z}. \qquad (3.5)
$$

Au total, ces trois majorations (3.3), (3.4), (3.5) offrent :

$$
\limsup_{\mathrm{T}\to\infty}\big|g(0) - g_{\mathrm{T}}(0)\big| \leqslant \frac{\|f\|_{L^\infty}}{\mathrm{R}} + \frac{\|f\|_{L^\infty}}{\mathrm{R}} + 0,
$$

et comme $\mathrm{R} \gg 1$ pouvait être choisi arbitrairement grand, c'est terminé ! $\square$

4. Exercices

Exercice 1. EE

Exercice 2. EE