

# Théorème des résidus et applications

François DE MARÇAY  
Département de Mathématiques d'Orsay  
Université Paris-Saclay, France

## 1. Introduction

### 2. Raison d'être des résidus

Soit  $f \in \mathcal{M}(\omega \setminus \{w\})$  une fonction méromorphe dans un ouvert  $\omega \subset \mathbb{C}$  qui a un pôle unique en un point  $w \in \omega$ , d'ordre  $\nu \geq 1$  quelconque. Dans un disque  $\mathbb{D}_R(w)$  de rayon  $R > 0$  assez petit, son développement de Laurent s'écrit :

$$f(z) = \frac{a_{-\nu}}{(z-w)^\nu} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-w)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-w)^1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n,$$

la convergence étant normale sur les compacts de  $\mathbb{D}_R^*(w)$ .

*Fait absolument remarquable : Toutes les intégrales sur les cercles  $C_r(w) \subset \mathbb{D}_R(w)$  de rayon  $0 < r < R$ , s'annulent sauf une !*

Pour voir cela, écrivons :

$$f(z) = \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n (z-w)^n \quad (z \in \mathbb{D}_R^*(w)),$$

et intégrons sur  $z = w + r e^{i\theta}$  avec  $dz = r i e^{i\theta} d\theta$  :

$$\begin{aligned} \int_{C_r(w)} f(z) dz &= \int_{C_r(w)} \left( \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n (z-w)^n \right) dz \\ &= \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n \int_{C_r(w)} (z-w)^n dz \\ &= \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} i r e^{i\theta} d\theta \\ &= a_{-1} 2\pi i. \end{aligned}$$

$$[\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta = 0 \text{ si } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}]$$

Bien entendu, ce calcul — surprenant ! — est vrai non seulement pour les fonctions méromorphes en  $w$ , mais aussi pour les fonctions holomorphes quelconques  $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$ , puisqu'elles admettent un développement en série de Laurent centré au point  $w$ .

**Observation 2.1. [Fondamentale !]** Dans un ouvert  $\omega \subset \mathbb{C}$ , si une fonction holomorphe :

$$f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$$

a une singularité isolée  $w \in \omega$ , alors pour tout rayon  $R > 0$  tel que  $\mathbb{D}_R(w) \subset \omega$ , on a pour tout rayon intermédiaire  $0 < r < R$  :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(w)} f(z) dz = a_{-1},$$

où  $a_{-1}$  est le coefficient pour  $n = -1$  du développement en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-w)^n.$$

*Démonstration.* Donnons une deuxième explication de ce phénomène. Sachant que la paramétrisation  $z = w + r e^{i\theta}$  donne pour le terme  $n = -1$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(w)} \frac{a_{-1}}{z-w} dz &= \frac{1}{2i\pi} a_{-1} \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{i\theta}}{r e^{i\theta}} d\theta \\ &= a_{-1}, \end{aligned}$$

soustrayons-le :

$$\begin{aligned} f(z) - \frac{a_{-1}}{z-w} &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1}} a_n (z-w)^n \\ &=: g(z), \end{aligned}$$

et observons que cette nouvelle fonction  $g \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$  possède la primitive ‘évidente’ dans  $\mathbb{D}_R^*(w)$  :

$$G(z) := \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -1}} a_n \frac{1}{n+1} (z-w)^{n+1},$$

avec  $G'(z) = g(z)$ . Enfin, souvenons-nous qu’en présence d’une primitive, pour toute courbe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  fermée  $\gamma \subset \mathbb{D}_R^*(w)$  — par exemple  $\gamma := C_r(w)$  —, on a :

$$0 = \int_{\gamma} G(z) dz. \quad \square$$

Ainsi, on ne conserve que le coefficient de Laurent  $a_{-1}$ , tous les autres  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}}$  disparaissent.

Le terme « résidu » désigne un reste, ce qui subsiste, un reliquat après une opération (al)chimique. On parle de *résidu* de cannes à sucre après extraction de leur jus (bagasse), ou de *résidus* d’une calcination.

**Définition 2.2.** Le *résidu* en une singularité isolée  $w \in \omega$  d’une fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$  ayant pour développement de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-w)^n,$$

dans un disque épointé  $\mathbb{D}_R^*(w) \subset \omega$  est le coefficient pour  $n = -1$ , noté :

$$\text{Res}_f(w) := a_{-1}.$$

Parce que c'est l'objet principal, il faut savoir le déterminer dans la pratique.

### 3. Calculs pratiques de résidus : recettes diverses

Tout d'abord, quand  $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$  a une singularité illusoire en  $z = w$  :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n \quad (z \in \mathbb{D}_R(w)),$$

il est clair que :

$$\text{Res}_f(w) = 0,$$

mais la réciproque est fautive, comme le montre :

$$\frac{a_{-2}}{(z-w)^2} + 0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n \quad (a_{-2} \neq 0).$$

**Proposition 3.1.** *Quand  $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$  est méromorphe en  $w \in \omega$  avec un pôle simple, i.e. d'ordre  $\nu = 1$ , en  $w$ , on a :*

$$\text{Res}_f(w) = \lim_{z \rightarrow w} (z-w) f(z).$$

*Démonstration.* En effet, multiplions :

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-w} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n$$

par  $(z-w)$  :

$$(z-w) f(z) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^{n+1}.$$

La série à droite est convergente dans  $\mathbb{D}_R(w)$ , et elle admet 0 comme limite lorsque  $z \rightarrow w$ .  $\square$

**Proposition 3.2.** *Quand  $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$  est méromorphe en  $w \in \omega$  avec un pôle d'ordre  $\nu \geq 1$  quelconque en  $w$ , on a :*

$$\text{Res}_f(w) = \lim_{z \rightarrow w} \frac{1}{(\nu-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{\nu-1} \left[ (z-w)^\nu f(z) \right].$$

Observons que la multiplication par  $(z-w)^\nu$  'tue' le pôle d'ordre  $\nu$  de  $f$  en  $w$  et produit ainsi une fonction holomorphe au voisinage de  $w$ , que l'on peut dériver indéfiniment.

Observons aussi que pour  $\nu = 1$ , on retrouve la formule précédente.

*Démonstration.* Effectivement, en partant de :

$$f(z) = \sum_{n=-\nu}^{\infty} a_n (z-w)^n,$$

multiplions :

$$(z-w)^\nu f(z) = a_{-\nu} + a_{-\nu+1} (z-w) + \cdots + a_{-1} (z-w)^{\nu-1} + \sum_{n=\nu}^{\infty} a_{n-\nu} (z-w)^n,$$

dérivons  $(\nu - 1)$  fois :

$$\begin{aligned} \left( (z - w)^\nu f(z) \right)^{(\nu-1)} &= 0 + \cdots + 0 + (\nu - 1)! a_{-1} + \sum_{n=\nu}^{\infty} n \cdots (n - \nu + 2) a_{n-\nu} (z - w)^{n-\nu+1} \\ &= (\nu - 1)! a_{-1} + O(z - w), \end{aligned}$$

et prenons la limite quand  $z \rightarrow w$ . □

Rappelons que la *valuation*  $-\infty < \nu_f(w) \leq \infty$  d'une fonction  $f \in \mathcal{O}(\omega \setminus \{w\})$  méromorphe non nulle en un point  $w \in \omega$  est l'entier unique dans la factorisation naturelle :

$$f(z) = (z - w)^{\nu_f(w)} g(z),$$

avec  $g$  holomorphe au voisinage de  $w$  satisfaisant  $g(w) \neq 0$ .

**Proposition 3.3.** *Dans un ouvert connexe  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , soit une fonction méromorphe globale  $f \in \mathcal{M}(\Omega)$  non identiquement nulle. Alors le quotient :*

$$\frac{f'}{f} \in \mathcal{M}(\Omega)$$

*est aussi méromorphe dans  $\Omega$ , avec des pôles simples (d'ordre 1) qui sont situés exactement aux zéros et aux pôles de  $f$ , et ce quotient  $\frac{f'}{f}$  y a pour résidus :*

$$\operatorname{Res}_{\frac{f'}{f}}(w) = \nu_f(w) \quad (\forall w \in \Omega).$$

Cette formule est en effet vérifiée *aussi* aux points  $w \in \Omega$  où  $f$  est holomorphe avec  $f(w) \neq 0$ , puisque  $\frac{f'}{f}$  y est holomorphe, d'où :

$$\operatorname{Res}_{\frac{f'}{f}}(w) = 0 = \nu_f(w) \quad (w \text{ ni zéro ni pôle}).$$

De plus, observons que l'hypothèse  $f \neq 0$  dans  $\Omega$  connexe garantit, grâce au principe d'identité, que l'on a en *tout* point  $w \in \Omega$  :

$$-\infty < \nu_f(w) < \infty.$$

*Démonstration.* En effet, une factorisation locale avec  $\nu = \nu_f(w)$  :

$$f(z) = (z - w)^\nu g(z),$$

où la fonction  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - w)^n$  est holomorphe près de  $w$  et satisfait  $b_0 = g(w) \neq 0$ , que l'on dérive :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \nu (z - w)^{\nu-1} g(z) + (z - w)^\nu g'(z) \\ &= (z - w)^{\nu-1} [\nu g(z) + (z - w) g'(z)], \end{aligned}$$

permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f}(z) &= \frac{(z - w)^{\nu-1} [\nu g(z) + (z - w) g'(z)]}{(z - w)^\nu [g(z)]} \\ &= \frac{\nu}{z - w} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \end{aligned}$$

la fonction-reste  $\frac{g'(z)}{g(z)}$  étant holomorphe au voisinage de  $w$ , puisque  $g(w) \neq 0$ .

Clairement, dès que  $\nu \neq 0$ , ce quotient  $\frac{f'}{f}$  possède un pôle simple en  $z = w$  de résidu égal à  $\nu$ , le coefficient de  $(z - w)^{-1}$  ci-dessus.  $\square$

#### 4. Théorème des résidus pour les contours de Jordan

Le théorème des résidus est le point culminant de toute la théorie des fonctions holomorphes, le sommet d'où la vue sur la Mer est la plus belle. Il « capture » les singularités isolées de fonctions holomorphes, créatures marines phosphorescentes.

En voici la première version prototypique.

**Théorème 4.1.** Soit  $C$  un cercle de rayon  $> 0$  bordant un disque ouvert  $\Delta \subset \mathbb{C}$ , et soit  $\Omega \supset C \cup \Delta$  un ouvert. Si une fonction holomorphe :

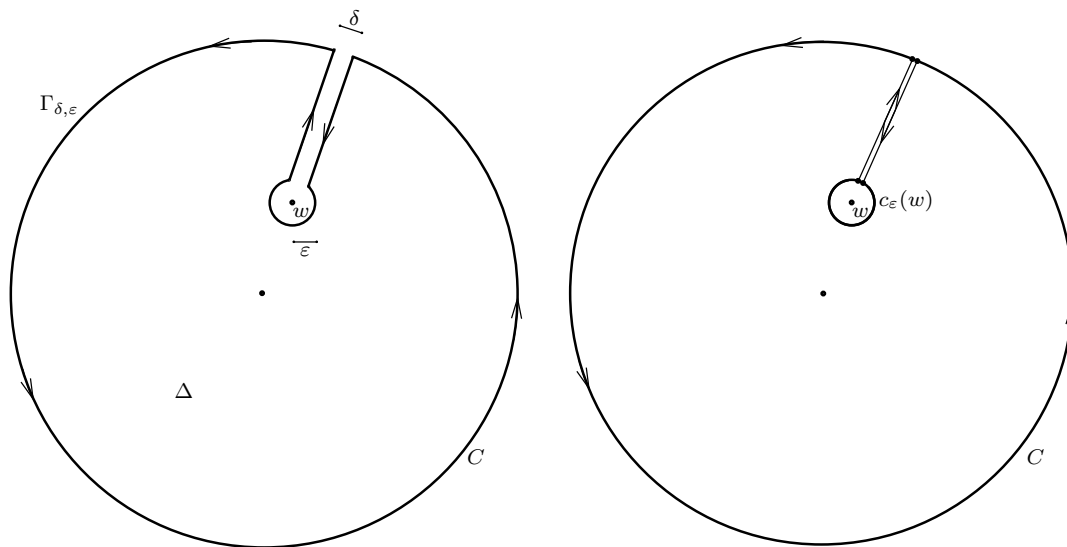
$$f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{w\})$$

a une unique singularité isolée  $w \in \Delta$ , alors :

$$\int_C f(z) dz = 2i\pi \operatorname{Res}_f(w).$$

En fait, lorsque  $w$  est illusoire,  $f$  est holomorphe près de  $w$ , donc  $\operatorname{Res}_f(w) = 0$ , ce qui redonne le théorème de Cauchy basique.

*Démonstration.* Pour  $0 < \delta < \varepsilon$ , introduisons un contour « trou de serrure »  $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$  comme dans la démonstration de la formule de représentation intégrale de Cauchy.



Grâce à cet évitement de  $w$ , la fonction  $f$  est holomorphe dans un voisinage ouvert :

$$\omega \supset \Gamma_{\delta,\varepsilon} \cup (\Gamma_{\delta,\varepsilon})_{\text{int}},$$

donc elle satisfait l'annulation de Cauchy :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(z) dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_C f(z) dz - \int_{c_\varepsilon(w)} f(z) dz \\ &= \int_C f(z) dz - 2i\pi \operatorname{Res}_f(w), \end{aligned}$$

en nous souvenant que le résidu, le coefficient  $a_{-1}$  dans le développement de Laurent de  $f$  en  $w$ , se capture par intégration le long de cercles centrés en  $w$  de rayons non nuls quelconques assez petits.  $\square$

Pourquoi, alors, la formule de représentation de Cauchy :

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-w} dz \quad (f \in \mathcal{O}(\Omega \supset C \cup \Delta))$$

est-elle vraie ? Ici, la fonction :

$$g: z \mapsto \frac{f(z)}{z-w}$$

n'est *pas* holomorphe dans un voisinage ouvert de  $C \cup \Delta$ , puisqu'elle a une singularité isolée en  $z = w \in \Delta$ , donc on n'a pas en général :

$$0 \stackrel{\text{faux}}{=} \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

Toutefois, le résidu en le pôle simple (d'ordre  $\nu = 1$ ) de cette fonction méromorphe vaut, d'après la Proposition 3.1 :

$$\begin{aligned} \text{Res}_g(w) &= \lim_{z \rightarrow w} (z-w) \frac{f(z)}{z-w} \\ &= f(w), \end{aligned}$$

et donc le Théorème 4.1 donne :

$$\int_C \frac{f(z)}{z-w} dz = 2i\pi f(w),$$

ce qui coïncide — cohérence agréable ! — avec la formule de Cauchy !

En présence de plusieurs singularités isolées, voici l'énoncé général.

**Théorème 4.2.** *Soit un ouvert  $\Omega \supset C \cup \Delta$  contenant un cercle et son intérieur  $\Delta$ . Si une fonction holomorphe :*

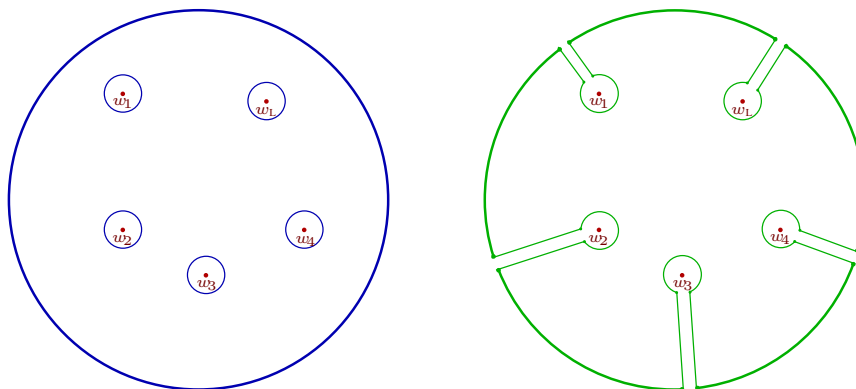
$$f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{w_1, \dots, w_L\})$$

a un nombre fini  $L \geq 1$  de singularités isolées  $w_1, \dots, w_L \in \Delta$ , alors :

$$\int_C f(z) dz = 2i\pi (\text{Res}_f(w_1) + \dots + \text{Res}_f(w_L)).$$

*Démonstration.* Esquissons des arguments qui généralisent ce qui précède, sans exposer tous les détails géométriques.

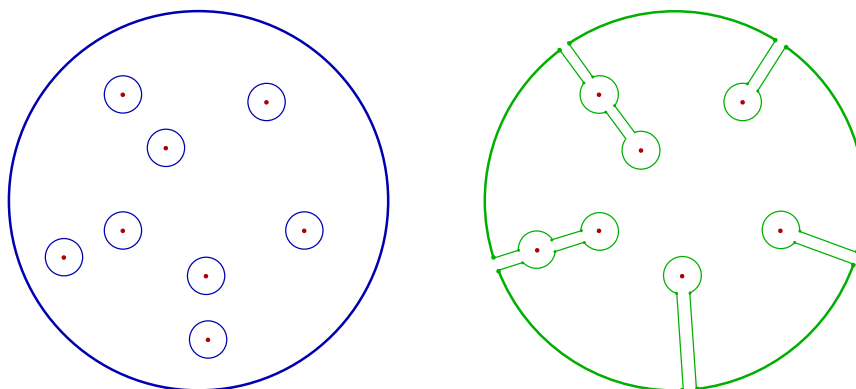
L'idée est de créer des trous de serrure multiples qui entourent les singularités  $w_1, \dots, w_L$ , et de faire tendre à nouveau la largeur des tunnels d'accès vers 0.



Soit donc  $0 < \delta < \varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que les  $L$  disques :

$$\mathbb{D}_\varepsilon(w_1), \dots, \mathbb{D}_\varepsilon(w_L)$$

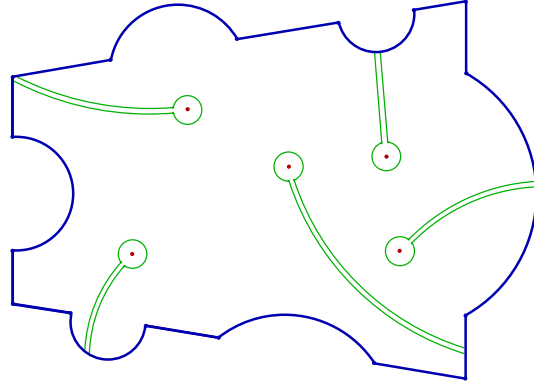
soient mutuellement disjoints. Perçons des tunnels droits de largeur  $\delta > 0$  issus orthogonalement du cercle-bord  $C$  jusqu'aux singularités  $w_\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq L$ , et contournons ces singularités, le long des cercles  $C_\varepsilon(w_\ell)$ , orientés négativement. Quand plusieurs singularités sont situées sur un même rayon, on enfle les perles.



À nouveau, faisons  $\delta \rightarrow 0$  en partant de l'annulation de Cauchy appliquée au contour  $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ , dont l'intérieur de Jordan  $(\Gamma_{\delta,\varepsilon})_{\text{int}}$  ne contient aucune singularité, et souvenons-nous des résidus :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(z) dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_C f(z) dz - \int_{C_\varepsilon(w_1)} f(z) dz - \dots - \int_{C_\varepsilon(w_L)} f(z) dz \\ &= \int_C f(z) dz - 2i\pi \operatorname{Res}_f(w_1) - \dots - 2i\pi \operatorname{Res}_f(w_L). \quad \square \end{aligned}$$

Le cas général d'un contour de Jordan  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  — une courbe (continue)  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  fermée simple — quelconque, avec intérieur  $\Gamma_{\text{int}}$ , est plus délicat : construire des tunnels ne s'intersectant pas demande un certain travail géométrique que nous nous dispenserons de présenter au lecteur.



**Théorème 4.3. [des résidus le plus utile]** Soit un ouvert  $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\text{int}}$  contenant un contour de Jordan et son intérieur. Si une fonction holomorphe :

$$f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{w_1, \dots, w_L\})$$

a un nombre fini  $L \geq 1$  de singularités isolées  $w_1, \dots, w_L \in \Gamma_{\text{int}}$ , alors :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2i\pi (\text{Res}_f(w_1) + \dots + \text{Res}_f(w_L)).$$

*Démonstration.* Dans tous les exemples explicites que nous traiterons plus tard, la forme concrète visible de  $\Gamma$  permettra de deviner aisément comment placer les tunnels sans qu'ils s'intersectent. Dans le cas où  $\Gamma$  est quelconque, si nous admettons que cela soit possible, la démonstration est quasiment identique à celle pour  $\Gamma = C$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_{\delta, \varepsilon}} f(z) dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{C_{\varepsilon}(w_1)} f(z) dz - \dots - \int_{C_{\varepsilon}(w_L)} f(z) dz \\ &= \int_{\Gamma} f(z) dz - 2i\pi \text{Res}_f(w_1) - \dots - 2i\pi \text{Res}_f(w_L). \quad \square \end{aligned}$$

## 5. Exemples de calculs d'intégrales par la méthode des résidus

Le calcul des résidus s'avère être un outil très puissant pour déterminer les valeurs d'un grand nombre d'intégrales, notamment les intégrales de Riemann impropres de la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

L'idée principale, et protéiforme, est d'étendre  $f = f(z)$  au domaine complexe  $z \in \mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ , puis de sélectionner une famille appropriée de contours de Jordan  $\gamma_R$  paramétrés par  $R \rightarrow \infty$  de manière à ce que :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Et grâce à un simple calcul ponctuel des résidus de  $f$  en ses singularités isolées dans l'intérieur du contour  $\gamma_R$ , le Théorème 4.3 donne la valeur de  $\int_{\gamma_R} f(z) dz$ , souvent égale à une constante intéressante suivie d'une quantité qui tend vers 0 lorsque  $R \rightarrow \infty$ .

Seule l'intuition géométrique permet de deviner quels contours  $\gamma_R$  choisir afin de récupérer ainsi la valeur désirée de  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ . Ce sont les propriétés de décroissance de  $f$  à l'infini qui doivent servir de guide.



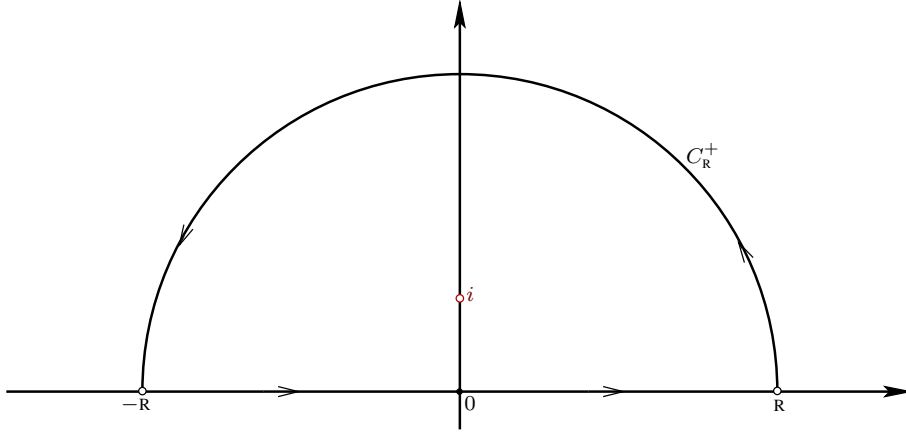
**Exemple 5.1.** Sans utiliser  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ , mais en appliquant le théorème des résidus, démontrons que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

À cette fin, introduisons la fonction :

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)},$$

qui est holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ , avec deux pôles simples en  $-i$  et en  $i$ .



Intégrons-la sur le contour consistant en le segment réel  $[-R, R]$  suivi du demi-cercle  $C_R^+$  de rayon  $R > 1$  situé au-dessus de l'axe réel. Seule la singularité  $z = i$  se trouve à l'intérieur de ce contour.

Comme le résidu de  $f$  en  $z = i$  vaut :

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i) f(z) = \frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i},$$

le Théorème 4.3 donne :

$$\int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{C_R^+} \frac{dz}{1+z^2} = 2i\pi \left( \frac{1}{2i} \right).$$

Mais en utilisant, pour  $z \in C_R^+$  quelconque :

$$|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1,$$

nous pouvons majorer la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R^+} \frac{dz}{1+z^2} \right| &\leq \int_{C_R^+} \frac{1}{|z^2+1|} |dz| \\ &\leq \frac{1}{R^2-1} \int_0^\pi R d\theta \\ &= \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

par une quantité disparaissante, d'où la conclusion :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} + 0 = \pi. \quad \square$$

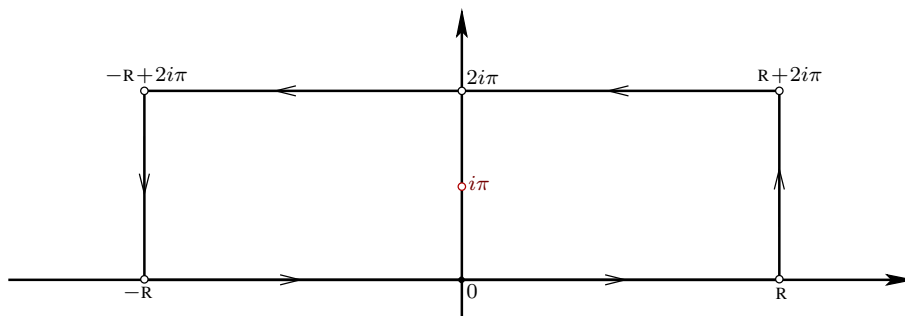
**Exemple 5.2.** Il s'agit d'une intégrale qui jouera un rôle important ultérieurement, avec  $0 < a < 1$  réel :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Pour établir cette formule, introduisons :

$$f(z) := \frac{e^{az}}{1+e^z},$$

et prenons comme contour un rectangle situé au-dessus de l'axe réel et de sommets  $-R$ ,  $R$ ,  $R + 2i\pi$ ,  $-R + 2i\pi$ .



Le seul point à l'intérieur de ce rectangle en lequel le dénominateur  $1 + e^z$  de  $f(z)$  s'annule est  $z = i\pi$ . Pour calculer le résidu de  $f$  en ce point  $i\pi$ , écrivons :

$$(z - i\pi) f(z) = e^{az} \frac{z - i\pi}{e^z - e^{i\pi}},$$

et reconnaissons un quotient différentiel inversé de  $e^z = (e^z)'$  en  $z = i\pi$  :

$$\lim_{z \rightarrow i\pi} e^{az} \frac{e^z - e^{i\pi}}{z - i\pi} = e^{ai\pi} e^{i\pi},$$

d'où :

$$\text{Res}_f(i\pi) = -e^{ai\pi}.$$

Ainsi, le théorème des résidus offre :

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_0^{2\pi} f(R+iy) i dy - \int_{-R}^R f(x+2i\pi) dx - \int_0^{2\pi} f(-R+iy) i dy = 2i\pi (-e^{ai\pi}).$$

Nous affirmons maintenant que les deux intégrales numéros 2 et 4 tendent vers 0 quand  $R \rightarrow \infty$ . En effet, pour l'intégrale 2, dès que  $R > 1$ , majorons :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(R+iy) i dy \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{a(R+iy)}}{e^{R+iy} + 1} \right| dy \\ &\leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \int_0^{2\pi} dy \\ &\sim 2\pi e^{-(1-a)R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

puisque  $0 < a < 1$ . L'intégrale 4 se pulvérise de la même manière.

Enfin, par un « miracle » bien calculé à l'avance, l'intégrale 3 se ré-exprime comme un multiple de l'intégrale qui nous intéresse :

$$-\int_{-R}^R \frac{e^{a(x+2i\pi)}}{1+e^{x+2i\pi}} dx = -e^{2ai\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx,$$

et en faisant  $R \rightarrow \infty$  dans le club des quatre :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx + 0 - e^{2ai\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - 0 = -2i\pi e^{ai\pi},$$

nous concluons que :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx &= -2i\pi \frac{e^{ai\pi}}{1-e^{2ai\pi}} \\ &= \frac{2i\pi}{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}} \\ &= \frac{\pi}{\sin a\pi}. \end{aligned} \quad \square$$

**Exemple 5.3.** Le cours d'Analyse de Fourier utilise de manière intensive le fait (connu) que la fonction  $e^{-\pi x^2}$  coïncide avec sa transformée de Fourier :

$$e^{-\pi \xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi \xi x} dx.$$

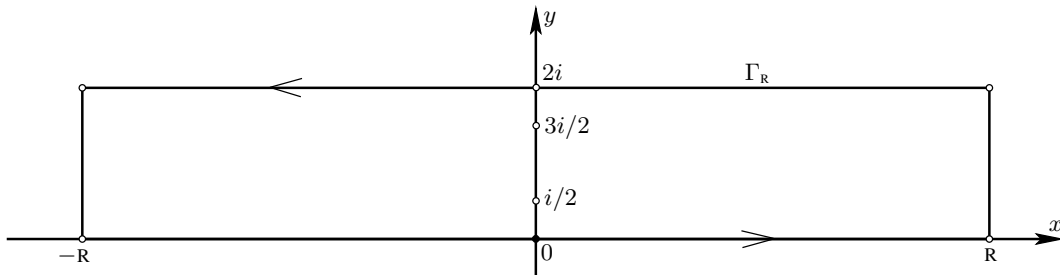
Une démonstration de cette formule basée sur l'Analyse Complexe a déjà été donnée dans le chapitre consacré à la théorie de Cauchy.

Or cette fonction  $e^{-\pi x^2}$  n'est pas la seule qui soit un « point fixe » pour la transformation de Fourier. En effet, nous affirmons qu'avec :

$$\cosh w := \frac{e^w + e^{-w}}{2},$$

la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\cosh \pi x}$  est aussi sa propre transformée de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh \pi x} e^{-2i\pi \xi x} dx = \frac{1}{\cosh \pi \xi}.$$



Pour établir cette formule, avec  $R > 0$  qui tendra vers l'infini, soit  $\Gamma_R$  le contour rectangulaire allongé, posé sur l'axe réel, de hauteur constante égale à 2, et dont les quatre sommets sont  $-R$ ,  $R$ ,  $R + 2i$ ,  $-R + 2i$ .

Avec un réel  $\xi \in \mathbb{R}$  quelconque fixé, introduisons :

$$f(z) := \frac{e^{-2i\pi \xi z}}{\cosh \pi z}.$$

Le dénominateur s'annule précisément lorsque  $e^{\pi z} = -e^{-\pi z}$ , c'est-à-dire quand  $e^{2\pi z} = -1$ . Autrement dit,  $2\pi z = i\pi + 2i\pi k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  quelconque, d'où  $z = \frac{i}{2} + ik$ . Donc  $f$  possède exactement deux pôles dans l'intérieur  $\Gamma_{R,\text{int}}$  du contour :

$$\alpha := \frac{i}{2} \quad \text{et} \quad \beta := \frac{3i}{2}.$$

En faisant astucieusement apparaître l'inverse du quotient différentiel de la fonction  $z \mapsto e^{2\pi z}$  — dont la dérivée vaut  $2\pi e^{2\pi z}$  — au point  $z = \alpha$ , nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} \text{Res}_f(\alpha) &= \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) f(z) = \lim_{z \rightarrow \alpha} e^{-2i\pi\xi z} \frac{(z - \alpha) 2}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}} \\ &= \lim_{z \rightarrow \alpha} 2 e^{-2i\pi\xi z} \frac{1}{e^{-\pi z}} \frac{z - \alpha}{e^{2\pi z} + 1} \\ [\alpha = \frac{i}{2}] \quad &= 2 e^{-2i\pi\xi\alpha} \frac{1}{e^{-\pi\alpha}} \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{z - \alpha}{e^{2\pi z} - e^{2\pi\alpha}} \\ &= 2 e^{\pi\xi} \frac{1}{e^{-\pi\frac{i}{2}}} \frac{1}{2\pi e^{2\pi\frac{i}{2}}} \\ &= \frac{e^{\pi\xi}}{i\pi}. \end{aligned}$$

En procédant de manière similaire, le lecteur trouvera :

$$\text{Res}_f(\beta) = -\frac{e^{3\pi\xi}}{i\pi}.$$

Maintenant, le Théorème 4.3 magique des résidus nous offre :

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{-2i\pi\xi z}}{\cosh \pi z} dz = 2i\pi (\text{Res}_f(\alpha) + \text{Res}_f(\beta)),$$

c'est-à-dire, sachant que notre rectangle  $\Gamma_R$  orienté positivement possède quatre côtés :

$$\int_{-R}^R \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{\cosh \pi x} dx + \int_0^2 \frac{e^{-2i\pi\xi(R+iy)}}{\cosh \pi(R+iy)} i dy - \int_{-R}^R \frac{e^{-2i\pi\xi(x+2i)}}{\cosh \pi(x+2i)} dx - \int_0^2 \frac{e^{-2i\pi\xi(-R+iy)}}{\cosh \pi(-R+iy)} i dy = 2i\pi \left( \frac{e^{\pi\xi}}{i\pi} - \frac{e^{3\pi\xi}}{i\pi} \right).$$

Or ensuite, nous affirmons que les intégrales numéros  $I_2$  et  $I_4$  tendent vers 0 quand  $R \rightarrow \infty$ . En effet, pour ce qui est par exemple de l'intégrale  $I_2$ , sachant que pour  $0 \leq y \leq 2$  :

$$|e^{-2i\pi\xi(R+iy)}| = |e^{-2i\pi\xi R + 2\pi\xi y}| \leq e^{4\pi|\xi|},$$

et grâce à la minoration :

$$\begin{aligned} |\cosh \pi(R+iy)| &= \left| \frac{e^{\pi(R+iy)} + e^{-\pi(R+iy)}}{2} \right| \geq \frac{1}{2} \left| |e^{\pi(R+iy)}| - |e^{-\pi(R+iy)}| \right| \\ &= \frac{1}{2} (e^{\pi R} - e^{-\pi R}), \end{aligned}$$

nous voyons que :

$$\left| \int_0^2 \frac{e^{-2i\pi\xi(R+iy)}}{\cosh \pi(R+iy)} i dy \right| \leq \frac{e^{4\pi|\xi|} 2}{e^{\pi R} - e^{-\pi R}} \int_0^2 1 dy \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

L'annihilation de  $I_4$  lorsque  $R \rightarrow \infty$  se traite d'une manière analogue.

Pour terminer, grâce au fait que :

$$\cosh \pi(x+2i) = \cosh \pi x,$$

nous constatons que l'intégrale  $I_3$  est multiple de l'intégrale  $I_1$ , et alors en prenant  $\lim_{R \rightarrow \infty} (\bullet)$  dans l'identité ci-dessus, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{\cosh \pi x} dx + 0 - e^{4\pi\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{\cosh \pi x} dx - 0 = 2(e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi}),$$

et donc enfin comme annoncé :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{\cosh \pi x} dx &= \frac{(e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi}) 2}{1 - e^{4\pi\xi}} = \frac{e^{2\pi\xi} (e^{-\pi\xi} - e^{\pi\xi}) 2}{e^{2\pi\xi} (e^{-\pi\xi} - e^{\pi\xi}) (e^{-\pi\xi} + e^{\pi\xi})} \\ &= \frac{2}{e^{-\pi\xi} + e^{\pi\xi}} \\ &= \frac{1}{\cosh \pi\xi}. \end{aligned} \quad \Delta$$

Des arguments similaires permettent (exercice) d'établir, pour tout  $0 < a < 1$  réel, la formule :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi a}{\cosh \pi x + \cos \pi a} e^{-2i\pi\xi x} dx = \frac{2 \sinh 2\pi a \xi}{\sinh 2\pi \xi},$$

où  $\sinh z := (e^z - e^{-z})/2$ . Le cas  $a = \frac{1}{2}$  s'identifie à ce que nous venons de démontrer.

## 6. Indices de courbes par rapport à un point

Étant donné une courbe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  fermée  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  à valeurs dans le plan complexe, on identifie toujours son image  $\gamma \equiv \gamma([0, 1])$  à sa paramétrisation.

**Définition 6.1.** L'indice d'un point quelconque  $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma$  par rapport à une courbe  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  fermée  $\gamma(0) = \gamma(1)$  est le nombre :

$$\text{Ind}_{\gamma}(w) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w}.$$

**Proposition 6.2.** Cet indice est toujours entier :

$$\text{Ind}_{\gamma}(w) \in \mathbb{Z} \quad (\forall w \notin \gamma).$$

*Démonstration.* Rédigeons les arguments en supposant la courbe  $\mathcal{C}^1$ , au lieu de  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$ , afin d'alléger l'écriture. Introduisons pour  $t \in [0, 1]$ , la fonction :

$$\Phi(t) := \exp \left( \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - w} ds \right),$$

satisfaisant :

$$\Phi(0) = 1,$$

et qui a pour dérivée :

$$\Phi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w} \exp \left( \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - w} ds \right),$$

ce qui se réécrit comme l'équation :

$$\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w}.$$

De manière équivalente, la fonction  $\frac{\Phi(t)}{\gamma(t)-w}$  a une dérivée identiquement nulle :

$$\left(\frac{\Phi(t)}{\gamma(t)-w}\right)' = \frac{\Phi'(t) [\gamma(t)-w] - \Phi(t) \gamma'(t)}{[\gamma(t)-w]^2} \equiv 0,$$

et par conséquent, elle est constante ! Ainsi, elle vaut sa valeur initiale :

$$\frac{\Phi(t)}{\gamma(t)-w} \equiv \frac{\Phi(0)}{\gamma(0)-w} = \frac{1}{\gamma(0)-w},$$

ce qui permet miraculeusement de résoudre :

$$\Phi(t) = \frac{\gamma(t)-w}{\gamma(0)-w} \quad (\forall t \in [0,1]).$$

Mais comme  $\gamma(1) = \gamma(0)$ , on a :

$$1 = \frac{\gamma(1)-w}{\gamma(0)-w} = \Phi(1) = \exp\left(\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w} dt\right),$$

ce qui signifie bien, puisque  $e^\varphi = 1$  si et seulement si  $\varphi \in 2i\pi\mathbb{Z}$ , que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w} dt \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Ainsi, l'entier  $\text{Ind}_\gamma(w)$  est bien défini pour tout point  $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma$  dans le complémentaire de la courbe  $\gamma$ . En fait, sa valeur ne peut changer que lorsque  $w$  « traverse »  $\gamma$ , d'après la prochaine

**Proposition 6.3.** *L'application :*

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \gamma &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ w &\longmapsto \text{Ind}_\gamma(w) \end{aligned}$$

est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ .

*Preuve.* En effet, l'application complète avant intégration :

$$\begin{aligned} (\mathbb{C} \setminus \gamma) \times [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (w,t) &\longmapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w} \end{aligned}$$

est continue, donc le théorème des intégrales à paramètre(s) assure que l'application en question, envisagée comme étant à valeurs complexes :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \gamma &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\longmapsto \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w} dt = \text{Ind}_\gamma(w) \end{aligned}$$

est *continue*. Mais comme elle est à valeurs dans  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$  qui est *discret*, cette application doit être localement constante, donc constante dans chaque composante connexe (ouverte) de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ .  $\square$

Comme  $\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$  est continue, son image  $\gamma([0,1]) \equiv \gamma$  est un compact de  $\mathbb{C}$ , que l'on peut inclure  $\gamma \subset \overline{\mathbb{D}}_R$  dans un disque de rayon  $R \gg 1$  assez grand.

**Proposition 6.4.** *Le complémentaire  $\mathbb{C} \setminus K$  d'un compact quelconque  $K \subset \mathbb{C}$  possède une unique composante connexe non bornée.*

Naturellement, un sous-ensemble  $E \subset \mathbb{C}$  est dit *non borné* s'il contient des points de modules arbitrairement grands.

*Démonstration.* De même, on inclut  $K \subset \overline{\mathbb{D}}_R$ , quitte à augmenter  $R \gg 1$ , et comme l'anneau  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R$  va à l'infini, pour toute composante connexe  $\omega$  non bornée de  $\mathbb{C} \setminus K$ , on a :

$$\omega \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R) \neq \emptyset.$$

Mais un résultat élémentaire de topologie dit que si  $\omega$  est une composante connexe d'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , et si  $\varpi \subset \Omega$  est un ouvert connexe tel que  $\varpi \cap \omega \neq \emptyset$ , alors  $\varpi \subset \omega$ . Ici avec  $\Omega := \mathbb{C} \setminus K$  et avec  $\varpi := \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R$ , nous obtenons donc :

$$\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R \subset \omega.$$

Grâce à cela, l'unicité de  $\omega$  provient alors d'un autre lemme élémentaire de topologie, disant que si deux composantes connexes  $\omega_1, \omega_2$  d'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$  contiennent  $\omega_1 \supset \varpi$  et  $\omega_2 \supset \varpi$  un ouvert non vide  $\varpi \neq \emptyset$ , alors  $\omega_1 = \omega_2$ .  $\square$

**Proposition 6.5.** *En tout point  $w \in D_\infty$  de l'unique composante connexe non bornée  $D_\infty$  de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ , on a :*

$$\text{Ind}_\gamma(w) = 0.$$

*Preuve.* Comme nous savons que ce nombre entier est constant, il suffit de faire  $|w| \rightarrow \infty$  dans :

$$\text{Ind}_\gamma(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w} dt \xrightarrow{|w| \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Réinterprétons les théorèmes classiques de Cauchy pour un disque  $\mathbb{D}_r(z_0)$  de rayon  $r > 0$  centré en un point  $z_0 \in \mathbb{C}$ , dont le cercle-bord est paramétré par :

$$\gamma(t) = z_0 + r e^{i2\pi t} \quad (t \in [0,1]).$$

Ici :

$$\begin{aligned} \text{Ind}_\gamma(w) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{dz}{z - w}. \end{aligned}$$

Le premier théorème de Cauchy dit que pour tout  $w \notin \overline{\mathbb{D}}_r(z_0)$ , comme la fonction  $z \mapsto \frac{1}{z-w}$  est holomorphe au voisinage de  $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0)$  :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{dz}{z - w} = 0 = \text{Ind}_\gamma(w),$$

ce qui confirme la constante de l'indice !

Lorsque  $w \in \mathbb{D}_r(z_0)$ , Cauchy appliqué à la fonction holomorphe constante  $z \mapsto 1$  dit :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(w)} \frac{1}{z - w} dz = 1 = \text{Ind}_\gamma(w).$$

Ainsi, dans le cas d'un cercle, nous ne faisons que tourner en rond dans cette théorie ! Heureusement, d'autres ciex nous attendent.

**Théorème 6.6.** *Étant donné une homotopie continue de courbes  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  :*

$$\{t \mapsto \gamma_s(t)\}_{s \in [0,1]},$$

*si elles évitent toutes un certain point  $w \in \mathbb{C}$  :*

$$\gamma_s(t) \neq w \quad (\forall s \in [0,1], \forall t \in [0,1]),$$

*alors leurs indices demeurent constants :*

$$\text{Ind}_{\gamma_0}(w) = \text{Ind}_{\gamma_s}(w) = \text{Ind}_{\gamma_1}(w) \quad (\forall s \in [0,1]).$$

*Démonstration.* Soit en effet l'intégrale à paramètre  $s \in [0, 1]$  :

$$\text{Ind}_{\gamma_s}(w) = \int_0^1 \frac{\gamma'_s(t)}{\gamma_s(t) - w} dt,$$

et soit le compact :

$$K := \{\gamma_s(t) \in \mathbb{C} : s \in [0, 1], t \in [0, 1]\}.$$

Comme  $w \notin K$ , un exercice classique de topologie donne  $\text{dist}(w, K) > 0$ , ce qui assure la continuité de l'application :

$$[0, 1]^2 \ni (s, t) \mapsto \frac{\gamma'_s(t)}{\gamma_s(t) - w} \in \mathbb{C},$$

donc le théorème des intégrales à paramètre offre la *continuité* de l'application :

$$[0, 1] \ni s \mapsto \int_0^1 \frac{\gamma'_s(t)}{\gamma_s(t) - w} dt \in \mathbb{C},$$

et enfin, la discrétion de  $2i\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$  force cette application à être constante.  $\square$

## 7. Théorème des résidus homologique

Maintenant, considérons des courbes fermées quelconques  $\gamma \subset \Omega$ , pas forcément simples, et qui peuvent s'enrouler plusieurs fois autour d'un point  $w \in \mathbb{C}$ .

Par exemple, soit la courbe :

$$\gamma(t) := e^{4i\pi t} \quad (t \in [0,1]),$$

qui parcourt pour  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$  une première fois le cercle unité  $C = \{|\zeta| = 1\}$ , puis une seconde fois pour  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ , et soit  $f(z) := \frac{1}{z}$  que l'on intègre :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz &= \int_0^1 \frac{1}{e^{4i\pi t}} 4i\pi e^{4i\pi t} dt \\ &= 4i\pi \\ &= 2(2i\pi), \end{aligned}$$

résultat double de l'intégration sur le cercle unité  $C$  :

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2i\pi.$$

Dans la Section 6 qui précède, si  $\gamma(t) \neq w$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , nous avons déjà introduit :

$$\text{Ind}_{\gamma}(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w}.$$



Pour le point  $w := 0$ , toujours avec  $f(z) = \frac{1}{z}$ , et avec la courbe :

$$\gamma(t) := e^{k2i\pi t} \quad (t \in [0,1]),$$

où  $k \in \mathbb{Z}$  est un entier, il est visible que la courbe tourne  $k$  fois autour de l'origine, ce qui est confirmé par le calcul suivant :

$$\text{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{k 2i\pi e^{k2i\pi t}}{e^{k2i\pi t}} dt = k.$$

En fait, pour se convaincre encore mieux que  $\text{Ind}_\gamma(w)$  compte effectivement le nombre (orienté) de tours que la courbe  $\gamma$  effectue autour de  $w$ , rien ne vaut une bonne homotopie des familles paramétrée par  $s \in [0, 1]$  :

$$\gamma_s(t) := (1-s)\gamma(t) + s\left(w + \frac{\gamma(t) - w}{|\gamma(t) - w|}\right),$$

partant de  $\gamma = \gamma_0$ , et aboutissant à une courbe  $\gamma_1(t)$  située sur le cercle de rayon 1 centré en  $w$  :

$$|\gamma_1(t) - w| = \left| \frac{\gamma(t) - w}{|\gamma(t) - w|} \right| = 1 \quad (\forall t \in [0,1]).$$

**Lemme 7.1.** *On a  $\gamma_s(t) \neq w$  pour tous  $(s, t) \in [0, 1]^2$ .*

*Preuve.* En effet, soustrayons et factorisons :

$$\begin{aligned} \gamma_s(t) - w &= (1-s)(\gamma(t) - w) + s \frac{\gamma(t) - w}{|\gamma(t) - w|} \\ &= (\gamma(t) - w) \left[ (1-s) + \frac{s}{|\gamma(t) - w|} \right], \end{aligned}$$

pour constater que le deuxième facteur est toujours  $> 0$ , quel que soit  $s \in [0, 1]$ .  $\square$

Grâce à l'invariance de l'indice par homotopie que le Théorème 6.6 a établi récemment, nous avons :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - w} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z - w}.$$

Comme  $|\gamma_1(t) - w| \equiv 1$ , on s'imagine visuellement que la courbe  $\gamma_1(t)$  se déplace sur un cercle fixé centré en  $w$ , en allant parfois dans le sens trigonométrique, parfois dans le sens des aiguilles d'une montre, et qu'entre le temps de départ  $t = 0$  au point  $\gamma_1(0)$  et le temps d'arrivée  $t = 1$  au même point  $\gamma_1(1) = \gamma_1(0)$ , l'indice de  $\gamma_1$  par rapport à  $w$  compte effectivement le nombre de fois que  $\gamma_1$  a tourné autour de  $w$ .

Au final, grâce à l'homotopie qui précède, on a bien compté le nombre de fois que  $\gamma$  a tourné autour de  $w$ .

Au moyen de ce concept mathématique de « nombre de tours », voici une version homologique prototypique du théorème de représentation intégrale de Cauchy.

**Théorème 7.2.** *Dans un ouvert simplement connexe  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , soit un point-singularité  $w \in \Omega$ , et soit une courbe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  fermée :*

$$\gamma \subset \Omega \setminus \{w\}.$$

Alors toute fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  satisfait :

$$f(w) \cdot \text{Ind}_\gamma(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

Ainsi, la courbe  $\gamma$  est autorisée à s'éparpiller comme un très long serpent dans  $\Omega$ , et il faut affecter la valeur  $f(w)$  de la multiplicité entière  $\text{Ind}_\gamma(w) \in \mathbb{Z}$  pour en tenir compte. Jusqu'à présent, pour un cercle  $\gamma = C$ , ou plus généralement pour un contour de Jordan  $\gamma = \Gamma$  avec  $w \in \Gamma_{\text{int}}$ , on avait :

$$f(w) \cdot 1 = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w} dz,$$

c'est-à-dire implicitement, on avait un indice valant :

$$1 = \text{Ind}_\Gamma(w).$$

*Démonstration.* La fonction :

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} & \text{lorsque } z \neq w, \\ f'(w) & \text{pour } z = w, \end{cases}$$

est holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{w\}$ , et aussi au voisinage de  $w$ , grâce au développement auxiliaire :

$$f(z) = f(w) + f'(w)(z-w) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (z-w)^n,$$

qui fait voir son analyticité pour  $z$  proche de  $w$  :

$$g(z) = f'(w) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(w)}{(n+1)!} (z-w)^n.$$

Comme  $\Omega$  est simplement connexe,  $g$  admet une primitive  $G \in \mathcal{O}(\Omega)$  avec  $G' = g$ , donc puisque  $\gamma$  est fermée, on a :

$$0 = G(\gamma(1)) - G(\gamma(0)) = \int_\gamma g(z) dz,$$

ce qui offre la conclusion :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma g(z) dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-w} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \text{Ind}_\gamma(w). \end{aligned} \quad \square$$

Après ce préliminaire dans lequel il faut comprendre que :

$$\text{Res}_{\frac{f(z)}{z-w}}(w) = f(w),$$

nous parvenons enfin au

**Théorème 7.3. [des résidus homologique]** Dans un ouvert simplement connexe  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , soit un nombre fini  $L \geq 1$  de points-singularités mutuellement distincts  $w_1, \dots, w_L \in \Omega$ , et soit une courbe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  fermée :

$$\gamma \subset \Omega \setminus \{w_1, \dots, w_L\}.$$

Alors pour toute fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{w_1, \dots, w_L\})$  en-dehors de ces points, on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \text{Ind}_{\gamma}(w_1) \cdot \text{Res}_f(w_1) + \dots + \text{Ind}_{\gamma}(w_L) \cdot \text{Res}_f(w_L).$$

*Démonstration.* Il existe un rayon  $r > 0$  assez petit pour que les disques  $\mathbb{D}_r(w_1), \dots, \mathbb{D}_r(w_L)$  soient deux à deux disjoints et tel que chaque restriction  $f|_{\mathbb{D}_r^*(w_\ell)}$  aux disques épointés  $\mathbb{D}_r^*(w_\ell) = \mathbb{D}_r(w_\ell) \setminus \{w_\ell\}$  admette un développement de Laurent normalement convergent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{\ell,n} (z - w_\ell)^n \quad (1 \leq \ell \leq L, z \in \mathbb{D}_r^*(w_\ell)).$$

Nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que chaque partie singulière :

$$\begin{aligned} h_\ell(z) &:= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\ell,n} (z - w_\ell)^n \\ &\in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{w_\ell\}) \end{aligned}$$

est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  tout entier épointé de  $w_\ell$ .

Ensuite, sachant que pour tout  $n \leq -2$ , la fonction  $(z - w_\ell)^n$  admet dans  $\mathbb{C} \setminus \{w_\ell\}$  la primitive holomorphe  $\frac{1}{n+1} (z - w_\ell)^{n+1}$ , la convergence normale justifie de calculer aisément :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} h_\ell(z) dz &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\ell,n} \int_{\gamma} (z - w_\ell)^n dz \\ &= a_{\ell,-1} 2i\pi \text{Ind}_{\gamma}(w_\ell) \\ &= \text{Res}_f(w_\ell) 2i\pi \text{Ind}_{\gamma}(w_\ell) \quad (1 \leq \ell \leq L). \end{aligned}$$

Lorsqu'on soustrait toutes ces parties singulières :

$$\begin{aligned} g(z) &:= f(z) - h_1(z) - \dots - h_L(z) \\ &\in \mathcal{O}(\Omega), \end{aligned}$$

on obtient une vraie fonction partout holomorphe, et comme elle admet une primitive  $G \in \mathcal{O}(\Omega)$  avec  $G' = g$  dans l'ouvert simplement connexe  $\Omega$ , il vient puisque  $\gamma$  est fermée :

$$\int_{\gamma} g(z) dz = G(\gamma(1)) - G(\gamma(0)) = 0,$$

ce qui nous permet d'atterrir en douceur à bon port :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} g(z) dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} h_1(z) dz - \dots - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} h_L(z) dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz - \text{Ind}_{\gamma}(w_1) \text{Res}_f(w_1) - \dots - \text{Ind}_{\gamma}(w_L) \text{Res}_f(w_L). \quad \square
\end{aligned}$$

### 8. Théorème des résidus sans connexité simple

Maintenant, si nous souhaitons supprimer l'hypothèse de simple connexité de  $\Omega$ , il est nécessaire d'imposer une condition topologique.

**Théorème 8.1. [de Cauchy, sans simple connexité]** Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un ouvert arbitraire et soit  $\gamma \subset \Omega$  une courbe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  n'entourant aucun « trou » de  $\Omega$ , au sens où :

$$0 = \text{Ind}_{\gamma}(a) \quad (\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega).$$

Alors toute fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  satisfait l'annulation de Cauchy :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

De plus, en tout point  $w \in \Omega \setminus \gamma$  hors de la courbe :

$$\text{Ind}_{\gamma}(w) \cdot f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

*Démonstration.* La première formule découle sans effort de la seconde, appliquée à la fonction  $\tilde{f}(z) := (z-w)f(z)$  en choisissant un point fixé quelconque  $w \in \Omega \setminus \gamma$  :

$$\begin{aligned}
\text{Ind}_{\gamma}(w) \cdot \tilde{f}(w) &= \text{Ind}_{\gamma}(w) \cdot 0 = 0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(z-w) \circ f(z)}{(z-w) \circ} dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz.
\end{aligned}$$

Afin d'établir cette seconde formule, introduisons la fonction de deux variables complexes  $z, w \in \Omega$  :

$$H(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} & \text{lorsque } z \neq w, \\ f'(w) & \text{pour } z = w, \end{cases}$$

qui est  $\mathcal{C}^0$  et même  $\mathcal{C}^{\infty}$  dans  $\Omega \times \Omega$  grâce à une formule valable pour  $z \sim w$  proche de  $w$  que nous avons déjà utilisée :

$$\frac{f(z) - f(w)}{z-w} = f'(w) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(w)}{(n+1)!} (z-w)^n.$$

Ensuite, définissons :

$$h(w) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} H(z, w) dz \quad (w \in \Omega).$$

**Assertion 8.2.** Cette fonction  $h \in \mathcal{O}(\Omega)$  est holomorphe dans  $\Omega$ .

*Preuve.* La continuité de  $H$  et le théorème de continuité des intégrales à paramètre(s) assure tout d'abord que  $h \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ .

Pour vérifier l'holomorphie, il suffit de tester le critère de Morera sur tout triangle fermé  $T = \overline{T} \subset \Omega$  :

$$\begin{aligned} \int_{\partial T} h(w) dw &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial T} \left( \int_{\gamma} H(z, w) dz \right) dw \\ \text{[Fubini]} \quad &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left( \int_{\partial T} \underline{H(z, w) dw} \right) dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

l'annulation du terme souligné étant justifiée par le fait que la fonction  $w \mapsto H(z, w)$  est holomorphe dans  $\Omega$ , c'est-à-dire a une singularité illusoire en  $w = z$ , comme le fait voir le développement symétrique de celui qui précède :

$$H(z, w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = f'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (w - z)^n. \quad \square$$

À présent, introduisons :

$$\begin{aligned} \Upsilon &:= \{a \in \mathbb{C} \setminus \gamma : \text{Ind}_{\gamma}(a) = 0\} \\ \text{[Hypothèse]} \quad &\supset \mathbb{C} \setminus \Omega, \end{aligned}$$

et pour  $w \in \Upsilon$ , définissons :

$$g(w) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

**Assertion 8.3.** Dans  $\Upsilon \cap \Omega$ , les deux fonctions  $g \equiv h$  coïncident.

*Preuve.* En effet, pour tout  $w \in \Upsilon \cap \Omega$ , d'où  $w \notin \gamma$ , reconnaissons l'indice  $\text{Ind}_{\gamma}(w) = 0$ , qui disparaît :

$$\begin{aligned} h(w) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz - f(w) \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w} \\ &= g(w) - 0. \end{aligned} \quad \square$$

Comme  $\Upsilon \supset \mathbb{C} \setminus \Omega$ , la fonction :

$$F(w) := \begin{cases} h(w) & \text{lorsque } w \in \Omega, \\ g(w) & \text{lorsque } w \in \Upsilon, \end{cases}$$

est définie sur  $\mathbb{C}$  tout entier, et holomorphe, c'est-à-dire :

$$F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$

Mais comme l'indice  $\text{Ind}_{\gamma}(\cdot)$  est constant dans les composantes connexes de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ , et vaut 0 dans l'unique composante connexe non bornée  $D_{\infty}$  de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ , d'après la Proposition 6.5, on a aussi :

$$\Upsilon \supset D_{\infty}.$$

Par conséquent, les valeurs de la fonction  $F$  sont données par la seconde formule pour tout  $w \in D_\infty$  :

$$F(w) = g(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz \quad (\forall w \in D_\infty),$$

et comme  $D_\infty$  contient le complémentaire  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R$  d'un disque fermé de rayon  $R \gg 1$  assez grand centré à l'origine, il vient :

$$F(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz \quad (\forall |w| > R),$$

d'où en prenant  $R$  assez grand pour que  $\gamma \subset \overline{\mathbb{D}}_{\frac{R}{2}}$ , toujours pour  $|w| > R$  :

$$\begin{aligned} |F(w)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z-w|} |dz| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \max_\gamma |f| \frac{2}{R} \int_\gamma |dz| \\ &= \frac{1}{\pi R} \left( \max_\gamma |f| \cdot \text{longueur}(\gamma) \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

donc  $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  est holomorphe bornée avec  $|F(w)| \rightarrow 0$  à l'infini, ce qui la force, à cause du théorème de Liouville, non seulement à être constante, mais aussi à être égale à la constante nulle !

Tout ceci signifie, en restriction à  $\Omega \setminus \gamma \ni w$ , que nous atteignons la formule annoncée :

$$\begin{aligned} 0 &= F(w) = h(w) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-w} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz - \text{Ind}_\gamma(w) \cdot f(w). \quad \square \end{aligned}$$

**Théorème 8.4. [des résidus, sans simple connexité]** Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un ouvert arbitraire, et soit  $\gamma \subset \Omega$  une courbe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  n'entourant aucun « trou » de  $\Omega$  :

$$0 = \text{Ind}_\gamma(a) \quad (\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega).$$

Soit un nombre fini  $L \geq 1$  de points-singularités distincts  $w_1, \dots, w_L \in \Omega$ , et soit une fonction holomorphe en-dehors de ces points :

$$f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{w_1, \dots, w_L\}).$$

Alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) dz = \text{Ind}_\gamma(w_1) \text{Res}_f(w_1) + \dots + \text{Ind}_\gamma(w_L) \text{Res}_f(w_L).$$

*Démonstration.* Les arguments sont presque identiques à ceux de la démonstration du précédent Théorème 7.3, en soustrayant les  $L$  parties singulières pour avoir une fonction partout holomorphe :

$$\begin{aligned} g(z) &:= f(z) - h_1(z) - \dots - h_L(z) \\ &\in \mathcal{O}(\Omega), \end{aligned}$$

le fait que  $\int_\gamma g(z) dz = 0$  ne provenant plus d'une hypothèse de simple connexité sur  $\Omega$ , mais directement de la première partie du Théorème 8.1 qui vient d'être démontré.  $\square$

### 9. Dénombrément de zéros et de pôles

Grâce à notre présentation de la fonction logarithme complexe, si une fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^*)$  ne s'annule pas en tous les points  $z \in \Omega$ , on peut définir :

$$\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z) + 2i\pi \mathbb{Z},$$

mais cette « fonction » est multivaluée. Puisque  $(\log z)' = \frac{1}{z}$ , la formule de dérivation composée montre que la dérivée de cette fonction multivaluée :

$$(\log f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

est une vraie fonction holomorphe univaluée. Alors le long d'une courbe  $\gamma$  de classe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  qui ne rencontre aucun zéro de  $f$ , l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta &= \left[ \log f(\zeta) \right]_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} \\ &= \log |f(\gamma(1))| - \log |f(\gamma(0))| + i \left( \arg f(\gamma(1)) - \arg f(\gamma(0)) \right) \\ &= i \left( \arg f(\gamma(1)) - \arg f(\gamma(0)) \right) \end{aligned}$$

s'interprète comme la variation de l'argument de  $f(z)$ , supposé variant continûment, lorsqu'on parcourt  $\gamma$ . Nous allons voir que ce différentiel d'argument est entièrement déterminé par les zéros et les pôles de  $f$  qui sont situés « à l'intérieur » de  $\gamma$ .

**Terminologie 9.1.** La *dérivée logarithmique* d'une fonction  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  en un point  $z \in \Omega$  où  $f(z) \neq 0$  est :

$$\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

En guise de préliminaire, commençons par observer que bien qu'on n'ait pas en général de formule d'additivité :

$$\log (f_1 f_2) \stackrel{\text{faux}}{=} \log f_1 + \log f_2,$$

une vraie additivité existe quand même au niveau des dérivées logarithmiques, comme le montre un petit calcul :

$$\frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \frac{f_1' f_2 + f_1 f_2'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2},$$

qui se généralise aisément :

$$\frac{(f_1 \cdots f_M)'}{f_1 \cdots f_M} = \frac{f_1'}{f_1} + \cdots + \frac{f_M'}{f_M}.$$

Maintenant, rappelons que si  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  avec  $f \not\equiv 0$  a un zéro  $0 = f(z_0)$  d'ordre  $n \geq 1$  en un point  $z_0 \in \Omega$ , elle se factorise comme :

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z),$$

avec  $g \in \mathcal{O}(\Omega)$  satisfaisant  $g(z_0) \neq 0$ , d'où pour la dérivée logarithmique :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

le reste  $\frac{g'(z)}{g(z)}$  étant holomorphe près de  $z_0$ . De manière similaire, si  $f$  a un pôle d'ordre  $m \geq 1$  en un point  $w_0 \in \Omega$ , puisqu'elle se factorise aussi comme :

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - w_0)^m},$$

il vient :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m}{z - w_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Nous retrouvons ainsi — cf. la Proposition 3.3 — que  $\frac{f'}{f}$  a des pôles simples aux zéros et aux pôles de  $f$ , avec :

$$\operatorname{Res}_{\frac{f'}{f}}(z_0) = n \quad \text{et} \quad \operatorname{Res}_{\frac{f'}{f}}(w_0) = -m.$$

Ce sont ces zéros et ces pôles qui gouvernent la variation de l'argument.

**Théorème 9.2. [Principe de l'argument]** *Soit un ouvert  $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\text{int}}$  contenant un contour de Jordan et son intérieur, et soit une fonction  $f \in \mathcal{M}(\Omega)$  méromorphe dans  $\Omega$ . Si  $f$  est holomorphe et jamais nulle au voisinage de  $\Gamma$  :*

$$f \in \mathcal{M}(\Omega) \cap \mathcal{O}^*(\text{voisinage}(\Gamma)),$$

*et si elle possède à l'intérieur un nombre fini  $K \geq 0$  de zéros  $z_1, \dots, z_K \in \Gamma_{\text{int}}$  d'ordres  $n_1, \dots, n_K \geq 1$  ainsi qu'un nombre fini  $L \geq 0$  de pôles  $w_1, \dots, w_L \in \Gamma_{\text{int}}$  d'ordres  $m_1, \dots, m_L \geq 1$ , alors :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = n_1 + \dots + n_K - m_1 - \dots - m_L.$$

De manière abrégée :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \# \text{zéros}(f) - \# \text{pôles}(f),$$

comptés avec multiplicité, en supposant donc que  $\Gamma$  ne contient ni zéro ni pôle. En particulier, quand  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , c'est-à-dire quand  $L = 0$ , cette formule permet de comptabiliser le nombre total de zéros de  $f$  à l'intérieur depuis le bord de la piscine, en montrant ses biscoteaux.

*Démonstration.* Grâce au rappel des valeurs  $n_k$ ,  $1 \leq k \leq K$ , des résidus de  $\frac{f'}{f}$  en les zéros  $z_k$  de  $f$ , ainsi que des valeurs  $-m_\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq L$ , de ceux en les pôles  $w_\ell$ , cette formule est un corollaire direct du Théorème 4.3.  $\square$

Voici deux variations de ce *Principe de l'argument*, qui sont inspirées du Théorème 7.3 et du Théorème 8.4, et en sont corollaires directs.

**Théorème 9.3.** *Dans un ouvert simplement connexe  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , si une fonction méromorphe :*

$$f \in \mathcal{M}(\Omega)$$

*possède dans  $\Omega$  un nombre fini  $K \geq 0$  de zéros  $z_1, \dots, z_K \in \Omega$  d'ordres  $n_1, \dots, n_K \geq 1$  ainsi qu'un nombre fini  $L \geq 0$  de pôles  $w_1, \dots, w_L \in \Omega$  d'ordres  $m_1, \dots, m_L \geq 1$ , et si  $\gamma \subset \Omega$  est une courbe fermée  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  ne les rencontrant pas :*

$$\gamma \subset \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_K, w_1, \dots, w_L\},$$



alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{k=1}^K \text{Ind}_{\gamma}(z_k) n_k - \sum_{\ell=1}^L \text{Ind}_{\gamma}(w_{\ell}) m_{\ell}.$$

Le même résultat vaut dans un ouvert arbitraire  $\Omega \subset \mathbb{C}$  en supposant que  $\gamma$  n'entoure aucun « trou » de  $\Omega$  :

$$\text{Ind}_{\gamma}(a) = 0 \quad (\forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega). \quad \square$$

Terminons ce chapitre par une dernière application théorique du théorème des résidus pour les contours de Jordan.

**Théorème 9.4. [de Rouché]** Soient deux fonctions  $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$  holomorphes dans un ouvert  $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\text{int}}$  contenant un contour de Jordan  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  ainsi que son intérieur. Si :

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad (\forall z \in \Gamma),$$

alors  $f$  et  $g$  ont le même nombre de zéros dans  $\Gamma_{\text{int}}$ , comptés avec multiplicité.

*Démonstration.* L'hypothèse-inégalité garantit (exercice visuel) que ni  $f$  ni  $g$  ne s'annulent sur  $\Gamma$ , d'où  $f \not\equiv 0$  et  $g \not\equiv 0$  dans l'ouvert connexe  $\Gamma_{\text{int}}$ , et comme  $\Gamma \cup \Gamma_{\text{int}}$  est compact,  $f$  et  $g$  ont alors, grâce au principe des zéros isolés, un nombre fini de zéros dans  $\Gamma_{\text{int}}$  — heureusement !

La fonction-quotient :

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$$

est méromorphe dans un certain sous-voisinage ouvert connexe :

$$\omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\text{int}} \quad \text{avec} \quad \omega \subset \Omega,$$

et elle est holomorphe dans un certain voisinage ouvert :

$$\varpi \supset \Gamma,$$

assez rétréci pour que  $g \neq 0$  ne s'y annule jamais, ce qui est possible par continuité puisque  $g \neq 0$  sur  $\Gamma$ .

Alors une division par  $g(z)$  dans l'inégalité-hypothèse donne, quitte à rétrécir  $\varpi$  si nécessaire :

$$|h(z) - 1| < 1 \quad (\forall z \in \varpi).$$

Autrement dit,  $h: \varpi \rightarrow \{w \in \mathbb{C}: |w - 1| < 1\}$  envoie  $\varpi$  dans le disque ouvert  $\mathbb{D}_1(1)$  de rayon 1 centré en 1. Comme  $\mathbb{D}_1(1) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , nous pouvons utiliser la détermination principale du logarithme :

$$\log z = \log r + i\theta \quad (r > 0, -\pi < \theta < \pi),$$

pour composer et obtenir une fonction :

$$\log h(z),$$

ayant pour dérivée :

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \quad (z \in \Gamma),$$

ce qui nous offre une belle primitive ! Comme  $\Gamma$  est fermé, c'est terminé :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \\ \text{[Théorème 9.2]} \quad &= \# \text{ zéros } (f) - \# \text{ zéros } (g) \quad \square \end{aligned}$$

## 10. Caractérisation de la connexité simple en termes d'indices

Il est maintenant intéressant de comparer les diverses formules des résidus obtenues jusqu'à présent, notamment le Théorème 7.3 et le Théorème 8.4. À cette fin, nous devons interpréter la connexité simple du point de vue du complémentaire de l'ouvert  $\Omega$ .

**Théorème 10.1.** *Dans un ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , on a équivalence entre :*

- (i)  $\Omega$  est simplement connexe ;
- (ii)  $0 = \text{Ind}_{\gamma}(w)$  pour toute courbe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  fermée  $\gamma \subset \Omega$  et tout point  $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$  ;
- (iii)  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est connexe.

L'implication ascendante (iii)  $\implies$  (i) est profonde, elle nécessite le Théorème d'approximation de Runge, comme nous l'avons déjà vu, et elle nécessitera aussi le Théorème de Riemann conforme, qui sera démontré dans le prochain chapitre.

*Démonstration.* (i)  $\implies$  (ii). Soit un point quelconque  $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ . La fonction  $f(\zeta) := \frac{1}{\zeta - w}$  est clairement holomorphe dans  $\Omega$ . Comme  $\Omega$  est simplement connexe, elle admet une primitive  $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ , avec  $F'(\zeta) = f(\zeta)$ . Soit  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  une courbe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  fermée :  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Alors l'indice concerné s'annule effectivement :

$$\text{Ind}_{\gamma}(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0.$$

(ii)  $\implies$  (iii). Supposons par l'absurde que le fermé  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  n'est pas connexe. De manière équivalente, il existe une décomposition :

$$\mathbb{C} \setminus \Omega = F_1 \cup F_2,$$

en deux fermés non vides disjoints.

**Assertion 10.2.** *Un seul parmi  $F_1$  et  $F_2$  est non borné.*

*Preuve.* Comme  $\Omega$  est borné, il existe un rayon  $R \gg 1$  assez grand pour que  $\Omega \subset \mathbb{D}_R$ . Mais alors l'extérieur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_R \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$  de ce disque est connexe, donc dans sa décomposition en deux fermés (relatifs) :

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_R = \left[ (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_R) \cap F_1 \right] \cup \left[ (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_R) \cap F_2 \right],$$

un seul peut être non vide, disons le premier, d'où :

$$F_1 \supset \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_R,$$

et par conséquent l'autre  $F_2 \subset \overline{\mathbb{D}}_R$  est borné. □

Re-notons alors :

$$\mathbb{C} \setminus \Omega = F \cup K,$$

où  $F \neq \emptyset$  est fermé et  $K \neq \emptyset$  est compact.

Pour atteindre une contradiction, nous allons construire une courbe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  fermée  $\gamma$  'explicitite', et trouver un point  $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$  tel que  $0 \neq \text{Ind}_\gamma(w)$ . Cette courbe  $\gamma$  sera construite comme partie du bord d'une réunion finie de petits carrés de chocolat bien choisis.

**Proposition 10.3.** *Dans le plan complexe  $\mathbb{C}$ , soit un fermé non vide  $F \neq \emptyset$ , soit un compact non vide  $K \neq \emptyset$  avec  $K \cap F = \emptyset$  de telle sorte que :*

$$d := \text{dist}(K, F) > 0,$$

et soit un point quelconque  $w \in K$ . Alors il existe une collection finie  $\{\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \dots, \overline{Q}_L\}$  de carrés fermés appartenant à une grille uniforme dans le plan de côté  $\delta > 0$  avec  $\delta \ll d$ , qui satisfont :

- (a)  $w \in Q_1$  appartient à l'intérieur de  $Q_1$  ;
- (b) pour tous  $1 \leq \ell_1 \neq \ell_2 \leq L$ , les intérieurs  $Q_{\ell_1} \cap Q_{\ell_2} = \emptyset$  sont disjoints ;
- (c)  $K$  est contenu dans l'intérieur de la réunion  $\bigcup_{1 \leq \ell \leq L} \overline{Q}_\ell$  ;
- (d)  $\bigcup_{1 \leq \ell \leq L} \overline{Q}_\ell$  est disjoint de  $F$  ;
- (e) le bord de  $\bigcup_{1 \leq \ell \leq L} \overline{Q}_\ell$  est entièrement contenu dans l'ouvert  $\Omega := \mathbb{C} \setminus (F \cup K)$ , et il consiste en un nombre fini  $M \geq 1$  de courbes polygonales fermées simples  $\gamma_1, \dots, \gamma_M$  disjointes deux à deux.

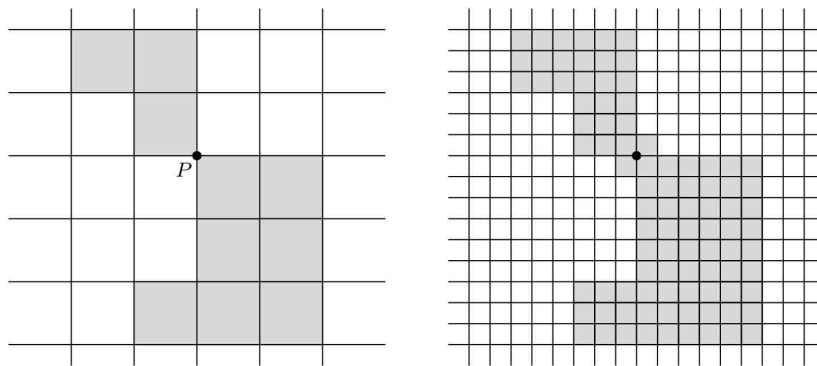
*Démonstration.* Découpons le plan  $\mathbb{C}$  le long d'une grille uniforme infinie de côté  $0 < 3\delta \ll d$  de telle sorte que  $w$  se trouve au centre d'un des carrés fermés d'aire  $(3\delta) \times (3\delta)$  de la grille.

Soit alors  $\{\overline{R}_1, \dots, \overline{R}_J\}$  la collection finie de tous les carrés fermés qui intersectent  $K$ , dont les bords sont orientés dans le sens trigonométrique. On peut supposer  $w$  au centre du carré ouvert  $R_1$ . Alors on vérifie (exercice) que cette collection satisfait les propriétés (a), (b), (c), (d) de la proposition. Pour garantir que (e) est aussi satisfaite, nous allons devoir remodeler cette collection, comme suit.

Le bord topologique de la réunion :

$$\mathcal{R} := \bigcup_{1 \leq j \leq J} \overline{R}_j$$

consiste alors en la réunion des côtés des carrés qui ne sont pas frontière commune entre deux carrés de la collection. Appelons-les *segments bordants*. Leur réunion forme une courbe polygonale — pas forcément connexe — constituée de segments dirigés par la grille.



Sur le bord  $\partial\mathcal{R}$  de cette région, on trouve des *sommets*, qui sont par définition toutes les extrémités de tous les segments de longueur  $3\delta$  bordants, tandis que les sommets « intérieurs », ont disparu, engloutis.

On dira qu'un sommet appartenant à un segment bordant est *confluent* s'il est extrémité d'un nombre  $\geq 3$  de segments bordants. On se convainc (exercice) que ce nombre est toujours exactement égal à 4. Ces sommets confluents posent problème pour définir les courbes simples fermées disjointes  $\gamma_1, \dots, \gamma_M$ , car en eux, elles se rencontrent. Nous devons donc *éliminer* tous les points confluents. Soit  $P \geq 0$  le nombre de points confluents.

Rien de plus simple ! Trisectons la grille de départ et remplaçons-la par une grille uniforme de côté  $\frac{3\delta}{3} = \delta$ . Les carrés  $\bar{R}_j$  pour  $1 \leq j \leq J$  sont alors remplacés par  $9J$  sous-carrés fermés, qui forment une nouvelle collection  $\{\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_{9J}\}$  de cardinal nonuple. Le point  $w \in R_1$  qui était au centre de  $R_1$  est alors encore au centre d'un unique carré ouvert de la nouvelle grille, disons  $Q_1$ .

Comme le montre la figure, afin de fusionner les courbes bordantes qui se rencontrent en des points confluents, on ajoute 2 carrés au voisinage de tout point confluent. Avec  $L := 9J + 2P$ , notons alors :

$$\{\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_L\}$$

la collection, définitive, des carrés fermés ainsi obtenus. On se convainc (exercice) que cette collection satisfait toujours les propriétés (a), (b), (c), (d) de la proposition. Nous affirmons que cette collection satisfait aussi (e).

En effet, soit  $[a_1, a_2]$  un segment bordant (de longueur  $\delta$ ) pour la réunion :

$$\mathcal{Q} := \bigcup_{1 \leq \ell \leq L} \bar{Q}_\ell.$$

Alors  $a_2$  est le point de départ d'un autre segment bordant  $[a_2, a_3]$ . En continuant de cette manière, on construit une suite de segments bordants  $[a_1, a_2], [a_2, a_3], \dots, [a_p, a_{p+1}], \dots$

Puisqu'il existe seulement un nombre fini de segments bordants, la suite de ces sommets est forcée de satisfaire  $a_q = a_p$  pour un certain  $p$  et un certain  $q \geq p + 1$ . Choisissons le plus petit tel entier  $p$  et le plus petit entier  $q$ .

**Assertion 10.4.** On a  $p = 1$ .

*Preuve.* Si on avait au contraire  $p \geq 2$ , alors le point  $a_q$  serait sommet d'au moins trois segments bordants :

$$[a_{p-1}, a_p], \quad [a_p, a_{p+1}], \quad [a_{q-1}, a_q],$$

donc  $a_q$  serait un sommet confluent, mais on les a tous supprimés à l'avance !  $\square$

Par conséquent, le polygone formé par les sommets  $a_1, \dots, a_q$  est une courbe fermée simple, disons  $\gamma_1$ .

Enfin, les autres courbes  $\gamma_2, \dots, \gamma_M$  sont construites au moyen du même procédé.  $\square$

Grâce à cette proposition, nous pouvons maintenant aisément conclure l'implication **(ii)**  $\implies$  **(iii)**, toujours en raisonnant par l'absurde. Orientons, comme nous l'avons dit, le bord  $\partial Q_\ell$  de chaque carré dans le sens trigonométrique. Puisque  $w \in Q_1$  est à l'intérieur de  $Q_1$ , on a  $w \notin Q_\ell$  pour  $2 \leq \ell \leq L$ , et la formule de Cauchy donne :

$$\sum_{1 \leq \ell \leq L} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial Q_\ell} \frac{d\zeta}{\zeta - w} = 1.$$

Ensuite, si  $\gamma_1, \dots, \gamma_M$  désignent les courbes polygonales fermées simples disjointes satisfaisant **(e)** de la Proposition 10.3, des annulations entre intégrales effectuées sur des paires de segments orientés de manière opposée permettent de récrire cette identité sous la forme :

$$\sum_{m=1}^M \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_m} \frac{d\zeta}{\zeta - w} = 1.$$

Par conséquent, on doit avoir  $\text{Ind}_{\gamma_{m_*}}(w) \neq 0$  pour au moins un indice  $m_*$ . Par construction, la courbe  $\gamma_{m_*} \subset \Omega$  est entièrement contenue dans l'ouvert, et ainsi,  $\gamma := \gamma_{m_*}$  apporte la contradiction annoncée.

Modulo l'implication **(iii)**  $\implies$  **(i)** qui ne pourra être établie que dans le chapitre suivant, la démonstration s'arrête.  $\square$

## 11. Synthèse intermédiaire : connexité simple et holomorphic

Nous pouvons énoncer un résultat intermédiaire en direction d'une synthèse théorique toujours en suspens depuis que nous avons édifié la théorie de Cauchy, mais qui ne pourra être achevée que dans le prochain chapitre.

**Théorème 11.1.** *Pour un ouvert non vide borné  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , les 4 conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i)**  $\Omega \cong \mathbb{D}$  est biholomorphe au disque unité  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ .
- (ii)**  $\Omega$  est simplement connexe.
- (iii)**  $0 = \text{Ind}_\gamma(w)$  pour toute courbe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  fermée  $\gamma \subset \Omega$  et tout point  $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ .
- (iv)**  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est connexe.

Rappelons que nous avons déjà démontré que **(iv)** implique une propriété d'approximation uniforme des fonctions holomorphes par des polynômes sur les compacts :

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \forall K \subset \Omega \text{ compact} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists P(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{tel que} \quad \max_{z \in K} |f(z) - P(z)| \leq \varepsilon.$$

Nous avons aussi vu que ceci entraîne à son tour que pour toute courbe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  fermée, on a :

$$0 = \int_\gamma f(\zeta) d\zeta \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)).$$

Dans le prochain chapitre, nous allons établir un théorème célèbre de Riemann, d'après lequel ces dernières annulations intégrales impliquent la condition très forte **(i)** affirmant que l'ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{D}$  est biholomorphe au disque unité.

## 12. Exercices

**Exercice 1.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un ouvert étoilé en l'un de ses points.

(a) Montrer, pour toute courbe  $\mathcal{C}_{\text{pm}}^1$  fermée  $\gamma \subset \Omega$ , et pour tout  $w \notin \Omega$ , que :

$$0 = \text{Ind}_\gamma(w).$$

(b) Généraliser cela aux ouverts simplement connexes  $\Omega \subset \mathbb{C}$ .

**Exercice 2.** Soit une courbe continue  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Montrer qu'il existe une application continue  $\theta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  telle que :

$$\gamma(t) = e^{\theta(t)} \quad (\forall t \in [0, 1]).$$

Indication: Observer que l'exponentielle complexe  $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C}^*$  établit un difféomorphisme local au sens où, autour de tout  $z \in \mathbb{C}$ , il existe un ouvert  $U \ni z$  et il existe un ouvert  $V \ni e^z$  tel que :

$$\exp: U \xrightarrow{\sim} V$$

est un difféomorphisme.

**Exercice 3.** EE