Fonctions holomorphes, Fonctions analytiques
Intégration le long de courbes

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

Ce chapitre commence par un survol rapide des propriétés algébriques élémentaires des nombres complexes, avant de présenter les concepts topologiques fondamentaux concernant les sous-ensembles du plan complexe $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Ensuite, on définit précisément la notion-clé de *fonction* $\mathbb{C}$*-différentiable ou holomorphe*, qui est l'analogue complexe de la notion de fonction réelle $\mathbb{R}$-différentiable. On caractérise alors l'*holomorphie* par les équations dites *de Cauchy-Riemann*, et on démontre que les séries entières convergentes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \qquad\qquad (a_n \in \mathbb{C})$$

en la variable complexe $z = x + i\, y \in \mathbb{C}$ sont toujours $\mathbb{C}$-différentiables, *i.e.* holomorphes.

Enfin, on définit la notion d'*intégration* d'une fonction le long d'une courbe $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ tracée dans le plan complexe $\mathbb{C}$. En particulier, on démontre un premier résultat important de la théorie d'après lequel, si une fonction $f = f(z)$ holomorphe par rapport à la variable $z = x + iy$ admet une *primitive*, à savoir une fonction $F = F(z)$ dont la $\mathbb{C}$-dérivée par rapport à z est exactement f, alors pour toute courbe fermée $\sigma \subset \mathbb{C}$, on a :

$$0 = \int_\sigma f(z)\, dz.$$

Ainsi s'effectuera le tout premier pas vers la théorie *magique* de Cauchy, laquelle joue un rôle absolument central dans la toute belle *Analyse Complexe*.

2. Nombres complexes et similitudes complexes

Un *nombre complexe* prend la forme :

$$z = x + i\,y,$$

où x et y sont deux nombres réels et où i est un nombre (abstrait) satisfaisant :

$$i^2 = -1,$$

que les mathématiciens asiatiques préfèrent noter systématiquement :

$$\sqrt{-1},$$

mais il s'agit d'un autre continent, où l'on ne craint aucun caractère. Classiquement, on note :

$$\boxed{\mathbb{C}}$$

l'ensemble de ces nombres.

On appelle x la *partie réelle* de z et y la *partie imaginaire* de z :

$$x = \operatorname{Re} z,$$
$$y = \operatorname{Im} z.$$

Les nombres réels sont donc précisément les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle, et les nombres *purement imaginaires :*

$$\big\{i\,y\colon\ y \in \mathbb{R}\big\},$$

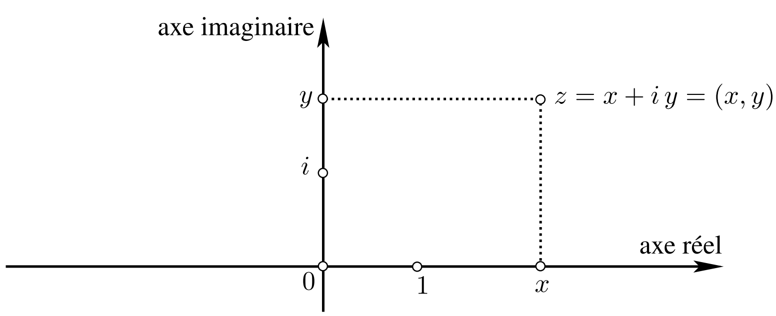
ceux dont la partie réelle est nulle.

Grâce à Argand et à Gauss, on peut visualiser les nombres complexes dans le plan euclidien usuel $\mathbb{R}^2$ en identifiant :

$$\mathbb{C} \ni x + i\,y \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Par exemple, $0 \in \mathbb{C}$ correspond à l'origine $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, et le nombre $i = \sqrt{-1}$ correspond au point $(0,1) \in \mathbb{R}^2$.

Naturellement, l'axe des x est appelé l'*axe réel*, tandis que l'axe des y est appelé l'*axe imaginaire*.



Les règles pour additionner et pour soustraire les nombres complexes sont naturelles : il suffit de conserver en mémoire que $i^2 = -1$.

Par exemple, étant donné deux nombres complexes :

$$z_1 = x_1 + i\,y_1 \qquad \text{et} \qquad z_2 = x_2 + i\,y_2,$$

leur somme vaut :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2),$$

et leur produit vaut :

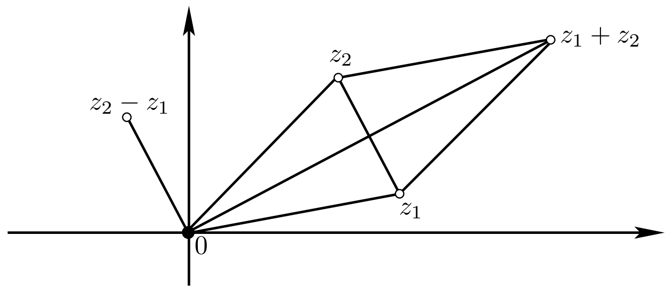
$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x_1 + i\, y_1)\,(x_2 + i\, y_2) \\
&= x_1 x_2 + i\, x_1 y_2 + i\, y_1\, x_2 + i^2\, y_1 y_2 \\
&= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + y_1 x_2).
\end{aligned}
$$

Si l'on prend ces deux expressions pour définitions de l'addition et de la multiplication, il est facile de vérifier les trois propriétés suivantes.

• Commutativité : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ et $z_1 z_2 = z_2 z_1$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

• Associativité : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ et $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

• Distributivité : $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.



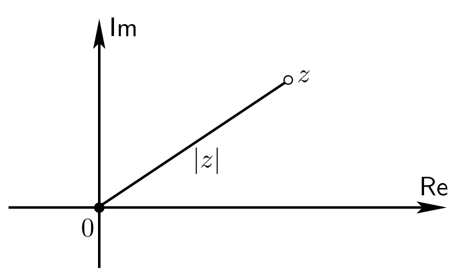
Géométriquement, l'addition des nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs dans le plan $\mathbb{R}^2$. La multiplication quant à elle consiste en une rotation suivie d'une dilatation, un fait qui devient intuitivement transparent une fois qu'on a introduit la forme polaire d'un nombre complexe (voir ci-dessous). À ce stade, observons au moins que *la multiplication par i correspond à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$*.

La notion de valeur absolue d'un nombre complexe est identique à la norme euclidienne des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 2.1. La *valeur absolue* ou le *module* d'un nombre complexe $z = x + i\, y$ est la quantité positive :

$$
|z| := \big(x^2 + y^2\big)^{\frac{1}{2}},
$$

de telle sorte que $|z|$ est précisément la *distance euclidienne* entre l'origine $(0, 0)$ et le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.



Bien entendu, $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$, et l'*inégalité du triangle* est tout aussi valable :

$$
|z + w| \leqslant |z| + |w| \qquad (z, w \in \mathbb{C}).
$$

D'autres inégalités seront aussi utiles. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}\big|\mathrm{Re}\, z\big| &\leqslant |z|,\\ \big|\mathrm{Im}\, z\big| &\leqslant |z|,\end{aligned}$$

et pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|,$$

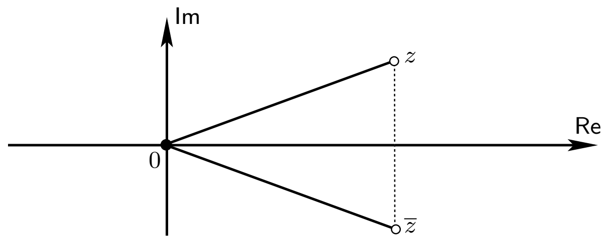
ce qui découle par soustraction de l'inégalité du triangle, puisque :

$$|z| \leqslant |z - w| + |w| \qquad \text{et} \qquad |w| \leqslant |z - w| + |z|.$$

Définition 2.2. Le *conjugué* d'un nombre complexe $z = x + i\, y$ est le nombre :

$$\overline{z} = x - i\, y,$$

que l'on obtient géométriquement en appliquant la symétrie le long de l'axe réel du plan complexe.



Évidemment, un nombre complexe z est réel si et seulement si :

$$z = \overline{z},$$

et il est imaginaire pur si et seulement si :

$$z = -\,\overline{z}.$$

On vérifie aussi sans difficulté que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\, z &= \frac{z + \overline{z}}{2},\\ \mathrm{Im}\, z &= \frac{z - \overline{z}}{2\, i}.\end{aligned}$$

De plus :

$$|z|^2 = z\, \overline{z},$$

et aussi :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \qquad\qquad (z \neq 0).$$

Définition 2.3. Un nombre complexe quelconque $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ non nul peut toujours s'écrire sous forme *polaire :*

$$z = r\, e^{i\,\theta},$$

avec $r > 0$ réel égal au module $|z|$ et $\theta \in \mathbb{R}$ appelé l'*argument* de z, qui est défini à un multiple entier $\in \mathbb{Z}$ de 2π près, traditionnellement noté :

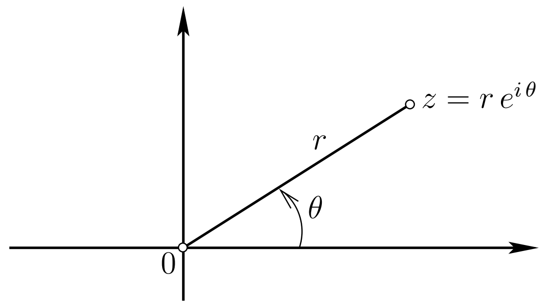
$$\theta = \arg z,$$

sachant que :

$$\begin{aligned} e^{i\,\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta, \\ e^{i(\theta+2k\pi)} &= \cos\big(\theta+2k\pi\big) + i\sin\big(\theta+2k\pi\big) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta, \end{aligned}$$

pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, en effet.

Puisque $|e^{i\,\theta}| = 1$, le nombre θ est l'*angle* que fait la demi-droite $0z$ avec l'axe des réels positifs.



Enfin, notons que la multiplication entre deux nombres complexes $z = r\,e^{i\,\theta}$ et $w = s\,e^{i\,\varphi}$ donne :

$$z\,w = rs\,e^{i(\theta+\varphi)},$$

de telle sorte que *la multiplication complexe consiste toujours, géométriquement, en une homothétie composée (commutativement) avec une rotation.*

3. Convergence

Les notions-clés de *convergence* et de *limite* permettent maintenant d'effectuer une transition appropriée.

Définition 3.1. Une suite de nombres complexes :

$$\big\{z_1,\, z_2,\, z_3,\, \ldots\ldots\big\}$$

est dite *convergente* vers un nombre complexe $z_\infty \in \mathbb{C}$ lorsque :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big|z_n - z_\infty\big|.$$

Cette notion de convergence n'a rien de nouveau, puisque la valeur absolue dans $\mathbb{C}$ s'identifie à la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi, la suite de points $z_n = x_n + i\,y_n$ du plan converge vers le point $z_\infty = x_\infty + i\,y_\infty$. On vérifie en effet (exercice mental) que :

$$z_\infty = \lim_{n\to\infty} z_n \quad\Longleftrightarrow\quad \Big(x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{et} \quad y_\infty = \lim_{n\to\infty} y_n\Big).$$

Comme il n'est pas toujours possible de réellement identifier explicitement la limite d'une suite, comme par exemple le nombre réel fini $\zeta(3) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ dont on sait seulement qu'il est irrationnel (Apéry 1978), il est nécessaire de posséder un critère qui assure la convergence d'une suite.

Définition 3.2. Une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ est dite être une *suite de Cauchy* lorsque :

$$0 = \lim_{n_1,\, n_2\to\infty} \big|z_{n_2} - z_{n_1}\big|,$$

à savoir plus précisément lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \gg 1 \qquad \Big(n_1,\ n_2 \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \big|z_{n_2} - z_{n_1}\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Une propriété fondamentale du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels est qu'il est *complet : toute suite de Cauchy de nombres réels admet une (unique) limite qui est un nombre réel*. C'est d'ailleurs pour assurer l'existence de limites, souvent inexistantes dans le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, que l'on construit $\mathbb{R}$ comme étant la *complétion* de $\mathbb{Q}$, soit en idéalisant les limites de toutes les suites de Cauchy possibles, soit en utilisant la notion de coupure au sens de Dedekind.

Bien entendu, la complétude de $\mathbb{R}$ est héritée par $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ (exercice mental).

Théorème 3.3. *Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est complet.* □

4. Sous-ensembles du plan complexe $\mathbb{C}$

Tournons maintenant notre attention vers des considérations topologiques élémentaires qui seront nécessaires à notre étude ultérieure des fonctions.

Définition 4.1. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ est un point, pour $r > 0$, le *disque ouvert* $\mathbb{D}_r(z_0)$ *de centre* z_0 *et de rayon* r est l'ensemble :

$$\mathbb{D}_r(z_0) := \big\{z \in \mathbb{C} \colon\ |z - z_0| < r\big\},$$

et c'est précisément le disque géométrique euclidien (ouvert) dans $\mathbb{R}^2$ de centre $(\mathsf{Re}\, z_0, \mathsf{Im}\, z_0)$ et de rayon r.

Le *disque fermé* $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0)$ *de centre* z_0 *et de rayon* $r \geqslant 0$ est quant à lui l'ensemble :

$$\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) := \big\{z \in \mathbb{C} \colon\ |z - z_0| \leqslant r\big\}.$$

Enfin, le bord géométrique commun de deux tels disques, ouvert ou fermé, de rayon $r > 0$, est bien entendu le *cercle de centre* z_0 *et de rayon* r *:*

$$\begin{aligned} C_r(z_0) &:= \big\{z \in \mathbb{C} \colon\ |z - z_0| = r\big\} \\ &= \partial\, \mathbb{D}_r(z_0) \\ &= \partial\, \overline{\mathbb{D}}_r(z_0). \end{aligned}$$

Dans la théorie des fonctions holomorphes que nous allons développer et découvrir ensemble, le *disque unité*, à savoir le disque de rayon 1 centré à l'origine, va jouer un rôle particulièrement important, et nous le noterons :

$$\boxed{\mathbb{D} := \big\{z \in \mathbb{C} \colon\ |z| < 1\big\}.}$$

Définition 4.2. Étant donné un sous-ensemble *quelconque* $E \subset \mathbb{C}$, un point $z_0 \in E$ est dit être un *point intérieur* s'il existe un disque ouvert de rayon $r > 0$ assez petit centré en z_0 qui est contenu dans E :

$$\mathbb{D}_r(z_0) \subset E.$$

L'*intérieur* $\mathsf{Int}\, E$ de E est la réunion de tous les points intérieurs de E. Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *ouvert* lorsque chacun de ses points est un point intérieur :

$$\forall\, z_0 \in \Omega \quad \exists\, r > 0 \quad \mathbb{D}_r(z_0)\ \subset\ \Omega,$$

ou, de manière équivalente, lorsque :

$$\mathsf{Int}\, \Omega = \Omega.$$

On se convainc aisément (exercice de compréhension) que cette définition munit $\mathbb{C}$ d'une topologie, ne serait-ce que parce que cette topologie coïncide avec la topologie standard de $\mathbb{R}^2$.

Définition 4.3. Un sous-ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est dit *fermé* lorsque son complémentaire :

$$\mathbb{C}\backslash F$$

est ouvert.

Cette notion d'ensemble fermé peut être reformulée et comprise en termes d'adhérence.

Définition 4.4. Un point $z \in \mathbb{C}$ est dit être un *point adhérent* à un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ lorsqu'il existe une suite de points $z_n \in E$ telle que :

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z.$$

L'*adhérence* $\overline{E}$ de E est la réunion de E avec tous les points qui lui sont adhérents.

On vérifie (exercice) qu'un sous-ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est fermé si et seulement si tout point adhérent à F appartient encore à F, ou de manière équivalente, si et seulement si :

$$\overline{F} = F.$$

Définition 4.5. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, un sous-ensemble $E \subset \Omega$ est dit *discret* lorsque :

$$\begin{aligned} \forall\, z \in E \quad \exists\, \mathbb{D}_r(z) \ \text{ avec } \ r > 0 \ \text{ et } \ \mathbb{D}_r(z) \subset \Omega \\ \text{tel que } \ \mathbb{D}_r(z) \cap E = \{z\}. \end{aligned}$$

Définition 4.6. Le *bord* ∂E d'un ensemble E est le complémentaire de son intérieur dans son adhérence :

$$\partial E := \overline{E} \backslash \mathrm{Int}\, E.$$

Ainsi, $w \in \partial E$ s'il existe deux suites $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $z_n \in E$ et $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $\zeta_n \in \mathbb{C}\backslash E$ telles que :

$$\lim_{n\to\infty} z_n \,=\, w \,=\, \lim_{n\to\infty} \zeta_n,$$

ce qui veut dire, intuitivement, que ∂E consiste en les points qui 'hésitent' entre E et son complémentaire $\mathbb{C}\backslash E$.

Définition 4.7. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit *borné* s'il existe un rayon $R > 0$ assez grand pour que :

$$E \,\subset\, \big\{|z| \leqslant R\big\},$$

à savoir si E est contenu dans un disque fermé assez grand. Lorsque E est borné, son *diamètre* est défini par :

$$\mathrm{diam}\, E := \sup_{z,\, w \in E} |z - w|.$$

Définition 4.8. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit *compact* lorsqu'il est fermé et borné.

Théorème 4.9. (Exercice de révision) *Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est compact si et seulement si tout suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $z_n \in E$ possède une sous-suite $\big\{z_{n_k}\big\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge vers un point de E.* □

Définition 4.10. Un *recouvrement ouvert* d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est une famille d'ouverts $\big(\mathsf{U}_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ indexée par un ensemble A quelconque dont la réunion contient E :

$$E \subset \bigcup_{\alpha \in A} \mathsf{U}_\alpha.$$

Puisque $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, on a le :

Théorème 4.11. [Heine-Borel] *Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est compact si et seulement si, partant d'un recouvrement ouvert quelconque de E, on peut extraire un nombre* fini *d'ouverts dont la réunion recouvre encore E.*

Un autre concept intéressant est celui de *suite d'ensembles emboîtés* :

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots,$$

que nous utiliserons au début du développement de la théorie des fonctions holomorphes dans le Chapitre 2, à savoir dans la démonstration du Théorème dit de Goursat.

Proposition 4.12. *Étant donné une suite d'ensembles emboîtés* compacts *non vides dans* $\mathbb{C}$:

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots,$$

dont le diamètre tend vers zéro :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \operatorname{diam} K_n,$$

il existe un unique point $z \in \mathbb{C}$ qui appartient à tous les K_n, ou, de manière équivalente, l'intersection complète de tous les K_n se réduit à un seul point :

$$\{z\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Démonstration. Bien qu'intuitivement immédiat et connu par ailleurs, cet énoncé mérite quelques explications. Pour tout n, prenons un point au hasard $z_n \in K_n$. Alors la condition de rétrécissement des diamètres assure (exercice de vérification) que toute telle suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{C}$ est complet, elle admet un point-limite :

$$z = \lim_{n \to \infty} z_n,$$

lequel point z appartient par construction à tous les K_n. Puisqu'une intersection quelconque de fermés reste fermée, $\cap_{n=1}^{\infty} K_n$ est fermé, et (exercice de vérification) :

$$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Maintenant, nous affirmons que le point z ainsi trouvé est forcément l'unique point satisfaisant cette propriété. En effet, si pour un autre point $z' \neq z$, on avait aussi :

$$z' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n,$$

alors on déduirait :

$$\begin{aligned} 0 &< |z' - z| \\ &\leqslant \operatorname{diam} K_n \qquad \text{[remarquer que } z \in K_n \text{ et que } z' \in K_n], \end{aligned}$$

ce qui contredirait l'hypothèse principale. □

Définition 4.13. Étant donné un sous-ensemble $E \subset \Omega$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est dit *point d'accumulation* de E lorsqu'il existe une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'éléments $z_n \in E$ *distincts deux à deux* qui converge vers z_0.

On démontre aisément (exercice mental) que tout point d'accumulation de E appartient à l'adhérence $\overline{E}$ de E dans $\mathbb{C}$. Toutefois, l'exemple :

$$E := \big\{|z| \leqslant 1\big\} \bigcup \{2\}$$

montre qu'un point — ici 2 — peut être un point adhérent sans être un point d'accumulation.

Définition 4.14. Un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{C}$ hérite une *topologie induite* par celle de $\mathbb{C}$ dont les ouverts sont de la forme :

$$\big\{E \cap \Omega \colon \ \Omega \subset \mathbb{C} \text{ ouvert}\big\},$$

et dont les fermés sont de la forme :

$$\big\{E \cap \big(\mathbb{C} \backslash \Omega\big) \colon \ \Omega \subset \mathbb{C} \text{ ouvert}\big\}.$$

Définition 4.15. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, étant donné un sous-ensemble quelconque $E \subset \Omega$, la *fermeture* pour la topologie induite est :

$$\overline{E}^{\Omega} := \overline{E}^{\mathbb{C}} \cap \Omega.$$

Dans l'Exercice 13, on démontre que tout point adhérent à un ouvert est aussi point d'accumulation.

Définition 4.16. Un sous-ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *connexe* lorsqu'il n'est jamais possible de le décomposer en deux sous-ensembles *ouverts, disjoints et non vides :*

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

De manière similaire, un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{C}$ est dit *connexe* lorsqu'il n'est jamais possible de le décomposer en deux sous-ensembles *fermés, disjoints et non vides :*

$$F = F_1 \cup F_2.$$

Terminologie 4.17. Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui est à la fois ouvert et connexe sera constamment appelé un *domaine*.

Définition 4.18. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est *connexe par arcs* lorsque deux points quelconque $z_1, z_2 \in E$ sont toujours connectés par une courbe continue, à savoir, il existe une application continue :

$$\gamma \colon \quad [0,1] \longrightarrow E$$

telle que :

$$\gamma(0) = z_1 \qquad \text{et} \qquad \gamma(1) = z_2.$$

Dans l'Exercice 14, on démontre la :

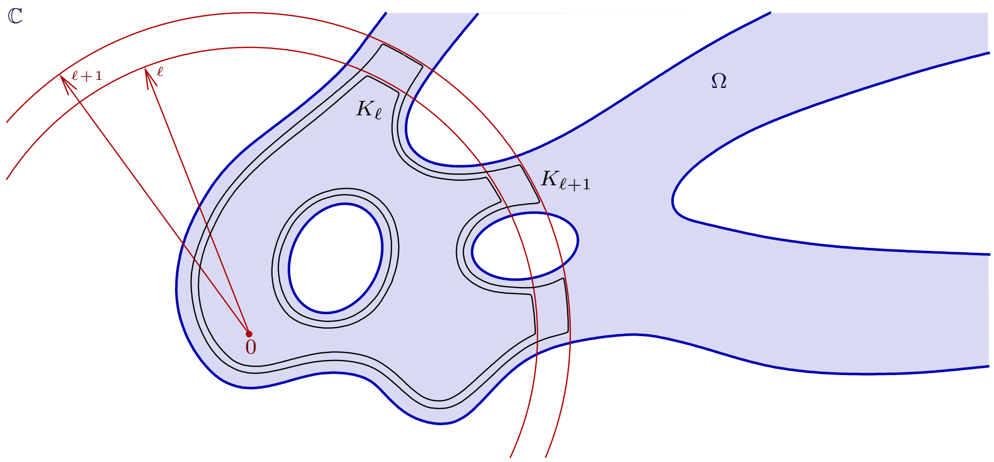
Proposition 4.19. *Un sous-ensemble* ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ *est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.*

5. Exhaustion d'ouverts de $\mathbb{C}$ par des compacts

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert arbitraire, non supposé connexe ou borné. Dans ce paragraphe, qui peut être ignoré en première lecture, nous construisons des « *approximations* » de Ω par des sous-ensembles emboîtés de plus en plus gros. Elles seront utiles dans certaines circonstances nécessitant de la finitude.

Rappelons que la *distance* entre deux sous-ensembles $E, F \subset \mathbb{C}$ est le nombre appartenant à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$\mathsf{dist}\,\big(E, F\big) \;:=\; \inf_{z\in E,\, w\in F}\,\big|z-w\big|.$$



Théorème 5.1. *Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, la famille, paramétrée par un entier $\ell \geqslant 1$, de sous-ensembles :*

$$K_\ell \;:=\; \big\{z\in\Omega\colon\; |z|\leqslant \ell \text{ et } \mathsf{dist}\,\big(z, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \geqslant \tfrac{1}{\ell}\big\}$$

satisfait, quel que soit $\ell \geqslant 1$:

(1) *K_ℓ est compact, c'est-à-dire fermé et borné ;*

(2) *$K_\ell \subset K_{\ell+1}$;*

(3)

$$\Omega \;=\; \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_\ell\,;$$

(4) *L'intérieur de K_ℓ est :*

$$\mathsf{Int}\,K_\ell \;=\; \big\{z\in\Omega\colon\; |z|<\ell \text{ et } \mathsf{dist}\,\big(z, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) > \tfrac{1}{\ell}\big\}\,;$$

(5) *$K_\ell \subset \mathsf{Int}\,K_{\ell+1}$.*

Notons que les premiers K_ℓ pour $\ell = 1, 2, \dots$ petit peuvent être vides.

Démonstration. **(1)** Fixons $\ell \geqslant 1$. La compacité de K_ℓ est une propriété intrinsèque. D'après une caractérisation connue, il s'agit de faire voir que K_ℓ, envisagé comme sous-ensemble de $\mathbb{C}$, est borné et fermé.

Comme $K_\ell \subset \overline{\mathbb{D}}_\ell(0)$, il est borné.

Soit maintenant $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite quelconque de points $z_n \in K_\ell$ qui est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc converge vers un certain point $z_\infty \in \mathbb{C}$. Ainsi, $|z_n| \leqslant \ell$, puis par continuité de la norme $|z_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |z_\infty|$, donc $|z_\infty| \leqslant \ell$ aussi.

Ensuite, pour un point $w \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ quelconque, avec $\varepsilon > 0$ petit, estimons $|z_\infty - w|$ en intercalant un z_n satisfaisant :

$$\big|z_\infty - z_n\big| \leqslant \varepsilon \ll \tfrac{1}{\ell},$$

grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\big|z_\infty - w\big| = \big|z_\infty - z_n + z_n - w\big| &\geqslant -\big|z_\infty - z_n\big| + \big|z_n - w\big| \\
&\geqslant -\varepsilon + \mathsf{dist}\,\big(z_n, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \\
{\scriptstyle [z_n \in K_\ell]} \qquad &\geqslant -\varepsilon + \tfrac{1}{\ell},
\end{aligned}$$

et comme on peut rendre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il vient :

$$\big|z_\infty - w\big| \geqslant \tfrac{1}{\ell},$$

d'où puisque $w \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ était quelconque :

$$\mathsf{dist}\,\big(z_\infty,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \geqslant \tfrac{1}{\ell},$$

ce qui donne $z_\infty \in K_\ell$, et finit de montrer que K_ℓ est fermé.

(2) Si $z \in K_\ell$, à savoir si $|z| \leqslant \ell$ et $\mathsf{dist}\,(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) \geqslant \frac{1}{\ell}$, puisque $\ell < \ell + 1$ et $\frac{1}{\ell} > \frac{1}{\ell+1}$, il est évidemment trivial que $|z| \leqslant \ell + 1$ et que $\mathsf{dist}\,(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) \geqslant \frac{1}{\ell+1}$, donc $z \in K_{\ell+1}$.

(3) L'inclusion $\bigcup_{\ell \geqslant 1} K_\ell \subset \Omega$ est triviale.

Inversement, soit $z \in \Omega$ quelconque. Tout d'abord, nous affirmons que $\mathsf{dist}\,(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) > 0$. Sinon, il existerait une suite $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $w_n \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ avec :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \big|z - w_n\big|,$$

ce qui voudrait dire $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$, et comme $\mathbb{C}\backslash\Omega$ est fermé, ceci impliquerait $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$, contradiction.

Alors dès qu'un entier $\ell \geqslant 1$ est choisi assez grand pour qu'on ait simultanémenent :

$$\ell \geqslant |z| \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \tfrac{1}{\ell} \leqslant \mathsf{dist}\,\big(z,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big),$$

on obtient $z \in K_\ell$, ce qui établit l'inclusion inverse $\Omega \subset \bigcup_{\ell \geqslant 1} K_\ell$.

(4) Notons :

$$\omega_\ell := \big\{z \in \Omega \colon\ |z| < \ell \text{ et } \mathsf{dist}\,\big(z, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) > \tfrac{1}{\ell}\big\}.$$

On peut se convaincre que ω_ℓ est ouvert, mais cela n'est pas nécessaire, car cela viendra dans un instant.

Assertion 5.2. $\omega_\ell \subset \mathsf{Int}\, K_\ell$.

Preuve. Si $|z| < \ell$ et $\mathsf{dist}\,(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) > \frac{1}{\ell}$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ assez petit tel que :

$$\varepsilon + |z| < \ell \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \mathsf{dist}\,\big(z,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) - \varepsilon > \tfrac{1}{\ell}.$$

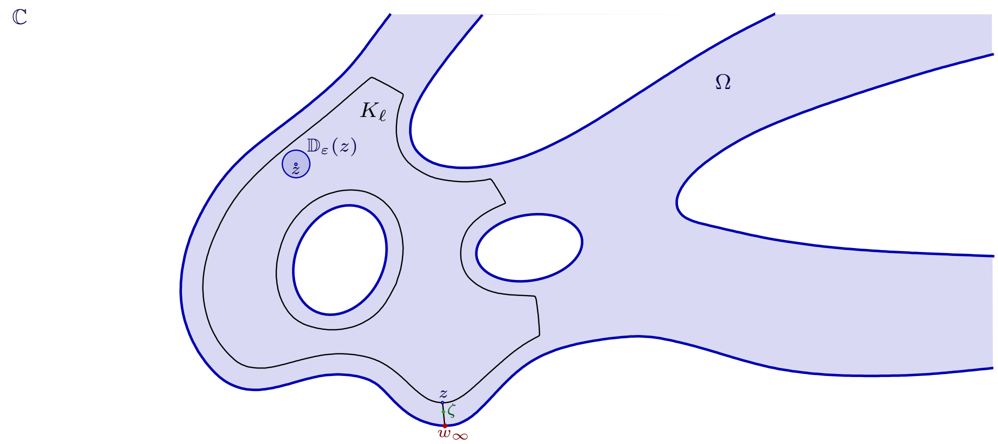
Alors chaque point ζ du disque ouvert $\mathbb{D}_\varepsilon = \big\{\zeta \in \mathbb{C} \colon |\zeta - z| < \varepsilon\big\}$ satisfait :

$$|\zeta| \leqslant |\zeta - z| + |z| \leqslant \varepsilon + |z| \leqslant \ell,$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}
\mathsf{dist}\,\big(\zeta,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) &\geqslant \mathsf{dist}\,\big(z,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) - |z - \zeta| \\
&\geqslant \mathsf{dist}\,\big(z,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) - \varepsilon \\
&\geqslant \tfrac{1}{\ell},
\end{aligned}$$

ce qui veut dire que $\mathbb{D}_\varepsilon(z) \subset K_\ell$, donc $z \in \mathsf{Int}\, K_\ell$. □



Assertion 5.3. $\mathsf{Int}\, K_\ell \subset \omega_\ell$.

Preuve. Soit donc $z \in \mathsf{Int}\, K_\ell$. Il s'agit de faire voir deux inégalités :

$$|z| \overset{?}{<} \ell \qquad \text{et} \qquad \mathsf{dist}\,\big(z,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \overset{?}{>} \tfrac{1}{\ell}.$$

Il existe $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $\mathbb{D}_\varepsilon(z) \subset K_\ell$, c'est-à-dire :

$$\big|\zeta - z\big| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |\zeta| \leqslant \ell, \\ \mathsf{dist}\,\big(\zeta,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) \geqslant \tfrac{1}{\ell}. \end{cases} \tag{5.4}$$

Traitons la première inégalité en question. Si $z = 0$, puisque $\ell \geqslant 1$, on a trivialement $|0| < 1$. Si $z \neq 0$, avec $\delta > 0$ assez petit pour que $|\delta\, z| < \varepsilon$, et avec $\zeta := z + \delta\, z$, il vient :

$$\big|z + \delta\, z\big| = (1 + \delta)\,|z| \leqslant \ell \quad \Longrightarrow \quad |z| \leqslant \tfrac{\ell}{1+\delta} < \ell.$$

Traitons ensuite la deuxième inégalité. Comme $z \in K_\ell$, on sait que $\mathsf{dist}\,(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) \geqslant \frac{1}{\ell}$. Supposons par l'absurde que $\mathsf{dist}\,(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) = \frac{1}{\ell}$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $w_n \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ avec :

$$\big|z - w_n\big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tfrac{1}{\ell}.$$

Alors cette suite est bornée, donc après extraction d'une sous-suite, sans changer de notation, on peut supposer sa convergence :

$$w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w_\infty \in \mathbb{C}\backslash\Omega,$$

vers un point qui appartient encore au fermé $\mathbb{C}\backslash\Omega$. Par conséquent :

$$\big|z - w_\infty\big| = \tfrac{1}{\ell}.$$

Mais sur le segment $]z, w_\infty]$, il existe des points ζ proches et distincts de z avec $|\zeta - z| < \varepsilon$, d'où :

$$\big|\zeta - w_\infty\big| = \tfrac{1}{\ell} - \big|z - \zeta\big|,$$

donc :

$$\mathsf{dist}\,\big(\zeta,\, \mathbb{C}\backslash\Omega\big) < \tfrac{1}{\ell},$$

en contradiction avec (5.4). □

(5) Grâce à la représentation de $\mathsf{Int}\, K_\ell = \omega_\ell$ qui précède, et qui montre d'ailleurs que ω_ℓ est *ouvert*, il devient clair en raisonnant comme pour **(2)** que $K_\ell \subset \mathsf{Int}\, K_{\ell+1}$. □

6. Fonctions holomorphes dans le plan complexe $\mathbb{C}$

Prenant pour acquis qu'on sait parfaitement bien ce qu'est une fonction $f = f(x)$ d'une variable réelle x, la question naïve originaire dont est issue la théorie des fonctions holomorphes s'exprime comme suit :

Qu'est-ce que pourrait être une fonction de la variable complexe $z \in \mathbb{C}$?

Tout d'abord, si l'on voit $z = x + iy$ comme le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ du plan, on peut commencer par une :

Définition 6.1. Soit $f \colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}$, et soit $z_0 = x_0 + i\, y_0 \in E$. On dit que f est *continue en* z_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$\Big(z \in E \quad \text{et} \quad \big|(x, y) - (x_0, y_0)\big| \leqslant \delta\Big) \implies \Big(\big|f(x, y) - f(x_0, y_0)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

De manière équivalente (exercice), f est continue en z_0 si pour toute suite

$$\big\{z_n\big\}_{n=1}^{\infty} = \big\{x_n + i\, y_n\big\}_{n=1}^{\infty}$$

de points $z_n \in E$ telle que $z_n \longrightarrow z_0$ quand $n \longrightarrow \infty$, on a aussi :

$$f(x_0, y_0) = \lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n).$$

Définition 6.2. Une fonction $f \colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *continue sur* E lorsqu'elle est continue en *tout* point $z_0 \in E$.

On vérifie (exercice de révision) que les sommes et les produits de fonctions continues sont toujours encore continues.

Puisque les notions de convergence dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}^2$ coïncident, observons que nous avons compris — et c'est important — qu'une fonction :

$$f = f(x, y)$$

est continue si elle l'est en tant que fonction de ses *deux* arguments réels $(x, y) \in E \subset \mathbb{R}^2$. D'une certaine manière, donc, dans l'écriture et dans la définition d'une fonction continue :

$$f = f(z) = f(x + i\, y),$$

il faut bien avoir à l'esprit que la fonction f ne dépend pas « de z », mais bien des *deux* variables réelles (x, y).

Qui plus est, comme la fonction f est supposée être aussi à valeurs dans $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, elle possède en fait tout aussi bien une partie réelle et une partie imaginaire :

$$f = u + i\, v,$$

de telle sorte que la fonction doit être plus rigoureusement représentée par :

$$\begin{aligned} f \colon \quad \mathbb{R}^2 \supset E &\longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \big(u(x, y),\, v(x, y)\big). \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité du triangle, on vérifie immédiatement que si f est continue, alors la fonction :

$$(x, y) \longmapsto \big|f(x, y)\big|$$

est elle aussi continue, puisque en effet il s'agit de :

$$(x, y) \longmapsto \sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}.$$

Définition 6.3. On dit qu'une fonction :

$$f\colon \quad E \longrightarrow \mathbb{C}$$

atteint un maximum en un point $(x_+, y_+) \in E$ si :

$$|f(x,y)| \leqslant |f(x_+, y_+)|,$$

pour tout $(x,y) \in E$. De même, elle *atteint un minimum* en un point $(x_-, y_-) \in E$ si :

$$|f(x,y)| \geqslant |f(x_-, y_-)|,$$

pour tout $(x,y) \in E$.

Un cas particulier d'un théorème connu de topologie générale valable par exemple dans les espaces métriques est le :

Théorème 6.4. *Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{C}$ est toujours bornée et elle atteint toujours un maximum sur K, ainsi qu'un minimum sur K.* □

Maintenant, puisque la notion de fonction continue de (x,y) ne répond visiblement pas à la question : « *qu'est-ce qu'une fonction* de *z ?* », présentons enfin la définition absolument fondamentale dont part toute la théorie, définition qui formule, en analogie complète avec la notion de dérivabilité sur $\mathbb{R}$, un concept (nouveau) de fonction *dérivable par rapport à* z.

À partir de maintenant, on s'autorisera à écrire :

$$f(z) = f(x + i\,y) = f(x,y),$$

pour représenter une fonction des deux variables réelles (x,y), de différentiabilités variées $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$, ..., $\mathscr{C}^\infty$.

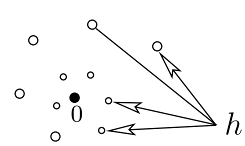
Définition 6.5. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble ouvert, soit :

$$f\colon \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

une fonction continue et soit un point $z_0 \in \Omega$. On dit que f est $\boxed{\textit{holomorphe}}$ en z_0 si le quotient :

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

converge vers une limite lorsque le nombre *complexe* $h \in \mathbb{C}^*$ est non nul et tend vers 0.



Ici, la subtilité encore invisible — à suivre... suspense ! —, c'est que $h \in \mathbb{C}$ varie dans un ensemble 2-dimensionnel de type disque (épointé) autour de 0. Bien entendu, on a $z_0 + h \in \Omega$ pour h assez petit puisque Ω est ouvert.

Lorsqu'elle existe, la limite de ces quotients est alors notée :

$$f'(z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Exemple 6.6. Bien que continue, la fonction $f(z) = \overline{z}$, ou plus précisément, la fonction :

$$(x, y) \longmapsto x - i\,y$$

n'est *pas* holomorphe, puisque en effet si on représente $h = \varepsilon\, e^{i\theta}$ avec $\varepsilon > 0$ petit :

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} &= \frac{\overline{z}_0 + \overline{h} - \overline{z}_0}{h} \\ &= \frac{\overline{h}}{h} \\ &= \frac{\varepsilon\, e^{-i\,\theta}}{\varepsilon\, e^{i\,\theta}} \\ &= e^{-2i\,\theta},\end{aligned}$$

et il est manifeste que les nombres complexes $e^{-2i\,\theta}$, tous de module 1, n'ont pas de limite lorsque h, à savoir lorsque $\varepsilon = |h|$, tend vers 0 !

Ce (contre-) exemple montre à merveille, donc, que la condition $h \longrightarrow 0$ est de nature 2-*dimensionnelle :* le module de h tend vers 0, mais h peut aussi tourner, spiraler, vriller autour de 0.

Exemple 6.7. La fonction 'identité' $f(z) = z$ est quant à elle holomorphe :

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{z_0 + h - z_0}{h} = \frac{h}{h} = 1,$$

de dérivée identiquement égale à 1, heureusement !

Définition 6.8. Une fonction continue $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* dans Ω lorsqu'elle est holomorphe en *tout* point $z_0 \in \Omega$.

Notation 6.9. L'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω sera noté :

$$\mathscr{O}(\Omega).$$

Ainsi, la définition de fonction holomorphe imite celle de fonction réelle dérivable, en remplaçant simplement la variable réelle x par la variable complexe $z = x + i\,y$. Il y a donc là une ressemblance initiale qui semblerait faire croire que les deux théories sont très proches l'une de l'autre, mais tel n'est absolument pas le cas ! En fait, les fonctions holomorphes vont satisfaire des propriétés beaucoup plus harmonieuses que les fonctions dérivables, quasiment 'féériques',

Par exemple, on va démontrer que les fonctions holomorphes sont en fait *indéfiniment dérivables :* une seule dérivée entraîne l'existence de *toutes* les autres dérivées d'ordre 2, 3, 4, 5, *etc.* ! Mais la magie de l'holomorphie ne s'arrête pas là. On démontrera même — au début de la théorie, et avec des arguments simples ! — que *toute fonction holomorphe est en fait* analytique*, c'est-à-dire développable sous forme d'une série entière :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n\,!}\,\big(z - z_0\big)^n,$$

qui converge — par exemple grâce au critère de Cauchy — pour tout $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$ appartenant à un disque ouvert non vide assez petit $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega$.

Une telle propriété de développement en série de Taylor convergente contraste alors de manière spectaculaire avec les fonctions réelles $f = f(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$, puisqu'il existe bien sûr de telles fonctions qui n'admettent pas de dérivée continue d'ordre 2 — penser à une primitive de $x \longmapsto |x|$. On démontre aussi qu'il existe des fonctions réelles $f = f(x)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui ne sont développables en série entière convergente autour d'aucun point x_0 : l'Exercice 45 traite le cas d'un seul tel mauvais point x_0.

Exemple 6.10. Tout polynôme :

$$p(z) = a_0 + a_1\, z + \cdots + a_n\, z^n \qquad\qquad {\scriptstyle (a_k \in \mathbb{C})}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. En effet, il suffit par linéarité d'examiner si pour $k \in \mathbb{N}$ la fonction :

$$z \longmapsto z^k$$

admet des dérivées en des $z_0 \in \mathbb{C}$ quelconques, mais la formule du binôme de Newton fait voir que le numérateur est multiple de h :

$$\begin{aligned}
\frac{(z_0+h)^k - z_0^k}{h} &= \frac{\underline{(z_0)^k} + \frac{k}{1}\,(z_0)^{k-1}\,h + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\,(z_0)^{k-2}\,h^2 + \cdots + h^k - \underline{(z_0)^k}}{h} \\
&= \frac{k\,(z_0)^{k-1}\,\underline{h} + \mathrm{O}(h^2)}{\underline{h}} \\
&= k\,(z_0)^{k-1} + \mathrm{O}(h),
\end{aligned}$$

ce qui donne comme valeur de la dérivée :

$$k\,(z_0)^{k-1}.$$

Une autre famille importante d'exemples de fonctions holomorphes est constituée des séries entières convergentes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\big(z - z_0\big)^n.$$

Cette famille contient les fonctions trigonométriques classiques dans lesquelles on a remplacé la variable réelle x par z :

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n, \\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{1}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}, \\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{1}{(2n)!}\, z^{2n},
\end{aligned}$$

fonctions qui jouent un rôle crucial dans la théorie.

En revenant maintenant à la définition fondamentale, il est clair qu'une fonction f est holomorphe en un point $z_0 \in \Omega$ si et seulement si il existe un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ tel que :

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - a\,h = h\,\mathrm{o}(h),$$

où $\mathrm{o}(h)$ est une fonction-reste satisfaisant :

$$0 = \lim_{h \to 0} \mathrm{o}(h).$$

Bien entendu, on a ici :

$$a = f'(z_0).$$

Par là, il suit que toute fonction holomorphe en un point z_0 est continue en ce point.

On laisse au lecteur le soin de mettre au point une démonstration de l'énoncé élémentaire suivant, tout à fait analogue à celui qui lui correspond dans la théorie des fonctions réelles.

Proposition 6.11. *Si $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ et $g \in \mathscr{O}(\Omega)$ sont deux fonctions holomorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors :*

(i) *leur somme $f + g$ est aussi holomorphe dans Ω avec :*

$$(f+g)' = f' + g';$$

(ii) *leur produit $f\,g$ est holomorphe dans Ω avec :*

$$\big(f\,g\big)' = f'\,g + f\,g';$$

(iii) *lorsque $g(z_0) \neq 0$, le quotient f/g est holomorphe en z_0 avec :*

$$\bigg(\frac{f}{g}\bigg)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2};$$

(iv) *lorsque, de plus, ces deux fonctions peuvent être composées, à savoir lorsque :*

$$\Omega \xrightarrow{\ f\ } \Omega_1 \xrightarrow{\ g\ } \mathbb{C},$$

la composition $g \circ f$ est holomorphe en tout point $z \in \Omega$ avec :

$$\big(g \circ f\big)'(z) = g'\big(f(z)\big)\,f'(z). \qquad \square$$

Par exemple, la fonction :

$$\mathbb{C}^* \ni z \longmapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}^*$$

est holomorphe.

7. Fonctions holomorphes comme applications $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Il est grand temps de mieux approfondir les relations entre la dérivée complexe dont jouissent les fonctions holomorphes, et leurs dérivées partielles au sens réel comme applications de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. En fait, on a déjà mis en exergue (pour anticipation théorique alléchante...) le fait que la notion de différentiabilité au sens complexe diffère de manière très significative de la notion de différentiabilité au sens réel. L'exemple de la fonction simple :

$$z \longmapsto \overline{z},$$

à savoir de l'application :

$$(x,y) \longmapsto \big(x,\,-y\big)$$

fait voir tout le paradoxe, puisqu'elle est visiblement affine, donc $\mathscr{C}^1$, donc $\mathscr{C}^\infty$, mais pas holomorphe ! Ce (contre-) exemple montre alors que l'existence de dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y ne garantit pas que f soit holomorphe, et en fait, nous allons voir dans un instant que les fonctions holomorphes ont des relations très spéciales entre leurs dérivées partielles.

Définition 7.1. Rappelons pour commencer qu'une fonction (application) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$F(x,y) = \big(u(x,y),\, v(x,y)\big)$$

est dite *différentiable* en un point $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ lorsqu'il existe une application linéaire :

$$J\colon \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

telle que :

$$0 = \lim_{\substack{H \to 0 \\ H \in \mathbb{R}^2}} \left(\frac{\big|F(P_0+H) - F(P_0) - J(H)\big|}{|H|} \right),$$

la notation $|\cdot|$ désignant la norme euclidienne standard dans $\mathbb{R}^2$.

De manière équivalente, on peut écrire :

$$F(P_0+H) - F(P_0) = J(H) + |H|\,\mathrm{o}(H),$$

où $\mathrm{o}(H)$ est une fonction-reste qui tend vers zéro (en norme) lorsque $H \longrightarrow 0$.

L'application linéaire J est alors unique (exercice de révision), et elle est appelée la *différentielle* de F au point P_0.

On se rappelle alors que l'on démontre en cours de calcul différentiel que les deux dérivées partielles des deux composantes $(u,v) = F$ par rapport aux variables x, y existent au point (x_0, y_0), et que la transformation linéaire J est décrite dans la base standard de $\mathbb{R}^2$ par la *matrice jacobienne* de F :

$$J = \mathsf{Jac}_F(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (x_0, y_0).$$

Ainsi la différence est-elle de taille : dans le cas d'une fonction holomorphe, la dérivée est un nombre complexe $f'(z_0)$, tandis que dans le cas d'une application différentiable $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, la différentielle est une matrice 2×2.

Toutefois, il y a un lien fort entre ces deux notions, lequel consiste en des relations spéciales qui sont satisfaites par la matrice jacobienne associée à une fonction holomorphe $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ lorsqu'on la voit comme application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Afin de trouver ces relations, posons :

$$h := h_1 + i\,h_2,$$

et dans le quotient $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ qu'on doit examiner pour tester l'holomorphie, posons aussi :

$$\begin{aligned} f &:= f(x,y), \\ z_0 &:= x_0 + i\,y_0, \end{aligned}$$

et observons sans effort qu'en prenant $h := h_1$ (avec $h_2 = 0$), si la fonction est holomorphe en z_0, alors nécessairement :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_0+h_1,\, y_0) - f(x_0,y_0)}{h_1} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) && \text{[par définition !].} \end{aligned}$$

Mais puisqu'il n'y a aucune raison de prendre h réel dans la limite, prenons aussi $h = i\,h_2$ (avec $h_1 = 0$), ce qui donne :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x_0,\, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{i\,h_2} \\ &= \frac{1}{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) && \text{[à nouveau par définition !].} \end{aligned}$$

Ces deux expressions étant égales, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\,i\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Maintenant, en décomposant $f = u + iv$ en parties réelle et imaginaire, cette dernière équation dit précisément que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = -\,i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

puis en identifiant les parties réelle et imaginaire, nous obtenons un résultat fondamental.

Théorème 7.2. *Sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, pour une fonction $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est holomorphe ;*

(ii) *les parties réelle u et imaginaire v de :*

$$f(x, y) = u(x, y) + i\,v(x, y)$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ et satisfont les équations dites de Cauchy-Riemann *:*

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\,\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}}$$

Démonstration. Le sens direct venant d'être vu, supposons réciproquement que ces deux équations aux dérivées partielles sont effectivement satisfaites par u et v.

En un point quelconque $(x, y) \in \Omega$, pour $h = h_1 + i\,h_2$ petit, écrivons à cette fin :

$$\begin{aligned} u\big(x + h_1,\, y + h_2\big) - u(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x}\,h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\,h_2 + \mathrm{o}(h), \\ v\big(x + h_1,\, y + h_2\big) - v(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x}\,h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}\,h_2 + \mathrm{o}(h), \end{aligned}$$

où $\mathrm{o}(h)$ est une fonction-reste qui satisfait $0 = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{o}(h)}{h}$. Grâce aux équations de Cauchy-Riemann, on peut alors transformer :

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= u(z+h) - u(z) + i\,\big[v(z+h) - v(z)\big] \\ &= u\big(x+h_1,\,y+h_2\big) - u(x,y) + i\,\Big[v\big(x+h_1,\,y+h_2\big) - v(x,y)\Big] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\,h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\,h_2 + i\,\bigg[\frac{\partial v}{\partial x}\,h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}\,h_2\bigg] + \mathrm{o}(h) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\,h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\,h_2 + i\,\bigg[-\,\frac{\partial u}{\partial y}\,h_1 + \frac{\partial u}{\partial x}\,h_2\bigg] + \mathrm{o}(h) \\ &= \bigg(\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}\bigg)\big[h_1 + i\,h_2\big] + \mathrm{o}(h), \end{aligned}$$

et cette dernière expression montre que f est holomorphe au point $z = x + i\,y$ avec une dérivée complexe égale à ce qu'il faut :

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\big(\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}\big)\big[h_1 + i\,h_2\big] + \mathrm{o}(h)}{h_1 + i\,h_2} \right\} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \qquad\qquad \text{[La limite existe donc bel et bien !]} \\ &=: f'(z). \end{aligned}$$

□

Une application supplémentaire des équations de Cauchy-Riemann fournit aussi de manière analogue :

$$\begin{aligned} i\,\bigg[\frac{\partial v}{\partial x} - i\,\frac{\partial v}{\partial y}\bigg] &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \\ &= f'(z), \end{aligned}$$

d'où en prenant la demi-somme de ces deux expressions égales :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\bigg[\frac{\partial v}{\partial x} - i\,\frac{\partial v}{\partial y}\bigg]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\bigg)\big[u + i\,v\big]. \end{aligned}$$

C'est précisément dans un tel calcul naturel qu'on voit donc apparaître un opérateur de différentiation qui est central dans toute la théorie.

Définition 7.3. L'opérateur de différentiation par rapport à z est défini formellement par :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\bigg),}$$

et l'opérateur *conjugué* de différentiation par rapport à la variable complexe conjuguée $\overline{z}$ est défini par :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\bigg).}$$

Ainsi avec ces notations, le résultat qui précède s'interprète en disant que pour une fonction holomorphe en un point z_0, la quantité $f'(z_0)$ n'est autre que la dérivée de f par rapport à z au point z_0 :

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).}$$

Théorème 7.4. *Sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ est holomorphe si et seulement si sa dérivée par rapport à $\overline{z}$ est identiquement nulle :*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \equiv 0.}$$

Démonstration. En effet, si l'on passe aux parties réelle et imaginaire, l'équation :

$$0 \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\big[u + i\,v\big]$$

équivaut (exercice visuel) aux équations de Cauchy-Riemann. □

Au passage, nous avons constaté que la dérivée $f'(z)$ d'une fonction holomorphe dans Ω s'exprime comme :

$$f'(z) \;=\; \frac{\partial u}{\partial z} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} \;=\; 2\,\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{7.5}$$

Ainsi, les fonctions holomorphes sont-elles celles qui ne dépendent pas de $\overline{z}$. Plus rigoureusement, toute fonction des deux variables (x, y) :

$$\begin{aligned} f &= f(x,y) \\ &= f\left(\frac{z+\overline{z}}{2},\, \frac{z-\overline{z}}{2\,i}\right) \end{aligned}$$

peut naturellement être aussi vue comme une fonction des deux variables :

$$\big(z,\, \overline{z}\big).$$

$$\boxed{\text{Fonctions holomorphes} = \text{Fonctions indépendantes de } \overline{z}.}$$

Proposition 7.6. *Toujours pour une fonction holomorphe quelconque :*

$$f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C},$$

si on note de manière abrégée l'application sous-jacente $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

$$F(x,y) := \big(u(x,y),\, v(x,y)\big),$$

ayant pour matrice jacobienne :

$$\mathsf{Jac}_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

alors le déterminant jacobien de F vaut en tout point $z \in \Omega$:

$$\mathsf{det}\,\mathsf{Jac}_F(x,y) = \big|f'(z)\big|^2.$$

Démonstration. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, on obtient que l'action de la matrice jacobienne sur un (petit) vecteur :

$$H := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

vaut :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Jac}_F(H) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\, h_2,\ \frac{\partial v}{\partial x}\, h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}\, h_2 \right) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \big[h_1 + i\, h_2 \big] \\
&= f'(z)\, h.
\end{aligned}$$

Une deuxième et dernière application des équations de Cauchy-Riemann permet de calculer :

$$\begin{aligned}
\det \mathsf{Jac}_F &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\, \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\, \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\
\left[2\tfrac{\partial}{\partial z} = \tfrac{\partial}{\partial x} - i\tfrac{\partial}{\partial y}\right] \qquad &= \left| 2\, \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \\
[(7.5)] \qquad &= \big| f'(z) \big|^2. \qquad \square
\end{aligned}$$

Quand nous écrivons $f(z)$ pour une fonction définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, l'écriture n'est réellement rigoureuse que lorsque f est holomorphe, auquel cas f est bien une fonction de z, et en général, pour une fonction qui n'est que de classe $\mathscr{C}^1$ dans Ω, la rigueur notationnelle exigerait d'écrire $f(x, y)$. Toutefois, nous admettrons parfois l'écriture abusive $f(z)$ dans le cas où f n'est pas holomorphe.

Proposition 7.7. *Étant donné une application $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow \Omega$ de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un segment réel avec $-\infty < a < b < \infty$, décomposée en $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\, \gamma_2(t)$, à valeurs dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, pour toute fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$, la composée :*

$$f\big(\gamma(t)\big) \;=\; f\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$$

a pour dérivée :

$$\frac{d}{dt}\, \big[f\big(\gamma(t)\big) \big] \;=\; \frac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big(\gamma(t)\big)\, \overline{\gamma'(t)}.$$

En particulier, quand f est holomorphe :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\, \big[f\big(\gamma(t)\big) \big] \;=\; f'\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t).}$$

Preuve. En effet, en remplaçant bêtement $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ ainsi que $\frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$, nous obtenons bien :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big[f\big(\gamma(t)\big)\big] &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\,\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\,\gamma_2'(t) \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma(t)\big) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big(\gamma(t)\big)\right]\gamma_1'(t) + i\left[\frac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma(t)\big) - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big(\gamma(t)\big)\right]\gamma_2'(t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}\big(\gamma(t)\big)\,\big[\gamma_1'(t) + i\,\gamma_2'(t)\big] + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\big(\gamma(t)\big)\,\big[\gamma_1'(t) - i\,\gamma_2'(t)\big]. \qquad \square
\end{aligned}$$

8. Géométrie infinitésimale de l'holomorphie

Localement, dans un voisinage infinitésimal d'un point de référence, toute application différentiable est bien approximée par son application tangente, c'est-à-dire par son développement de Taylor à l'ordre 1. Pour des applications $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$, on a alors affaire à des applications linéaires $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ni (x', y')$ de la forme :

$$\begin{aligned}
x' &= \boldsymbol{a}\,x + \boldsymbol{b}\,y, \\
y' &= \boldsymbol{c}\,x + \boldsymbol{d}\,y,
\end{aligned}$$

avec 4 constantes réelles arbitraires $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}$.

Or de telles applications sont très différentes des applications $\mathbb{C}$-linéaires $z \in \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \ni z'$, qui sont de la forme :

$$z' = \alpha\,z,$$

avec 1 constante complexe arbitraire $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, puisqu'en écriture réelle :

$$x' + i\,y' = (a + ib)\,(x + iy) = ax - by + i\,(bx + ay),$$

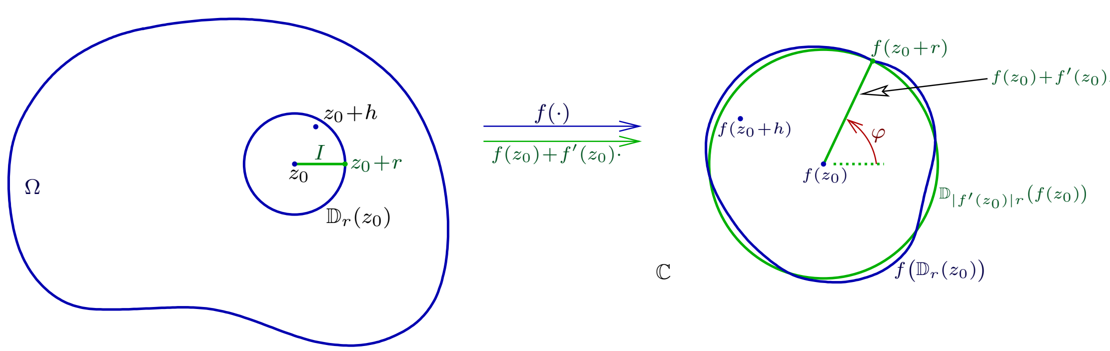
cela revient à avoir une matrice 2×2 spéciale incorporant seulement 2 constantes réelles arbitraires :

$$\begin{aligned}
x' &= a\,x - b\,y, \\
y' &= b\,x + a\,y.
\end{aligned}$$

Rappelons qu'en coordonnées polaires, avec $\alpha = s\,e^{i\varphi}$, $s \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in \mathbb{R}$, et en représentant $z = r\,e^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}$, la multiplication complexe :

$$z' = s\,e^{i\varphi}\,r\,e^{i\theta} = s\,r\,e^{i(\varphi+\theta)}$$

fait voir que la transformation géométrique consiste en une homothétie de rapport positif $s = |\alpha|$ suivie d'une rotation d'angle $\varphi = \arg \alpha$, ces deux transformations étant d'ailleurs commutatives. De telles transformations avec $\alpha \neq 0$ sont appelées *similitudes directes* puisqu'elles préservent l'orientation.



Si donc nous reformulons la $\mathbb{C}$-dérivabilité en un point $z_0 \in \Omega$ d'une fonction $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ comme :

$$f(z_0 + h) \,=\, f(z_0) + f'(z_0)\, h + \mathrm{o}(h),$$

où $\mathrm{o}(h)$ désigne une fonction-reste à valeurs dans $\mathbb{C}$ satisfaisant $0 = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{o}(h)}{h}$, alors nous devons nous imaginer que pour $r > 0$ assez petit et pour tout $|h| < r$, la fonction f est bien approximée par son développement à l'ordre 1 :

$$f(z_0 + h) \,\approx\, f(z_0) + f'(z_0)\, h,$$

lequel est une fonction complexe-affine de h ayant pour partie linéaire la simple similitude :

$$h \longmapsto f'(z_0)\, h.$$

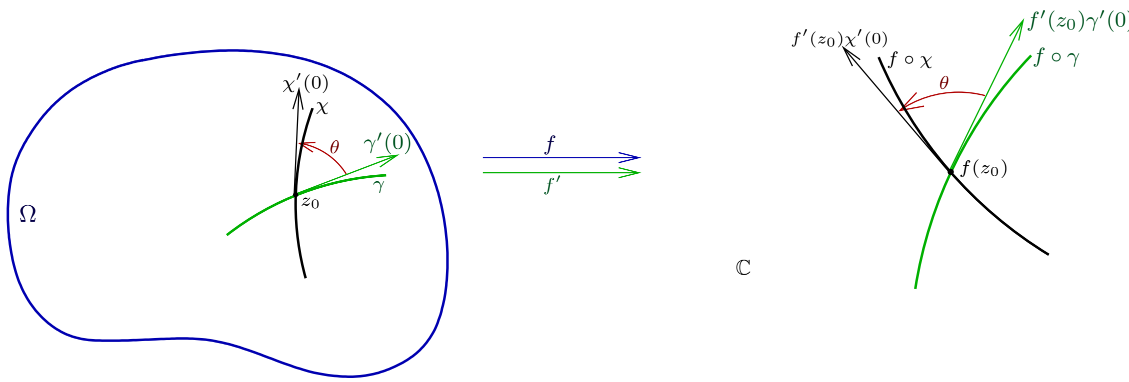
L'image par cette similitude du disque 'infinitésimal' centré en z_0 :

$$\mathbb{D}_r(z_0) \,:=\, \big\{ h \in \mathbb{C} \colon\, |h - z_0| < r \big\}$$

est donc le disque 'infinitésimal' centré en $f(z_0)$ de rayon $|f'(z_0)|\, r$:

$$\mathbb{D}_{|f'(z_0)|\, r}\big(f(z_0)\big) \,:=\, \big\{ k \in \mathbb{C} \colon\, |k - f(z_0)| < |f'(z_0)|\, r \big\},$$

lequel approxime bien l'image véritable $f\big(\mathbb{D}_r(z_0)\big)$.



Comme les similitudes, les fonctions holomorphes conservent les angles entre paires de courbes.

Observation 8.1. *Si une fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors en tout point $z_0 \in \Omega$ où $f'(z_0) \neq 0$ et pour toute paire de courbes $\mathscr{C}^1$ locales passant par z_0 et de vecteurs tangents non nuls :*

$$\begin{aligned} \gamma \colon \quad [-1, 1] \longrightarrow \Omega, \qquad \gamma(0) \,=\, z_0, \qquad \gamma'(0) \,\neq\, 0, \\ \chi \colon \quad [-1, 1] \longrightarrow \Omega, \qquad \chi(0) \,=\, z_0, \qquad \chi'(0) \,\neq\, 0, \end{aligned}$$

on a :

$$\mathsf{Angle}\,\big(\gamma'(0),\, \chi'(0)\big) \,=\, \mathsf{Angle}\,\big((f \circ \gamma)'(0),\, (f \circ \chi)'(0)\big).$$

Démonstration. En effet, la formule de dérivation composée de la Proposition 7.7 puis la similitude $h \longmapsto f'(z_0)\, h$ donnent bien :

$$\begin{aligned} \mathsf{Angle}\,\big((f \circ \gamma)'(0),\, (f \circ \chi)'(0)\big) \,&=\, \mathsf{Angle}\,\big(f'(z_0)\, \gamma'(0),\, f'(z_0)\, \chi'(0)\big) \\ &=\, \mathsf{Angle}\,\big(\gamma'(0),\, \chi'(0)\big). \end{aligned}$$

□

On appelle *conformes* de telles applications $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui sont infinitésimalement des similitudes. On démontre aisément que ce sont nécessairement des fonctions holomorphes de dérivées jamais nulles, et nous les étudierons en détail ultérieurement.

9. Séries entières

L'exemple paradigmatique de série entière est la *fonction exponentielle* de la variable complexe $z \in \mathbb{C}$ qui est définie par :

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Lorsque $z = x \in \mathbb{R}$ est réel, cette définition coïncide bien entendu avec la définition usuelle de l'exponentielle.

En fait, même lorsque $z \in \mathbb{C}$, cette série converge absolument et normalement pour tout $z \in \mathbb{C}$, parce que :

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!},$$

de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \left|e^z\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \\ &= e^{|z|} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Cette inégalité permet (exercice de révision) de démontrer rigoureusement que la série $\sum_n \frac{z^n}{n!}$ est uniformément convergente sur tout disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_R$ de rayon $R > 0$ quelconque.

Dans cette Section **9**, nous allons démontrer que e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Terminologie 9.1. Les fonctions qui sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ tout entier sont appelées *fonctions holomorphes entières*.

Nous allons aussi démontrer que les dérivées de e^z par rapport à z peuvent être calculées en dérivant terme à terme la série qui la définit :

$$\begin{aligned} \big(e^z\big)' &= \sum_{n=1}^{\infty} n\, \frac{z^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \\ &= e^z. \end{aligned}$$

Ainsi comme lorsque $z = x$ est réel, la dérivée de la fonction exponentielle reste égale à elle-même :

$$\frac{d}{dz}\big(e^z\big) = e^z.$$

Par contraste, la série géométrique :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \cdots$$

converge absolument seulement dans le disque unité :

$$\mathbb{D} = \big\{ z \in \mathbb{C} \colon \ |z| < 1 \big\}.$$

On se convainc aisément que sa somme vaut :

$$\frac{1}{1-z},$$

fonction qui est en fait holomorphe (exercice d'application du cours) dans l'ouvert $\mathbb{C} \backslash \{1\}$.

Résolvons rapidement cet exercice en raisonnant exactement comme dans le cas où $z = x \in \mathbb{R}$ est réel. Rappelons que pour tout entier $N \geqslant 0$:

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1-z}.$$

Il suffit alors de noter que pour $|z| < 1$, on a $0 = \lim_{N \to \infty} z^{N+1}$.

Définition 9.2. Une *série entière* en la variable $z \in \mathbb{C}$ est une somme infinie de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, z^n,$$

où les $a_n \in \mathbb{C}$ sont des coefficients complexes.

Afin de tester la convergence absolue d'une telle série, on doit examiner la série majorante évidente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |z|^n.$$

On observe alors sans effort que si cette série majorante à termes tous positifs converge pour une valeur $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |z_0|^n \, < \, \infty,$$

alors elle converge aussi (absolument) pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leqslant |z_0|$, simplement parce que :

$$|z|^n \, \leqslant \, |z_0|^n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où :

$$\begin{aligned} \bigg| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, z^n \bigg| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |z|^n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |z_0|^n \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer qu'il existe toujours un certain disque ouvert (peut-être vide) dans lequel une série entière converge.

Théorème 9.3. *Étant donné une série entière quelconque :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n,$$

il existe toujours un rayon :

$$0 \leqslant R \leqslant \infty$$

tel que :

- *la série converge absolument lorsque* $|z| < R$ *;*
- *la série diverge absolument lorsque* $|z| > R$*.*

De plus, en admettant la convention que :

$$\frac{1}{0} = \infty \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\infty} = 0,$$

ce rayon R *est donné par la formule :*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Définition 9.4. Ce nombre R est appelé *rayon de convergence* de la série entière, et le disque $\mathbb{D}_R$ *disque de convergence*.

Pour $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, le rayon de convergence vaut $R = \infty$; pour $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, il vaut $R = 1$.

Démonstration. Soit donc premièrement $z \in \mathbb{C}$ avec :

$$\begin{aligned} |z| \ &< \ \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \\ &= \ R. \end{aligned}$$

De manière équivalente :

$$\frac{1}{R}\,|z| \ < \ 1.$$

Il existe donc un $\varepsilon > 0$ assez petit pour que l'on ait encore :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)|z|}_{=:\, q} \ < \ 1,$$

quantité positive que l'on note $q < 1$.

Maintenant, par définition de la limite supérieure d'une suite de nombres réels, il existe un entier $N = N(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\Big(n \geqslant N(\varepsilon)\Big) \ \Longrightarrow \ \left(\sqrt[n]{|a_n|} \ \leqslant \ \frac{1}{R} + \varepsilon\right).$$

Par exponentiation n-ième, et après multiplication par $|z|^n$, on déduit :

$$\begin{aligned} |a_n|\,|z|^n \ &\leqslant \ \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n |z|^n \\ &= \ q^n, \end{aligned}$$

et puisque la série géométrique $\sum q^n$ converge, on majore sans peine :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|z|^n \leqslant \underbrace{\sum_{n=0}^{N(\varepsilon)-1} |a_n|\,|z|^n}_{\text{quantité finie}} + \underbrace{\sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} q^n}_{=\frac{q^N}{1-q}<\infty},$$

ce qui montre bien que la série converge absolument pour $|z| < R$ fixé.

Deuxièmement, avec $|z| > R$, la divergence absolue repose (exercice laissé au lecteur) sur la divergence de $\sum q^n$ lorsque $q > 1$. □

Pour z appartenant au bord $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = R\}$ du disque, la situation concernant la convergence ou la divergence de $\sum_n a_n z^n$ est en général beaucoup plus délicate. L'Exercice 36 donne des exemples.

On établit aisément (exercice) que les fonctions trigonométriques standard définies plus haut :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,z^n,$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\,z^{2n+1},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\,z^{2n},$$

ont toutes un rayon de convergence $R = \infty$, à savoir ce sont des fonctions holomorhes entières. Un calcul simple montre la connexion entre ces trois fonctions et fournit les célèbres *formules d'Euler :*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\,i}.$$

Les séries entières constituent une classe très importante de fonctions holomorphes qu'il est particulièrement aisé de manipuler.

Théorème 9.5. *Toute série entière :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,z^n$$

définit une fonction holomorphe *dans son disque de convergence. La dérivée de f est aussi une série entière que l'on obtient simplement en différentiant terme à terme la série de f, à savoir :*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,z^{n-1},$$

et de plus, cette série dérivée a le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.

Démonstration. L'assertion concernant le rayon de convergence découle du fait connu que :

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1},$$

puisqu'alors en effet, si le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ vaut par définition :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

le rayon de convergence de la série dérivée, que l'on ré-écrit de manière appropriée comme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, z^n$$

vaut alors, par la même définition :

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_1} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(n+1)\, a_{n+1}|} \\ &= \frac{1}{R}.\end{aligned}$$

Ensuite, on doit montrer que la série dérivée terme à terme en question :

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, z^n$$

n'est autre que la limite :

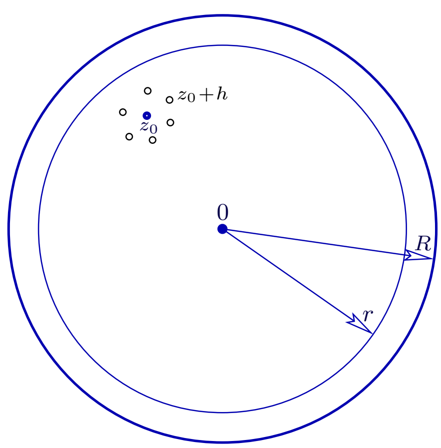
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \overset{?}{=} g(z),$$

mais il s'agit de dériver une fonction qui contient une *infinité* de termes.

Dans ce but, soit encore R le rayon de convergence de $f = \sum a_n z^n$ et fixons un point z_0 avec :

$$|z_0| < r < R,$$

pour un certain autre rayon de sécurité $r < R$.



Avec un grand entier $N \gg 1$ qui sera choisi ultérieurement, décomposons notre série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n\, z^n}_{=:\, S_N(z)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\, z^n}_{=:\, \mathsf{Reste}_N(z)},$$

ce qui s'abrège en :

$$f(z) = S_N(z) + \mathsf{Reste}_N(z).$$

Si nous restreignons maintenant les $h \in \mathbb{C}$ à être assez petits pour que :

$$|z_0 + h| \, < \, r,$$

on peut alors regarder :

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - g(z_0) &= \frac{S_N(z_0+h) + \mathsf{Reste}_N(z_0+h) - S_N(z_0) - \mathsf{Reste}_N(z_0)}{h} - g(z_0) \\ &= \frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} + \frac{\mathsf{Reste}_N(z_0+h) - \mathsf{Reste}_N(z_0)}{h} - g(z_0).\end{aligned}$$

L'expression $S_N(z)$ étant un polynôme, elle est partout holomorphe, *i.e.* $\mathbb{C}$-dérivable. Insérons alors $-S_N'(z_0) + S_N'(z_0)$, ce qui donne trois couples de termes :

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - g(z_0) = &\frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S_N'(z_0) + \\ &+ S_N'(z_0) - g(z_0) + \\ &+ \frac{\mathsf{Reste}_N(z_0+h) - \mathsf{Reste}_N(z_0)}{h}.\end{aligned}$$

Pour estimer la dernière ligne-reste, en utilisant :

$$a^n - b^n = (a-b)\big(a^{n-1} + a^{n-2}\, b + \cdots + a\, b^{n-2} + b^{n-1}\big),$$

nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathsf{Reste}_N(z_0+h) - \mathsf{Reste}_N(z_0)}{h}\right| &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \, \left|\frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h}\right| \\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left|\frac{\underline{h}_\circ\big((z_0+h)^{n-1} + \cdots + z_0^{n-1}\big)}{\underline{h}_\circ}\right| \\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \, \Big(|z_0+h|^{n-1} + |z_0+h|^{n-2}\, |z_0| + \cdots + |z_0|^{n-1}\Big) \\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \, n \, r^{n-1},\end{aligned}$$

grâce à $|z_0 + h| < r$ et à $|z_0| < r$.

Or l'expression majorante ainsi obtenue :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \, n \, r^{n-1}$$

est convergente, puisque $r \, < \, R$ et puisqu'on sait déjà que le rayon de convergence de $g(z) = \sum a_n \, n \, z^{n-1}$ est aussi égal à R. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, on est assuré qu'il existe $N_1 = N_1(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\Big(N \geqslant N_1(\varepsilon)\Big) \implies \left(\left|\frac{\mathsf{Reste}_N(z_0+h) - \mathsf{Reste}_N(z_0)}{h}\right| \leqslant \varepsilon\right).$$

Par ailleurs, puisque l'on a la convergence :

$$\lim_{N \to \infty} S_N'(z_0) = g(z_0),$$

il existe aussi un autre entier $N_2 = N_2(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\Big(N \geqslant N_2(\varepsilon)\Big) \implies \Big(\big|S_N'(z_0) - g(z_0)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Enfin, si nous choisissons un entier :

$$N \geqslant \max\big(N_1,\, N_2\big),$$

puisque le polynôme $S_N(z)$ est manifestement $\mathbb{C}$-différentiable, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ assez petit pour que :

$$\Big(|h| \leqslant \delta\Big) \implies \bigg(\bigg|\frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S_N'(z_0)\bigg| \leqslant \varepsilon\bigg).$$

En revenant aux trois lignes laissées en chemin plus haut, la synthèse de ces trois inégalités :

$$\begin{aligned}\bigg|\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - g(z_0)\bigg| &\leqslant \bigg|\frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S_N'(z_0)\bigg| + \\ &\quad + \big|S_N'(z_0) - g(z_0)\big| + \\ &\quad + \bigg|\frac{\mathsf{Reste}_N(z_0+h) - \mathsf{Reste}_N(z_0)}{h}\bigg| \\ &\leqslant 3\,\varepsilon,\end{aligned}$$

montre bien que pour $|h| \leqslant \delta$, on peut rendre arbitrairement petite la différence entre le quotient différentiel $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ et la série dérivée terme à terme $g(z_0)$. □

Des applications successives de ce théorème donnent sans effort le :

Corollaire 9.6. *Une série entière :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$$

est $\mathbb{C}$-différentiable une infinité de fois dans son disque de convergence, et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, sa dérivée k-ième s'obtient en la dérivant terme à terme k fois :

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}\,(n+k)\cdots(n+1)\,z^n.$$ □

Jusqu'à présent, nous n'avons eu affaire qu'à des séries entières centrées à l'origine. Plus généralement, une série entière centrée en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est une expression de la forme :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n.$$

Le disque de convergence de f est maintenant centré en z_0, et son rayon est encore donné par la même formule :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

En effet, si l'on pose :

$$g(w) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, w^n,$$

alors f est simplement obtenue en translatant g, à savoir avec :

$$w := z - z_0,$$

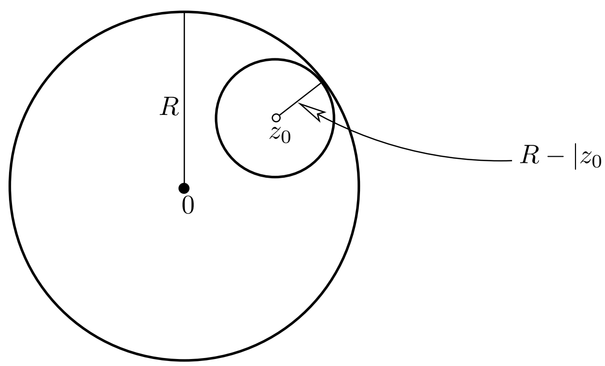
on a :

$$f(z) = g(w).$$

Par conséquent, tout ce qui vaut pour g vaut aussi pour f, après translation. En particulier, les dérivées de f et de g sont liées par :

$$f'(z) = g'(w) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, \big(z - z_0\big)^{n-1}.$$

En un point du disque de convergence d'une série entière — donc indéfiniment $\mathbb{C}$-différentiable grâce au Corollaire 9.6 —, on peut former une série de Taylor infinie. Le résultat suivant montre que le rayon de convergence de cette série entière de Taylor est toujours minoré d'une manière géométrique naturelle.



Théorème 9.7. *Soit une série entière :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$$

dont le rayon de convergence :

$$0 < R \leqslant \infty$$

n'est pas nul. En tout point z_0 appartenant à l'intérieur du disque de convergence :

$$|z_0| < R,$$

si l'on forme la série de Taylor de f :

$$g(w) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k\,!}\, w^k,$$

alors cette série entière possède toujours un rayon de convergence strictement positif au moins égal à :

$$R - |z_0|,$$

et l'on a de plus :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n\,!}\, \big(z - z_0\big)^n,$$

pour tout z dans le sous-disque :

$$\big|z - z_0\big| \,<\, R - |z_0|.$$

Démonstration. Posons donc :

$$w := z - z_0.$$

Pour estimer le rayon de convergence de :

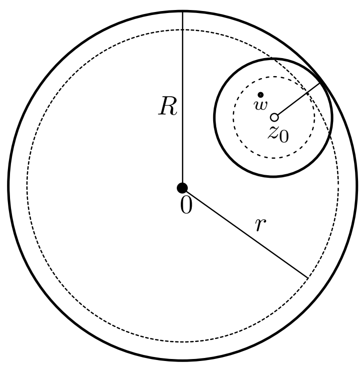
$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k\,!}\, w^k,$$

il faut contrôler la croissance des coefficients, et notamment de :

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!}\, a_{k+n}\, (z_0)^n,$$

par exemple via l'inégalité triangulaire :

$$\big|f^{(k)}(z_0)\big| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n\,!}\, \big|a_{n+k}\big|\, |z_0|^n.$$



Comme sur la figure, prenons un rayon r intermédiaire de sécurité :

$$|z_0| < r < R,$$

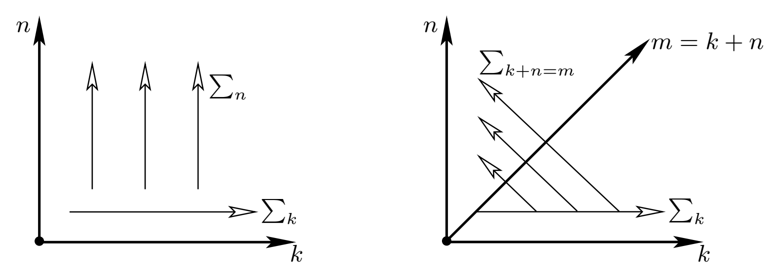
éventuellement arbitrairement proche de R.

En supposant :

$$|w| \leqslant r - |z_0|,$$

nous pouvons maintenant majorer :

$$\big|g(w)\big| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big|f^{(k)}(z_0)\big|}{k\,!}\, \big(r - |z_0|\big)^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n\,!\,k\,!}\, \big|a_{k+n}\big|\, |z_0|^n\, \big(r - |z_0|\big)^k.$$



Dans cette double somme, posons :

$$k + n =: m,$$

d'où $n = m - k$, afin de la transformer en :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{Expression}(k, n) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \mathsf{Expression}\big(k,\, m-k\big),$$

ce qui donne ici :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big|f^{(k)}(z_0)\big|}{k\,!} \big(r - |z_0|\big)^k \leqslant\; & \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \underbrace{\bigg(\sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \frac{m\,!}{(m-k)!\,k!}\, |z_0|^{m-k} \big(r - |z_0|\big)^k \bigg)}_{\text{reconnaître } (|z_0| + r - |z_0|)^m} \\
\leqslant\; & \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|\, r^m \\
<\; & \infty,
\end{aligned}$$

puisque $r < R$.

La finitude de cette somme montre donc que le rayon de convergence de $g(w)$ est au moins égal à $r - |z_0|$. Mais comme $r < R$ pouvait être choisi arbitrairement proche de R, c'est que ledit rayon de convergence de $g(w)$ est toujours au moins égal à :

$$R - |z_0|,$$

comme annoncé.

Il reste seulement à vérifier que :

$$\begin{aligned}
f(z) \overset{?}{=} & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n\,!\,k\,!}\, a_{k+n}\, (z_0)^n \big(z - z_0\big)^k \\
= & \sum_{m=0}^{\infty} a_m \bigg(\sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \frac{m\,!}{(m-k)!\,k!}\, (z_0)^{m-k} \big(z - z_0\big)^k \bigg) \\
= & \sum_{m=0}^{\infty} a_m \big(z_0 + z - z_0\big)^m \\
= & \sum_{m=0}^{\infty} a_m\, z^m,
\end{aligned}$$

ce qui est bien le cas, grâce au même calcul formel, les interversions de sommations étant justifiées par la convergence absolue des séries majorantes que l'on vient de manipuler. □

10. Fonctions analytiques et fonctions holomorphes

Dans la suite, nous travaillerons la plupart du temps dans des ouverts quelconques $\Omega \subset \mathbb{C}$. Avant d'étudier réellement l'espace proprement dit $\mathscr{O}(\Omega)$ des fonctions holomorphes dans Ω, nous allons commencer par étudier l'espace des *fonctions analytiques* dans Ω, car les séries entières sont aisément manipulables, comme nous venons de le voir dans ce qui précède.

Notation 10.1. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, l'ensemble des fonctions localement développables en série entière convergente sera noté :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\Omega) \,:=\, \Big\{ f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\colon\; \forall\, z_0 \in \Omega\;\; \exists\, r>0\;\text{ avec }\; \mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega \\ \text{il existe une série entière }\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z-z_0\right)^n\;\text{ convergeant dans }\; \mathbb{D}_r(z_0) \\ \text{telle que }\; f(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z-z_0\right)^n\;\; \forall\, z \in \mathbb{D}_r(z_0)\Big\}.\end{aligned}$$

Comme les ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ peuvent avoir des formes très diverses, on demande donc seulement que la fonction soit, au voisinage de chaque point $z_0 \in \Omega$, égale à une série entière convergente en les puissances de $z - z_0$, et alors $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On vérifie (exercice) que $\mathscr{A}(\Omega)$ est un anneau commutatif.

D'après le Théorème 9.5 qui précède, toute fonction analytique dans un ouvert Ω est aussi holomorphe dans Ω :

$$\mathscr{A}(\Omega) \,\subset\, \mathscr{O}(\Omega).$$

Un théorème profond de l'Analyse Complexe que nous établirons dans le chapitre suivant affirme que la réciproque est vraie : *toute fonction holomorphe dans un ouvert Ω est aussi analytique dans Ω, à savoir développable en série entière convergente autour de chaque point de Ω :*

$$\mathscr{A}(\Omega) \,=\, \mathscr{O}(\Omega).$$

Pour cette raison, de nombreux auteurs s'autorisent à utiliser parfois les deux termes '*holomorphe*' et '*analytique*' de façon interchangeable.

Mais pour l'instant dévoilons quelques propriétés des fonctions analytiques.

11. Principe des zéros isolés pour les fonctions analytiques

Localement au voisinage d'un point autour duquel elles convergent, les séries entières se comportent comme de simples polynômes, et en particulier, leurs zéros sont séparés les uns des autres — on dit '*isolés*' (du coronavirus).

Proposition 11.1. *Soit $f(z) = \sum a_n\, z^n$ une série entière convergente centrée à l'origine dont le rayon de convergence est $R > 0$. Si au moins un des coefficients $a_n \neq 0$ est non nul,* i.e. *si $f \not\equiv 0$, alors il existe un rayon $0 < r < R$ assez petit pour que :*

$$\begin{aligned}&\text{lorsque } a_0 = 0\colon \quad \Big(|z| < r \;\text{ et }\; f(z) = 0\Big) \;\Longrightarrow\; z = 0,\\ &\text{lorsque } a_0 \neq 0\colon \quad |z| < r \;\Longrightarrow\; f(z) \neq 0.\end{aligned}$$

Démonstration. Si en effet k est le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$, on peut factoriser :

$$\begin{aligned}f(z) &= a_k\, z^k + a_{k+1}\, z^{k+1} + a_{k+2}\, z^{k+2} + \cdots \\ &= z^k \Big(\underbrace{a_k + a_{k+1}\, z + a_{k+2}\, z^2 + \cdots}_{\text{nouvelle série entière } g(z)}\Big).\end{aligned}$$

Comme :

$$g(0) = a_k \neq 0,$$

par continuité, cette série entière g ne s'annule alors pas dans un certain voisinage de 0. $\square$

Corollaire 11.2. *Une fonction analytique f définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ possède toujours un* unique *développement en série entière convergente au voisinage de tout point $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. Sinon, on aurait :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \big(z - z_0\big)^n,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{a}_n \, \big(z - z_0\big)^n,$$

d'où par soustraction :

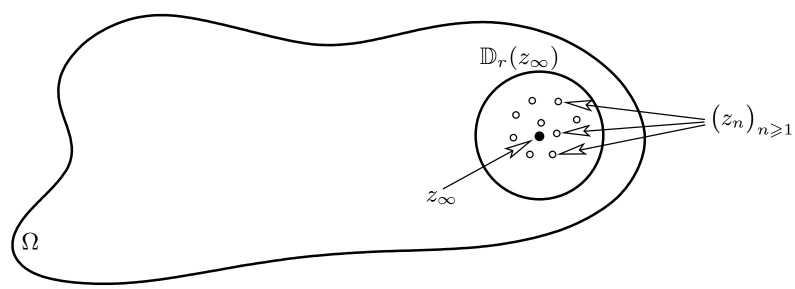
$$0 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\big[a_n - \widetilde{a}_n\big]}_{=:\, b_n} \, \big(z - z_0\big)^n,$$

mais grâce à la proposition qui précède, si un seul de ces coefficients b_n était non nul, la série à droite serait certainement non nulle pour $z \neq 0$ proche de l'origine, contradiction. □

Théorème 11.3. [Principe du prolongement analytique] *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert* connexe *et soient f, g deux fonctions analytiques dans Ω. Si f et g ont les mêmes valeurs sur un sous-ensemble $E \subset \Omega$ qui a un point d'accumulation* dans Ω, *alors ces deux fonctions coïncident :*

$$f \equiv g,$$

dans Ω tout entier.



Démonstration. Soit $z_\infty \in \Omega$ un point d'accumulation de E, et soit $\mathbb{D}_r(z_\infty)$ un disque de rayon $r > 0$ assez petit pour être contenu dans Ω et pour que f et g soient développables en séries entières convergentes dans ce disque. Par hypothèse, la différence $f - g$ admet une suite infinie de zéros distincts deux à deux $z_1, z_2, z_3, \dots$ qui sont tous contenus dans $\mathbb{D}_r(z_0)$ avec $z_n \longrightarrow z_\infty$. La contraposée de la Proposition 11.1 qui précède implique alors (exercice mental) que :

$$0 \equiv (f - g)\big|_{\mathbb{D}_r(z_\infty)}.$$

Maintenant, il s'agit de montrer que cette identité $f \equiv g$ valable sur le disque $\mathbb{D}_r(z_\infty)$ se *propage* à l'ouvert Ω tout entier, et c'est la connexité de Ω qui va garantir cela.

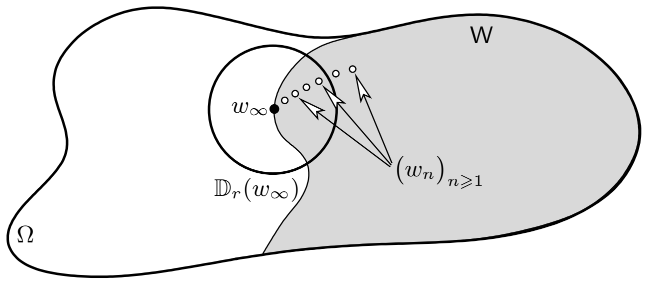
Introduisons en effet l'ensemble :

$$\mathsf{W} := \big\{ w \in \Omega \colon \ f \equiv g \text{ dans un voisinage ouvert de } w \big\}.$$

Cet ensemble W est ouvert (exercice mental). Il contient aussi $\mathbb{D}_r(z_\infty)$, donc il n'est pas vide. Notre but étant de démontrer que $\mathsf{W} = \Omega$, il suffit de faire voir que W est aussi *fermé*, puisque le seul sous-ensemble non vide d'un ouvert connexe qui est à la fois ouvert et fermé, c'est l'ouvert tout entier !

Soit donc w_∞ un point appartenant à l'adhérence $\overline{\mathsf{W}}$ de W pour la topologie induite, à savoir plus précisément :

$$w_\infty \in \overline{\mathsf{W}}^{\Omega} = \overline{\mathsf{W}}^{\mathbb{C}} \cap \Omega.$$



Comme $w_\infty \in \Omega$, il existe un disque $\mathbb{D}_r(w_\infty)$ de rayon $r > 0$ assez petit pour que $\mathbb{D}_r(w_\infty) \subset \Omega$. D'après l'Exercice 13, tout point adhérent à un ouvert est aussi point d'accumulation, donc il existe une suite $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $w_n \in \mathsf{W}$ *distincts deux à deux* telle que :

$$w_\infty = \lim_{n \to \infty} w_n.$$

Puisque $f = g$ sur W, en tous ces points, on a coïncidence :

$$f(w_n) = g(w_n).$$

Alors la contraposée de la Proposition 11.1 qui précède implique que $f \equiv g$ dans un voisinage ouvert de w_∞, donc $w_\infty \in \mathsf{W}$. Ceci montre que W est fermé, et achève la démonstration. □

Théorème 11.4. *Soit f une fonction analytique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui est* connexe. *Si $f \not\equiv 0$ n'est pas identiquement nulle, alors tous les zéros de f sont* isolés :

$$\Big(\forall\, z \in \Omega, \quad f(z) = 0\Big) \implies \Big(\exists\, r = r(z) > 0 \ \text{ tel que } \ \mathbb{D}_r(z) \subset \Omega$$
$$\text{et } \ f(w) \neq 0 \ \text{ pour tout } \ w \in \mathbb{D}_r(z) \backslash \{z\}\Big).$$

Démonstration. En effet, le théorème précédent s'applique à $f = f$ et à $g = 0$. □

De manière équivalente, l'ensemble des zéros d'une fonction $f \not\equiv 0$ analytique dans un ouvert Ω est toujours un sous-ensemble *discret* de Ω.

Théorème 11.5. *Soit f une fonction analytique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui est* connexe. *S'il existe un point $z_0 \in \Omega$ en lequel* toutes *les dérivées de f s'annulent :*

$$0 = f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = f'''(z_0) = \cdots,$$

alors $f \equiv 0$ est identiquement nulle dans Ω entier.

Démonstration. En effet, la série entière de f :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n\,!} \, \big(z - z_0\big)^n$$

converge par hypothèse dans un certain disque $\mathbb{D}_r(z_0)$ de rayon $r > 0$ assez petit, mais elle est identiquement nulle ! Donc la restriction :

$$f\big|_{\mathbb{D}_r(z_0)} \equiv 0$$

est identiquement nulle, et les théorèmes précédents propagent alors instantanément la zéro-ité de f à tout l'ouvert connexe Ω. $\square$

12. Intégration le long de courbes $\gamma \subset \mathbb{C}$

Dans la définition d'une courbe, on doit faire la différence entre l'objet géométrique 1-dimensionnel contenu dans le plan (lui-même muni d'une certaine orientation), et une paramétrisation de la courbe, qui est une application définie dans un intervalle fermé et à valeurs dans $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. La paramétrisation n'est jamais définie de manière unique, bien que l'image géométrique de la courbe le soit.

Définition 12.1. Une *courbe paramétrée* est une fonction $z = z(t)$ qui envoie un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$ dans le plan complexe $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} z\colon \quad [a,b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto z(t). \end{aligned}$$

En fait, il ne coûte (presque) rien d'imposer des conditions de régularité sur les paramétrisations, eu égard aux applications désirées à l'Analyse Complexe.

Définition 12.2. La courbe paramétrée sera dite *de classe* $\mathscr{C}^1$ lorsque la dérivée $z'(t)$ existe et est continue pour tout $t \in [a, b]$, avec de plus :

$$z'(t) \neq 0 \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, t \in [a,b])}.$$

Aux points-extrémités $t = a$ et $t = b$, les dérivées $z'(a)$ et $z'(b)$ doivent être interprétées comme dérivées à droite et à gauche, précisément définies par :

$$z'(a) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{z(a+h) - z(a)}{h} \qquad \text{et} \qquad z'(b) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{z(b+h) - z(b)}{h}.$$

Définition 12.3. On dit qu'une courbe paramétrée *continue :*

$$z\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

est $\mathscr{C}^1$ *par morceaux* lorsqu'il existe des points :

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b,$$

tels que $t \longmapsto z(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$.

On notera que les dérivées à droite et à gauche en chacun des points $a_1, \dots, a_{n-1}$ ne sont pas censées être égales.

Définition 12.4. Deux paramétrisations :

$$z\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{z}\colon \quad [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$$

sont dites *équivalentes* lorsqu'il existe une bijection de classe $\mathscr{C}^1$:

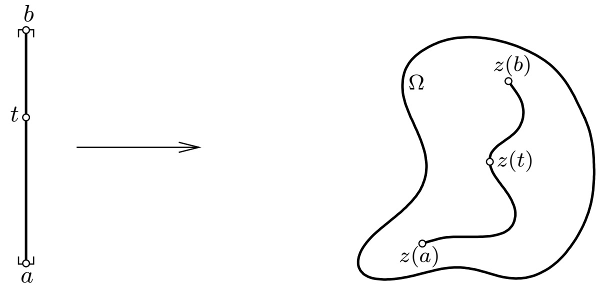
$$\begin{aligned} [c,d] &\longrightarrow [a,b] \\ s &\longmapsto t(s), \end{aligned}$$

satisfaisant $t'(s) > 0$ telle que :

$$\widetilde{z}(s) = z\big(t(s)\big),$$

pour tout $s \in [c, d]$.

La condition $t'(s) > 0$ dit précisément que l'orientation est préservée : lorsque s augmente continûment de c à d, il en va de même pour $t(s)$, qui augmente aussi continûment de a à b.



Définition 12.5. La famille de toutes les paramétrisations qui sont équivalentes à une paramétrisation $z(t)$ détermine une unique *courbe $\mathscr{C}^1$ par morceaux :*

$$\gamma \subset \mathbb{C},$$

à savoir l'image :

$$\gamma \,:=\, z\big([a,b]\big)$$

d'une quelconque paramétrisation, toutes ces images étant égales.

La courbe hérite de l'orientation canonique du segment $[a, b]$.

Définition 12.6. Étant donné une courbe γ, la courbe inverse γ^- est celle qu'on obtient en renversant les orientations de b vers a.

Clairement, la courbe γ^- consiste en les mêmes points de $\mathbb{C}$. Bien entendu, si $z\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation de γ, on peut prendre pour paramétrisation de γ^- l'application :

$$\begin{aligned} [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto z\big(b+a-t\big) \\ &=: z^-(t). \end{aligned}$$

Évidemment, une *courbe $\mathscr{C}^1$ par morceaux* est l'image d'une courbe paramétrée par morceaux, indépendamment de toute paramétrisation.

Terminologie 12.7. Les deux points $z(a)$ et $z(b)$ sont appelés *points-extrémités* de la courbe.

Puisque γ porte une orientation, il est naturel de dire que γ *part* de a, et *aboutit* en b.

Définition 12.8. Une courbe $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^1$ par morceaux est dite *simple* lorsqu'elle n'a aucune auto-intersection, c'est-à-dire lorsque :

$$\big(s \neq t\big) \implies \Big(z(s) \neq z(t)\Big).$$

Lorsque la courbe est fermée :

$$z(b) = z(a),$$

il est naturel de requérir seulement que :

$$\big(z(s) = z(t) \ \text{ et } \ s < t\big) \implies \big(s = a \ \text{ et } \ t = b\big).$$

L'exemple canonique de courbe est celui d'un cercle :

$$C_r(z_0) := \big\{z \in \mathbb{C}\colon \ |z - z_0| = r\big\}.$$

de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$.

Définition 12.9. L'*orientation trigonométrique* — contraire au sens des aiguilles d'une montre — est celle qui est donnée par la paramétrisation standard :

$$z(t) = z_0 + r\, e^{i\,t} \qquad\qquad (t \in [0, 2\,\pi]),$$

tandis que l'*orientation négative* est donnée par :

$$z(t) = z_0 + r\, e^{-i\,t} \qquad\qquad (t \in [0, 2\,\pi]).$$

L'intégration le long de courbes tracées dans le plan complexe est un outil important pour l'étude des fonctions holomorphes. Un théorème-clé en analyse complexe énonce que si une fonction est holomorphe dans l'*intérieur topologique* — notion plus délicate qu'il n'y paraît et qui doit être soigneusement précisée — d'une courbe fermée $\gamma \subset \mathbb{C}$, alors :

$$0 = \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Dans le chapitre qui suit, nous démontrerons ce résultat, appelé *Théorème de Cauchy*. Pour l'instant, nous nous contenterons de définitions initiales et de propriétés élémentaires.

Définition 12.10. Étant donné une courbe $\gamma = z\big([a,b]\big)$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$ paramétrée par $z\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, et étant donné une fonction f continue sur γ, on définit l'*intégrale de f le long de γ* par :

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f\big(z(t)\big)\, z'(t)\, dt.$$

Afin de s'assurer qu'une telle définition a un sens rigoureux, il faut vérifier que le membre de droite est indépendant de la paramétrisation choisie par γ.

Soit donc $\widetilde{z}\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ une autre paramétrisation quelconque, comme décrite ci-dessus :

$$\widetilde{z}(s) \ = \ z\big(t(s)\big) \qquad\qquad (s \in [c,d]).$$

Alors c'est la formule classique de changement de variable dans une intégrale qui va rendre tout cohérent :

$$\begin{aligned} \int_a^b f\big(z(t)\big)\, z'(t)\, dt &= \int_c^d f\big(z(t(s))\big)\, z'\big(t(s)\big)\, t'(s)\, ds \\ &= \int_c^d f\big(\widetilde{z}(s)\big)\, \widetilde{z}'(s)\, ds. \end{aligned}$$

Proposition 12.11. *L'intégrale d'une fonction le long d'une courbe est indépendante de sa paramétrisation.* □

Lorsque γ est continue par morceaux, l'intégrale de f sur γ est alors simplement définie comme la somme des intégrales de f sur les morceaux lisses de la courbe. Autrement dit, dans les notations qui précèdent :

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f\big(z(t)\big)\, z'(t)\, dt.$$

Définition 12.12. La *longueur* d'une courbe lisse γ est :

$$\mathsf{longueur}(\gamma) := \int_a^b \big|z'(t)\big|\, dt.$$

En raisonnant comme nous venons de le faire, on se convainc aisément que cette définition est elle aussi indépendante de la paramétrisation de la courbe. Évidemment, lorsque la courbe est lisse par morceaux, sa longueur est la somme (finie) des longueurs de ses morceaux lisses.

Proposition 12.13. *L'intégration des fonctions continues sur les courbes jouit des propriétés suivantes :*

(i) *elle est linéaire, à savoir :*

$$\int_\gamma \big(\alpha\, f(z) + \beta\, g(z)\big)\, dz = \alpha \int_\gamma f(z)\, dz + \beta \int_\gamma g(z)\, dz;$$

(ii) *si γ^- est la courbe γ inverse, alors :*

$$\int_{\gamma^-} f(z)\, dz = - \int_\gamma f(z)\, dz;$$

(iii) *l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\bigg| \int_\gamma f(z)\, dz \bigg| \leqslant \sup_{z\,\in\,\gamma} \big|f(z)\big| \cdot \mathsf{longueur}(\gamma).$$

Démonstration. La première propriété découle directement de la définition et de la linéarité de l'intégrale (de Riemann, ou de Lebesgue). La seconde propriété est laissée en exercice au lecteur-étudiant. Pour ce qui est de la troisième, on majore (très) aisément :

$$\begin{aligned} \bigg| \int_\gamma f(z)\, dz \bigg| &\leqslant \sup_{t\,\in\,[a,b]} \big|f\big(z(t)\big)\big| \int_a^b \big|z'(t)\big|\, dt \\ &= \sup_{z\,\in\,\gamma} \big|f(z)\big| \cdot \mathsf{longueur}(\gamma). \end{aligned}$$ □

Comme nous l'avons dit par anticipation destinée à éveiller la curiosité, le théorème de Cauchy qui sera démontré ultérieurement énonce que pour des courbes fermées appropriées $\gamma \subset \mathbb{C}$ contenues dans certains « bons » ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ sur lesquels f est holomorphe, on a :

$$0 = \int_\gamma f(z)\, dz.$$

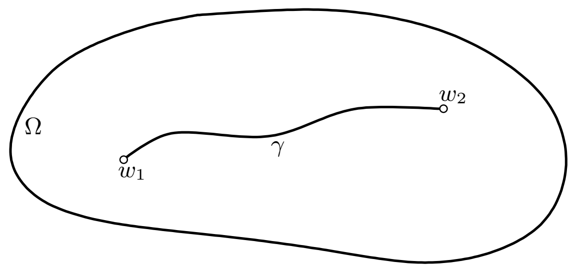
L'existence de *primitives* exhibe une première manifestation de ce phénomène remarquable.

Définition 12.14. Une *primitive (holomorphe)* pour une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est une fonction F, elle aussi holomorphe dans Ω, telle que :

$$F'(z) = f(z),$$

pour tout $z \in \Omega$.

En fait, on peut parler de primitive holomorphe de toute fonction continue $f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$, mais nous démontrerons dans le prochain chapitre que f est alors aussi holomorphe.



Théorème 12.15. *Si une fonction f holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ admet une primitive holomorphe F, alors pour toute courbe $\gamma \subset \Omega$ contenue dans l'ouvert qui part d'un point $w_1 \in \Omega$ et aboutit à un autre point $w_2 \in \Omega$, on a :*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(w_2) - F(w_1).$$

Démonstration. Lorsque γ est lisse, l'argument repose sur une simple application de la règle de différentiation des fonctions composées et sur une application du théorème fondamental de l'intégration. En effet, si :

$$z(t) \colon \quad [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

est une paramétrisation de γ, avec bien entendu $z(a) = w_1$ et $z(b) = w_2$, alors on calcule (très) aisément :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\, dz &= \int_a^b f\big(z(t)\big)\, z'(t)\, dt \\
&= \int_a^b F'\big(z(t)\big)\, z'(t)\, dt \\
\text{[Proposition 7.7]} \qquad &= \int_a^b \frac{d}{dt} F\big(z(t)\big)\, dt \\
&= F\big(z(b)\big) - F\big(z(a)\big).
\end{aligned}$$

Ensuite, lorsque γ n'est que lisse par morceaux, il en va de même grâce à une somme téléscopique :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\, dz &= \sum_{k=0}^{n-1} \Big[F\big(z(a_{k+1})\big) - F\big(z(a_k)\big)\Big] \\
&= F\big(z(a_n)\big) - F\big(z(a_0)\big) \\
&= F\big(z(b)\big) - F\big(z(a)\big).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 12.16. *Si γ est une courbe fermée lisse par morceaux dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et si f est une fonction continue qui admet une primitive F holomorphe dans Ω, alors :*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Démonstration. En effet, on voit bien que lorsque $z(b) = z(a)$, la différence $F\big(z(b)\big) - F\big(z(a)\big)$ se réduit à 0 ! □

Par (contre-)exemple, la fonction $f(z) = 1/z$ n'a *pas* de primitive dans l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, puisque, en paramétrant le cercle unité $C = \partial\mathbb{D}$ par $z(t) = e^{it}$, avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, on calcule :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{i\,e^{it}}{e^{it}}\,dt = 2i\pi \neq 0,$$

quantité qui n'est *pas* nulle, contrairement à ce que le dernier corollaire stipule.

Dans les chapitres qui vont suivre, nous allons voir que ce calcul d'apparence innocente gît au cœur le plus profond et le plus intime de toute la théorie.

Corollaire 12.17. *Si une fonction f holomorphe dans un domaine,* i.e. *dans un ouvert* connexe*, $\Omega \subset \mathbb{C}$, a une dérivée identiquement nulle $f' \equiv 0$, alors f est identiquement égale à une certaine constante (et réciproquement, de manière triviale).*

Démonstration. Fixons un point $w_0 \in \Omega$. Il suffit de montrer que $f(w) = f(w_0)$ pour tout $w \in \Omega$.

Puisque l'ouvert Ω est connexe, il est aussi connexe par arcs en vertu de l'Exercice 14, donc il existe une courbe γ de classe $\mathscr{C}^1$ qui joint w_0 à w. Puisque f est trivialement une primitive de f', on a :

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(w) - f(w_0).$$

Or par hypothèse, $f' \equiv 0$, donc l'intégrale à gauche est égale à 0, et on conclut que $f(w) = f(w_0)$, comme désiré. □

13. Pathologies « réelles »

Avant de dévoiler les propriétés prodigieuses des fonctions holomorphes, rappelons quelles sont les « pathologies » dont les fonctions réelles peuvent souffrir.

Tout d'abord, la dérivée f' d'une fonction dérivable en tout point peut s'avérer être assez « incontrôlable », en tout cas au moins être non continue, comme le montre :

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{lorsque } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

dérivable en tout point qui a (exercice) pour fonction dérivée :

$$f'(x) := \begin{cases} 2\,x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{lorsque } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

prenant les valeurs oscillantes ne convergeant pas vers $0 = f'(0)$:

$$f'\big(\tfrac{1}{n\,\pi}\big) = -(-1)^n \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}^*).$$

Autre exemple, une dérivée f' peut être continue tandis que $(f')'$ n'existe en aucun point, comme le montre (exercice) :

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{4^n}.$$

Volterra a trouvé des fonctions dérivables en tout point qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann. Un premier exemple simple est (noter le changement d'exposant) :

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{lorsque } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

dont la dérivée a pour valeurs spéciales divergentes (exercice) :

$$f'\bigg(\frac{1}{\sqrt{(2n+1)\,\pi}}\bigg) = 2\sqrt{(2n+1)\,\pi} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}),$$

donc f' est *non* bornée, donc f' ne peut *de facto* pas être Riemann-intégrable — être bornée, c'est la tenue minimale exigée chez Riemann ! Toutefois, puisqu'il existe une théorie des intégrales généralisées au sens de Riemann, et puisque pour $\varepsilon > 0$ petit tendant vers 0, on a clairement existence de la limite de :

$$\int_{\varepsilon}^{\sqrt{2/\pi}} f'(x)\,dx = \bigg[x^2 \sin\frac{1}{x^2}\bigg]_{\varepsilon}^{\sqrt{2/\pi}} = \frac{2}{\pi}\cdot 1 - \varepsilon^2 \sin\frac{1}{\varepsilon^2} \underset{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi},$$

cette fonction n'est pas un vrai contre-exemple, il faut trouver mieux !

En recollant-renormalisant de telles fonctions, Volterra est parvenu à construire une fonction continue $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en tout point, dont la dérivée est bornée $|f'(x)| \leqslant 3$ sur $[0,1]$ mais *discontinue* en tout point d'un sous-ensemble de Cantor $C \subset [0,1]$ « *gras* », c'est-à-dire de mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle strictement positive. Or rappelons que, d'après le cours d'Intégration, une fonction bornée sur $[0,1]$ est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle. Par conséquent, la fonction bornée f' ne peut *pas* être Riemann-intégrable. Ça, c'est un vrai contre-exemple !

Un raffinement de la construction de Volterra permet même de construire une fonction f dérivable et de dérivée f' bornée telle que f' n'est Riemann-intégrable sur aucun intervalle ouvert non vide contenu dans $]0,1[$.

Auparavant dans l'histoire des mathématiques, Riemann proposa en 1854 la fonction :

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2},$$

comme fonction-candidate à n'être dérivable en aucun point $x \in \mathbb{R}$.

Hardy démontra en 1916 que cette fonction n'est effectivement pas dérivable aux points de la forme :

$$x = \xi\,\pi,$$

avec :

$$\xi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \qquad \text{ou} \qquad \xi = \begin{cases} \frac{2a+1}{2b} \in \mathbb{Q}, \\ \frac{2a+1}{4b+1} \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ce qui ne traitait pas tous les points !

Gerver termina le travail en 1970, et contredisant toute attente, il fit voir que la série de Riemann *est* dérivable de dérivée égale à $-\frac{1}{2}$ aux points de la forme :

$$x = \frac{2a+1}{2b+1}\,\pi,$$

et enfin des fins, qu'elle n'est *pas* (non plus) dérivable aux points $x = \frac{2a}{2b+1}\,\pi$.

Tous ces phénomènes « pathologique » ne se produiront pas dans le pays des merveilles holomorphes, comme va commencer à le dévoiler le prochain chapitre.

14. Exercices

Exercice 1. Décrire géométriquement les différents lieux des points $z \in \mathbb{C}$ définis par les relations suivantes.

(a) $|z - z_1| = |z - z_2|$ pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ fixés.

(b) $1/z = \overline{z}$.

(c) $\mathrm{Re}\, z = 3$.

(d) $\mathrm{Re}\, z > c$ puis $\mathrm{Re}\, z \geqslant c$, avec $c \in \mathbb{R}$ fixé.

(e) $\mathrm{Re}\,(az + b) > 0$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ fixés.

(f) $|z| = \mathrm{Re}\, z + 1$.

(g) $\mathrm{Im}\, z = c$ avec $c \in \mathbb{R}$ fixé.

Exercice 2. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{R}^2$, défini pour $Z = (x_1, y_1)$ et $W = (x_2, y_2)$ par :

$$\langle Z, W \rangle := x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Soit aussi $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire hermitien usuel sur $\mathbb{C}$ défini par :

$$(z, w) := z\overline{w}.$$

Le terme *hermitien* notifie le fait que $(\cdot, \cdot)$ n'est pas symétrique, mais satisfait quand même la relation :

$$(w, z) = \overline{(z, w)}.$$

Vérifier que l'on a :

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &= \tfrac{1}{2}\big[(z, w) + (w, z)\big] \\ &= \mathrm{Re}\,(z, w), \end{aligned}$$

lorsqu'on écrit $z = x + i\,y$ et $w = u + i\,v$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Pour $\omega = s\, e^{i\,\varphi}$ fixé avec $s \geqslant 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $z^n = \omega$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, où $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.

Exercice 4. Soit pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z := \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin z := \frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2\,i}.$$

Montrer :

$$e^{i\,z} = \cos z + i \sin z,$$

puis :

$$1 \equiv \cos^2 z + \sin^2 z,$$

et enfin :

$$\cos'(z) = -\sin z \qquad \text{et} \qquad \sin'(z) = \cos z.$$

Exercice 5. Soit pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Montrer :

$$\cosh'(z) = \sinh z \qquad \text{et} \qquad \sinh'(z) = \cosh z,$$

puis :

$$1 \equiv \cosh^2(z) - \sinh^2(z),$$

et terminer en donnant les développements en séries entières de $\cosh z$ et de $\sinh z$.

Exercice 6. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sin(z/2) \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{2} + \cos z + \cdots + \cos(nz) = \frac{\sin\big(n + \frac{z}{2}\big)}{2 \sin \frac{z}{2}}.$$

Exercice 7. Le but est de démontrer que contrairement à $\mathbb{R}$, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ne peut pas être muni d'un ordre *total* qui soit compatible avec l'addition et la soustraction.

Plus précisément, montrer qu'il n'existe pas de relation $\prec$ entre les nombres complexes qui jouit des trois propriétés suivantes :

(i) pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a ou bien $z \prec w$, ou bien $w \prec z$ ou bien $z = w$, de manière exclusive ;

(ii) pour $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ arbitraires, si $z_1 \prec z_2$, alors $z_1 + z_3 \prec z_2 + z_3$;

(iii) pour $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ arbitraires, si $z_1 \prec z_2$ et si $0 \prec z_3$, alors $z_1 z_3 \prec z_2 z_3$.

Indication: Tester tout d'abord si $0 \prec i$ est possible.

Exercice 8. Montrer qu'une application $\mathbb{R}$-linéaire $\Lambda \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si elle commute avec la multiplication par i, et lorsque tel est le cas, montrer que $\Lambda(z) = \Lambda(1)\, z$.

Exercice 9. Montrer que les quatre fonctions suivantes sont holomorphes dans leur domaine de définition et qu'elles satisfont les équations de Cauchy-Riemann :

$$z^3, \qquad \frac{1}{z+1}, \qquad \frac{e^z}{z^5}, \qquad \frac{z^7}{z^2+1}.$$

Exercice 10. Déterminer si les cinq fonctions suivantes sont $\mathbb{C}$-dérivables en tout point de $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
&x^5 y^4 + i\, x y^3, \\
&y^2 \sin x + i\,(y^3 + 2\,x^2), \\
&\sin^2(x+y) + i \cos^2(x+y), \\
&e^x \cos y - 2xy + i\,\big(e^x \sin y + x^2 - y^2\big), \\
&(2-2i)\, y^3 - 6\,\big(\cos x + i \sin y\big) + 15\,(y^2 + 2\,y).
\end{aligned}$$

Exercice 11. Soit un polynôme $P = P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$.

(a) Montrer qu'il existe un autre polynôme $Q = Q(z, \overline{z}) \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$ tel que $P(x,y) \equiv Q(z, \overline{z})$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P soit une fonction holomorphe.

Exercice 12. Pour les deux fonctions réelles suivantes $u \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &:= 2\,x^3 - 6\,xy^2 + x^2 - y^2, \\
u(x,y) &:= x^2 - y^2 + e^{-y} \sin x - e^{-y} \cos x,
\end{aligned}$$

trouver une fonction réelle $v \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $u + iv \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ soit holomorphe.

Exercice 13. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et soit un point $z_\infty \in \overline{\Omega}$ appartenant à son adhérence, à savoir il existe une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points $z_n \in \Omega$ telle que :

$$z_\infty = \lim_{n \to \infty} z_n.$$

Montrer que z_∞ est *aussi* un point d'accumulation de Ω. Indication: Perturber légèrement la suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ comme une nouvelle suite $\{z'_n\}_{n=1}^{\infty}$ en assurant, par récurrence, que z'_{n+1} est distinct de $z'_1, \dots, z'_n$.

Exercice 14. Le but de cet exercice est d'établir l'équivalence entre la connexité et la connexité par arcs des ensembles *ouverts* $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(a) On suppose d'abord que Ω est ouvert et connexe par arcs, mais qu'il peut s'écrire $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec Ω_1, Ω_2 ouverts disjoints non vides, en raisonnant donc par l'absurde. On choisit deux points quelconques $w_1 \in \Omega_1$ et $w_2 \in \Omega_2$. Soit $z\colon [a,b] \longrightarrow \Omega$ une courbe continue joignant $w_1 = \gamma(a)$ à $\gamma(b) = w_2$. En introduisant :

$$t_1^* := \sup \big\{ t \in [a,b] \colon \ z(s) \in \Omega_1 \ \text{ pour tous } a \leqslant s \leqslant t \big\},$$

parvenir à une contradiction.

(b) Réciproquement, on suppose que Ω est ouvert et connexe, le but étant d'établir qu'il est connexe par arcs. On fixe un point $w \in \Omega$. Soit $\Omega_1 \subset \Omega$ l'ensemble de tous les points qui peuvent être joints à w au moyen d'une courbe continue contenue dans Ω. Aussi, soit $\Omega_2 \subset \Omega$ l'ensemble de tous les points qui ne peuvent *pas* être joints à w par une courbe continue contenue dans Ω. Montrer que Ω_1 et Ω_2 sont tous deux ouverts et connexes, qu'ils sont disjoints, et que leur réunion est Ω. Conclure.

Exercice 15. Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ et soit un point $z \in \Omega$. La *composante connexe* de Ω contenant z est l'ensemble $\mathscr{C}_z$ de tous les points $w \in \Omega$ qui peuvent être joints à z par une courbe *continue* entièrement contenue dans Ω.

(a) Montrer tout d'abord que $\mathscr{C}_z$ est ouvert et connexe. Montrer ensuite que $w \in \mathscr{C}_z$ définit une relation d'équivalence, à savoir que $z \in \mathscr{C}_z$, puis que $w \in \mathscr{C}_z \Longleftrightarrow z \in \mathscr{C}_w$ et enfin que :

$$\Big(w \in \mathscr{C}_z \quad \text{et} \quad z \in \mathscr{C}_\zeta \Big) \Longrightarrow \Big(w \in \mathscr{C}_\zeta \Big).$$

(b) Montrer que Ω a un nombre au plus dénombrable de composantes connexes distinctes. Indication: Si, au contraire, il existait un nombre *non dénombrable* de telles composantes, obtenir un nombre non dénombrable de disques ouverts disjoints, et penser aux points de $\mathbb{C} \supset \mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}$ à coordonnées rationnelles.

(c) Montrer que si $\Omega = \mathbb{C} \backslash K$ est le complémentaire d'un sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{C}$, alors Ω possède une et une seule composante connexe *non bornée*, à savoir une composante connexe dont l'adhérence n'est pas compacte. Indication: Penser au complémentaire d'un grand disque ouvert contenant K.

Exercice 16. La famille d'applications introduites ici joue un rôle important en Analyse Complexe. Ces applications, dites *de Blaschke*, réapparaîtront notamment lorsqu'on étudiera les applications dites *conformes* de $\mathbb{C}$.

(a) Soient deux nombres complexes $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $z\,\overline{w} \neq 1$. Montrer que :

$$\left| \frac{w-z}{1-z\,\overline{w}} \right| < 1, \qquad \text{lorsque de plus } \ |z| < 1 \ \text{ et } \ |w| < 1,$$

et aussi que :

$$\left| \frac{w-z}{1-z\,\overline{w}} \right| = 1, \qquad \text{lorsque } \ |z| = 1 \ \text{ ou } \ |w| = 1,$$

Indication: Justifier qu'on peut supposer que $z \in \mathbb{R}$ est réel. Ensuite, se ramener à montrer que :

$$(r-w)\,(r-\overline{w}) \leqslant (1-rw)\,\big(1-r\,\overline{w}\big),$$

avec une égalité $=$ au lieu d'une inégalité $\leqslant$ pour r et $|w|$ appropriés.

(b) Montrer que pour $w \in \mathbb{D}$ fixé dans le disque unité, à savoir satisfaisant $|w| < 1$, l'application :

$$F\colon \quad z \longmapsto \frac{w-z}{1-z\,\overline{w}}$$

jouit des quatre propriétés :

- **(i)** $F\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ envoie le disque unité $\mathbb{D}$ dans lui-même, et est holomorphe ;
- **(ii)** F échange 0 et w, à savoir $F(0) = w$ et $F(w) = 0$;
- **(iii)** $|F(z)| = 1$ pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$ sur le cercle unité, *i.e.* tout z avec $|z| = 1$;
- **(iv)** $F\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est bijective. Indication: Calculer $F \circ F$.

Exercice 17. Soient $\mathsf{U} \subset \mathbb{C}$ et $\mathsf{V} \subset \mathbb{C}$ deux sous-ensembles ouverts du plan complexe. Soient les deux opérateurs :

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Montrer que si $f\colon \mathsf{U} \longrightarrow \mathsf{V}$ et $g\colon \mathsf{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, c'est-à-dire différentiables au sens réel par rapport aux deux variables (x, y) jusqu'à l'ordre 2 avec des dérivées toutes continues, la composition :

$$h := g \circ f$$

satisfait, en termes de ces deux opérateurs, les règles suivantes de différentiation composée :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\,\frac{\partial \overline{f}}{\partial z},\\ \frac{\partial h}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial g}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\,\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}.\end{aligned}$$

Exercice 18. **(a)** Montrer qu'en coordonnées polaires $z = r\,e^{i\,\theta}$, les équations de Cauchy-Riemann prennent la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \theta},\\ \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\,\frac{\partial v}{\partial r}.\end{aligned}$$

Indication: Vérifier d'abord les formules :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta},\\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

(b) Utiliser ces équations pour faire voir que la *fonction logarithme* définie par :

$$\log z = \log r + i\,\theta,$$

pour $z = r\,e^{i\,\theta}$ avec $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$, est holomorphe.

Exercice 19. Montrer que :

$$4\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = 4\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\,\frac{\partial}{\partial z} = \Delta,$$

ou Δ est le *laplacien :*

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Exercice 20. Utiliser l'Exercice 19 pour montrer que si une fonction f est holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors sa partie réelle $\mathrm{Re}\, f$ et sa partie imaginaire $\mathrm{Im}\, f$ satisfont :

$$\begin{aligned}0 &= \Delta\big(\mathrm{Re}\, f\big)\\ &= \Delta\big(\mathrm{Im}\, f\big).\end{aligned}$$

(Les solutions $u \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ sont appelées *fonctions harmoniques*.)

Exercice 21. Soit la fonction :

$$f(x + i\,y) := \sqrt{|x|\;|y|},$$

définie pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f satisfait les équations de Cauchy-Riemann en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, mais qu'elle n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable en $0 \in \mathbb{C}$.

Exercice 22. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer que f est constante dans l'une (au moins) des trois circonstances suivantes :

- $\mathrm{Re}\, f$ est constante ;
- $\mathrm{Im}\, f$ est constante ;
- $|f|$ est constante.

Exercice 23. **(a)** Montrer que la fonction $z \longmapsto 1/\overline{z}$ n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(b) Montrer qu'elle conserve les angles infinitésimaux *non* orientés entre paires de courbes.

(c) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide invariant par conjugaison complexe, c'est-à-dire satisfaisant $z \in \Omega$ implique $\overline{z} \in \Omega$. Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, montrer que la fonction :

$$g(z) := \overline{f(\overline{z})} \qquad (z \in \Omega)$$

est holomorphe dans Ω.

(d) On suppose maintenant $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ non constante. Parmi les cinq fonctions suivantes :

$$f(\overline{z}), \qquad \overline{f(z)}, \qquad \mathrm{Re}\, f(z), \qquad \mathrm{Im}\, f(z), \qquad \big|f(z)\big|,$$

lesquelles sont holomorphes ?

Exercice 24. Soient deux suites finies de nombres complexes :

$$\big\{a_n\big\}_{1\leqslant n\leqslant N} \qquad \text{et} \qquad \big\{b_n\big\}_{1\leqslant n\leqslant N},$$

avec $N \geqslant 2$. Pour $1 \leqslant k \leqslant N$, on note :

$$B_k := b_1 + \cdots + b_k.$$

Établir la formule de *sommation par parties :*

$$\sum_{n=M}^{N} a_n\, b_n = a_N\, B_N - a_M\, B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} \big(a_{n+1} - a_n\big)\, B_n,$$

valable pour tout $1 \leqslant M \leqslant N-1$.

Exercice 25. En utilisant l'Exercice 24, démontrer le *Théorème d'Abel :* si une série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ($a_n \in \mathbb{C}$), alors :

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r<1}} \sum_{n=1}^{\infty} r^n\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Exercice 26. Montrer que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de nombres complexes tous non nuls $a_n \in \mathbb{C}^*$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L,$$

avec $0 \leqslant L \leqslant \infty$, alors on a aussi :

$$L = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Ainsi, lorsqu'il est applicable, le critère de Hadamard peut être utilisé (au lieu du critère de Cauchy), pour déterminer un rayon de convergence.

Exercice 27. **(a)** Montrer que la fonction :

$$f(z) := \frac{1}{1-z-z^2}$$

est holomorphe dans un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}$.

(b) Montrer que les coefficients de son développement en série entière à l'origine $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ satisfont la relation de récurrence de Fibonacci :

$$a_0 = a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (\forall\, n \geqslant 2).$$

(c) Déterminer le rayon de convergence exact de cette série entière.

Exercice 28. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\log n\big)^2\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n!\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n + 3\,n} z^n, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3\,n)!}\, z^n.$$

Indication: Utiliser l'asymptotique de Stirling $n! \sim \big(\frac{n}{e}\big)^n \sqrt{2\pi n}$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Exercice 29. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\, z^n,$$

où $q > 0$.

Exercice 30. Soient deux séries entières centrées à l'origine :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \qquad \text{et} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n,$$

dont les rayons de convergence respectifs $R > 0$ et $S > 0$ sont strictement positifs. Montrer que les séries somme et produit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n + b_n\big)\, z^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \big(a_0\, b_n + \cdots + a_n\, b_0\big)\, z^n$$

ont un rayon de convergence au moins égal à :

$$\min\big(R,\, S\big),$$

et fournissent les valeurs de $f(z) + g(z)$ et de $f(z)\, g(z)$ dans le disque associé.

Exercice 31. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ avec $\gamma \neq 0, -1, -2, -3, \dots$.

(a) Trouver le rayon de convergence de la *série hypergéométrique :*

$$F\big(\alpha, \beta, \gamma;\, z\big) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\ \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\, z^n.$$

(b) Montrer que $F\big(\alpha, \beta, \gamma;\, z\big)$ est une solution de l'équation différentielle dite hypergéométrique d'inconnue y :

$$0 = z\,(1-z)\, y'' + \big[c - (1 + a + b)\, z\big]\, y' - ab\, y.$$

Exercice 32. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, z^n$ une série entière ayant un rayon de convergence $R > 0$. Montrer que les séries suivantes ont le même rayon de convergence R :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}.$$

Exercice 33. Soit un entier $r \geqslant 1$. Trouver le rayon de convergence de la *fonction de Bessel* d'ordre r :

$$J_r(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+r)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

Exercice 34. Quel est le rayon de convergence de la série entière :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n!)^2}\ ?$$

Montrer qu'elle est solution de l'équation différentielle d'inconnue y :

$$0 = z\, y'' + y' - 4\, z\, y.$$

Exercice 35. Montrer qu'il existe des nombres dits *de Bernoulli* tels que :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n\,!}\, z^n.$$

Montrer que $|B_n| \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$. Montrer que :

$$\frac{B_0}{n!\,0!} + \frac{B_1}{(n-1)!\,1!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{1!\,(n-1)!} = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \ n = 1, \\ 0 & \text{lorsque } \ n \geqslant 2. \end{cases}$$

En déduire que $B_n \in \mathbb{Q}$. Calculer B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Montrer que $B_{2n+1} = 0$ pour $n \geqslant 1$. Montrer :

$$\frac{z}{2}\,\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}\,z^{2n},$$

et en déduire :

$$\pi\,z\,\mathsf{cotan}(\pi\,z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{(2\pi)^{2n}}{(2\,n)!}\,B_{2n}\,z^{2n}.$$

Exercice 36. Établir les énoncés suivants.

(a) La série entière $\sum n\,z^n$ ne converge en aucun point du cercle unité.

(b) La série entière $\sum \frac{1}{n^2}\,z^n$ converge en tous les points du cercle unité.

(c) La série entière $\sum \frac{1}{n}\,z^n$ converge en tous les points du cercle unité, excepté le point 1. Indication: utiliser la sommation par parties.

Exercice 37. Soit $m \geqslant 1$ un entier. Développer $(1-z)^{-m}$ en puissances de z. Montrer que les coefficients obtenus :

$$\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,z^n,$$

satisfont l'estimée asymptotique suivante :

$$a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(m-1)!}\,n^{m-1}.$$

Exercice 38. Montrer que pour tout $|z| < 1$, on a :

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1-z},$$

et aussi :

$$\frac{z}{1+z} + \frac{2\,z^2}{1+z^2} + \cdots + \frac{2^k\,z^{2^k}}{1+z^{2^k}} + \cdots = \frac{z}{1-z}.$$

Montrer que ces deux sommes infinies convergent commutativement. Indication: utiliser le développement dyadique d'un entier et le fait que $2^{k+1}-1 = 1+2+2^2+\cdots+2^k$.

Exercice 39. Un sous-ensemble $S \subset \{1,2,3,\dots\}$ de $\mathbb{N}^*$ est dit être *en progression arithmétique* lorsqu'il est de la forme :

$$S = \big\{a,\ a+d,\ a+2\,d,\ a+3\,d,\ \dots\dots\big\},$$

où $a, d \geqslant 1$ sont des entiers. Ici, d est appelé le *pas* de la progression arithmétique.

Montrer que $\mathbb{N}^*$ ne peut pas être partitionné en un nombre fini de sous-ensembles $S_1,\dots,S_k$ qui sont en progressions arithmétiques de pas $d_1,\dots,d_k$ tous distincts deux à deux (excepté dans le cas trivial $a = d = 1$). Indication: Écrire $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ comme somme de termes du type $\frac{z^a}{1-z^d}$.

Exercice 40. Montrer que l'anneau des fonctions analytiques dans un ouvert Ω est un anneau intègre si et seulement si Ω est connexe.

Exercice 41. Montrer que l'algèbre des fonctions continues sur un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$ n'est jamais intègre, et décrire précisément les diviseurs de 0.

Exercice 42. Existe-t-il une fonction analytique f définie sur un ouvert connexe Ω contenant $0 \in \mathbb{C}$ et satisfaisant :

- soit pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{n} \in \Omega$:

$$f\bigg(\frac{1}{n}\bigg) = f\bigg(\frac{1}{2\,n+1}\bigg) = \frac{1}{n}?$$

- soit pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{n} \in \Omega$:

$$f\bigg(\frac{1}{n}\bigg) = f\bigg(-\,\frac{1}{n}\bigg) = \frac{1}{n^2}?$$

Exercice 43. Soit $f(z) = \sin \frac{\pi}{1-z}$. Montrer que f est analytique sur le disque ouvert $\{|z| < 1\}$. Déterminer les zéros de f. A-t-on une contradiction avec le principe des zéros isolés ?

Exercice 44. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une fonction $f \in \mathscr{O}\big(\Omega\backslash\{z_0\}\big)$ holomorphe en-dehors d'un certain point $z_0 \in \Omega$. On suppose que f est localement bornée au voisinage de z_0, à savoir qu'il existe un rayon $r > 0$ et une constante $0 \leqslant \mathrm{M} < \infty$ tels que :

$$\big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M} \qquad\qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}_r(z_0) \setminus \{z_0\}).$$

(a) Montrer que la fonction définie par :

$$g(z) := \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z) & \text{lorsque } z \in \Omega\backslash\{z_0\}, \\ 0 & \text{pour } z = z_0, \end{cases}$$

est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω.

(b) En admettant la coïncidence $\mathscr{O}(\Omega) = \mathscr{A}(\Omega)$ entre fonctions holomorphes et fonctions analytiques, montrer qu'il existe une série entière unique $\varphi(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n$ convergeant au voisinage de z_0 telle que :

$$g(z) = \big(z - z_0\big)^2\,\varphi(z - z_0) \qquad\qquad (\forall\, z \text{ près de } z_0).$$

(c) Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe $\widetilde{f} \in \mathscr{O}(\Omega)$ telle que :

$$\widetilde{f}\big|_{\Omega\backslash\{z_0\}} = f.$$

Exercice 45. Considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \leqslant 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{lorsque } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que f est indéfiniment différentiable, *i.e.* montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrer que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que f ne peut être représentée, dans aucun intervalle ouvert non vide centré à l'origine, sous forme d'une série entière convergente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$.

Exercice 46. Calculer :

$$\int_{[0,1+i]} x\,dz, \qquad\qquad \int_0^\pi y\,d\big(\mathrm{R}\,e^{i\theta}\big) \qquad\qquad (\mathrm{R} > 0).$$

Exercice 47. Sur le cercle $C_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \colon\ |z - z_0| = r\}$ de rayon $r > 0$ centré en $z_0 \in \mathbb{C}$, calculer pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{C_r(z_0)} \big(z - z_0\big)^n\,dz.$$

Exercice 48. Avec $\mathrm{R} > 0$, soit C_{R}^+ le demi-cercle de diamètre $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ parcouru dans le sens trigonométrique. Vérifier que :

$$\int_{C_{\mathrm{R}}^+} e^z\,dz = \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} e^x\,dx.$$

Exercice 49. Sur l'ellipse E de demi-axes $0 < a \leqslant b$ paramétrée par $\theta \longmapsto a\cos\theta + i\,b\sin\theta$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, calculer :

$$\int_E |z|^2\,dz.$$

Exercice 50. Pour toute fonction continue g sur le cercle unité C paramétré par $\theta \longmapsto e^{i\theta}$, montrer que :

$$\overline{\int_C g(z)\,dz} = -\int_C \overline{g(z)}\,\frac{dz}{z^2}.$$

Exercice 51. Montrer que la fonction $f(z) := \frac{1}{z^2 - z}$ n'a pas de primitive dans l'ouvert :

$$\Omega := \big\{z \in \mathbb{C} \colon\ 0 < |z - 1| < 1\big\}.$$

Exercice 52. Soit γ une courbe lisse dans $\mathbb{C}$ paramétrée par $z(t)\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Soit γ^- la courbe orientée dans le sens inverse. Montrer que pour toute fonction continue f sur γ, on a :

$$\int_{\gamma^-} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz.$$

Exercice 53. Cet exercice a pour objectif de faire pénétrer plus avant dans la substance essentielle du théorème de Cauchy, qui sera traité en détail dans le chapitre suivant.

(a) Soit γ un cercle quelconque centré à l'origine $0 \in \mathbb{C}$, muni de l'orientation trigonométrique. Pour $n \in \mathbb{Z}$ entier relatif, évaluer l'intégrale :

$$\int_\gamma z^n\, dz.$$

(b) Traiter la même question, mais pour un cercle γ dont l'intérieur ne contient pas l'origine $0 \in \mathbb{C}$.

(c) Soit C_r le cercle de centre $0 \in \mathbb{C}$ et rayon $r > 0$, orienté dans le sens trigonométrique. Montrer que pour $|a| < r < |b|$, on a :

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)}\, dz = \frac{2i\pi}{a-b}.$$

Exercice 54. Soit f une fonction continue dans un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer que deux primitives quelconques de f (s'il en existe) diffèrent toujours par une constante.

Exercice 55. Soit un rayon $\mathrm{R} > 0$, soit le disque ouvert $\mathbb{D}_{\mathrm{R}} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < \mathrm{R}\}$ centré en l'origine, et soit $f\colon \mathbb{D}_{\mathrm{R}} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui est holomorphe. Ainsi, la dérivée complexe $z \longmapsto f'(z)$ est ici supposée continue.

Pour $0 < r < \mathrm{R}$, dans le sous-disque $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$, pour $z \in \mathbb{D}_r$ quelconque fixé, *i.e.* pour $|z| < r$, on introduit les intégrales suivantes dépendant d'un paramètre réel $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$:

$$I(\lambda) := \int_0^{2\pi} \frac{f\big((1-\lambda)\, z + \lambda\, r\, e^{i\theta}\big) - f(z)}{r\, e^{i\theta} - z}\, r\, e^{i\theta} d\theta.$$

(a) Justifier que $\lambda \longmapsto I(\lambda)$ est continue sur $[0,1]$.

(b) Trouver $I(0)$.

(c) Justifier que pour tout $0 < \lambda \leqslant 1$, la dérivée $I'(\lambda)$ existe.

(d) Calculer $I'(\lambda)$ sur $]0,1]$.

(e) Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta}) - f(z)}{r\, e^{i\theta} - z}\, r\, e^{i\theta}\, d\theta = 0.$$

(f) Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{r\, e^{i\theta}}{r\, e^{i\theta} - z}\, d\theta = 2\pi.$$

Indication: Développer en série entière $1\big/\big(1 - \frac{z}{r\, e^{i\theta}}\big)$.

(g) Démontrer et justifier la formule suivante :

$$2\pi\, f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{r^n} \int_0^{2\pi} f\big(r\, e^{i\theta}\big)\, e^{-in\theta}\, d\theta.$$

Indication: En appelant c_n le coefficient de $\frac{z^n}{r^n}$ ci-dessus, vérifier que :

$$|c_n| \leqslant 2\pi \sup_{|\zeta| = r} \big|f(\zeta)\big|.$$

(h) Montrer que toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Delta)$ et $\mathscr{C}^1$ dans un disque $\Delta := \mathbb{D}_{\mathrm{R}}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - z_0| < \mathrm{R}\}$ est développable en série entière convergente :

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n\, \big(z - z_0\big)^n \qquad (\forall\, |z - z_0| < \mathrm{R}),$$

avec des coefficients complexes donnés par :

$$a_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\big(z_0 + r\,e^{i\theta}\big)\,e^{-in\theta}\,d\theta \qquad\qquad (n \geqslant 0).$$

(i) Obtenir la formule de Cauchy valable pour tous r et z avec $|z - z_0| < r < \mathrm{R}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\,e^{i\theta})}{z_0 + r\,e^{i\theta} - z}\,r\,e^{i\theta}\,d\theta.$$