

**Avertissement :** L'objectif principal de ce travail, achevé en juin 2004, était de développer explicitement certains calculs qu'Élie Cartan se dispense par expérience de conduire à leur terme. Le texte sera remanié, condensé et enrichi de considérations physiques pour paraître comme fascicule indépendant en 2006.

## SUR LES ÉQUATIONS DE LA GRAVITATION D'EINSTEIN (D'APRÈS ÉLIE CARTAN)

JOËL MERKER

RÉSUMÉ. Sur un espace-temps local à quatre dimensions, équipé de coordonnées  $x^i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , et muni d'une métrique pseudo-riemannienne  $\sum_{i,j=1}^4 g_{ij}(x) dx^i dx^j$  de signature  $(3, 1)$ , un tenseur à deux indices  $C_{ij}^0$  est dit *covariant* s'il se transforme comme le tenseur métrique  $g_{ij}$  à travers un changement de coordonnées  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ . En 1922, Élie Cartan démontrait que tout tenseur covariant

$$C_{ij}^0 = C_{ij}^0 \left( g_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right)$$

qui dépend du jet d'ordre 2 des coefficients métriques via une fonction  $C_{ij}^0$  indépendante du système de coordonnées et linéaire par rapport aux dérivées partielles  $\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}$ , est nécessairement de la forme :

$$C_{ij}^0 = \nu A_{ij} + \mu A g_{ij} + \lambda \delta_i^j;$$

ici,  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$  sont des constantes,  $A_{ij}$  désigne le tenseur de Ricci deux fois covariant associé à la connexion de Levi-Civita et  $A$  désigne la courbure scalaire de la métrique pseudo-riemannienne. Il en découlait aisément que le tenseur une fois covariant et une fois contravariant défini par :

$$E_i^j := \mu \left( A_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j A \right) + \lambda \delta_i^j$$

est le plus général qui satisfait la loi de conservation  $\sum_{j=1}^n \nabla_j E_i^j = 0$ , exprimant l'annulation de sa divergence absolue. Ici, le quotient  $\Lambda := \frac{\lambda}{\mu}$  coïncide avec la constante cosmologique. Ainsi, le tenseur deux fois covariant qu'Einstein avait introduit en 1916 pour écrire les équations de la gravitation  $E_{ij} = -T_{ij}$  en relativité générale était-il essentiellement unique.

À partir d'une lecture directe du mémoire de 1922, nous reconstituons les raisonnements originaux d'Élie Cartan sous une forme complète et accessible.

## Table des matières

1. Introduction historique, résumé de géométrie riemannienne et équations de la gravitation	
2.	
2. Diagonalisation de la métrique pseudo-riemannienne .....	27.
3. Équations de structure et courbure pseudo-riemannienne .....	34.
4. Méthode d'équivalence pour les surfaces gaussiennes .....	46.
5. Méthode d'équivalence pour les variétés pseudo-riemanniennes .....	49.
6. Équations de structure avec variables de rotation .....	56.
7. Identités de Bianchi et dérivées covariantes d'ordre quelconque .....	67.
8. Invariants relatifs et invariants absolus .....	78.
9. Forme quadratique de Riemann-Christoffel .....	86.
10. Paramétrisation des 2-plans dans $\mathbb{C}^4$ .....	87.
11. Décomposition du tenseur de courbure en composantes irréductible .....	101.
12. Théorème d'unicité .....	105.
Références .....	109.

[Avec 3 figures]

## §1. INTRODUCTION HISTORIQUE, RÉSUMÉ DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE ET ÉQUATIONS DE LA GRAVITATION

En 1922, dans un mémoire souvent cité mais resté difficile d'accès<sup>1</sup>, Élie Cartan démontrait que le tenseur  $E_{ij}$ , construit par Einstein en 1916 et apparaissant dans le membre *géométrique* des équations  $E_{ij} = -T_{ij}$  de la gravitation<sup>2</sup>, était essentiellement *unique* (voir le Théorème 1.85 ci-dessous ou le RÉSUMÉ ci-dessus). Ce résultat fondamental d'Élie Cartan s'effectuait par la synthèse entre trois théories :

- (1) sa propre «méthode d'équivalence», qu'il appliquait aux variétés pseudo-riemanniennes ;
- (2) le calcul tensoriel, développé par Gregorio Ricci, Tullio Levi-Civita, Enrico Bompiani et autres représentants de l'école italienne ;
- (3) la géométrie projective complexe, considérablement approfondie à la fin du dix-neuvième siècle par l'école allemande.

La première, la «méthode d'équivalence», fut inventée et appliquée par Élie Cartan dans les années 1902–1910, peu après qu'il eut édifié la théorie des formes différentielles, au cours de ses recherches sur les groupes de Lie de dimension infinie. Grâce au langage des formes différentielles, Élie Cartan fut à même de résoudre un problème de classification laissé en chantier par son maître Sophus Lie, à savoir la classification de tous les groupes de Lie de dimension infinie qui agissent localement sur un espace complexe de dimension deux<sup>3</sup>. C'était là la première application imposante d'une méthode que le jeune Élie Cartan, alors Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lyon, ébauchait dès 1902 dans une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences ([Ca1902]).

<sup>1</sup>Sur les équations de la gravitation d'Einstein, J. Math. pures et appl. **1** (1922), 141–203.

<sup>2</sup>Die Grundlâge der allgemeinen Relativitätstheorie, Annalen der Physik **49** (1916), 769–822.

<sup>3</sup>Avec cette méthode, il retrouvait aussi les résultats de classification pour les groupes continus de dimension finie, publiés par Lie dans un mémoire de synthèse unanimement considéré comme fondateur historique de la théorie des «groupes de Lie» : S. LIE, *Theorie der transformationsgruppen*, Math. Ann. **16** (1880), 441–528.

Malheureusement, à cause de leur ampleur et de leur réelle complexité, les détails exacts de ces résultats de classification complète sont restés méconnus. Dans de nombreux autres mémoires, Élie Cartan applique la méthode d'équivalence à des problèmes géométriques variés : groupes infinis simples, déformation projective des surfaces, systèmes de Pfaff à cinq variables, transformations de contact, transformations de Bäcklund, *etc.* Malgré cette richesse, à l'époque moderne, seule une partie de ces travaux a été lue, comprise et assimilée en profondeur. À partir de la seconde moitié du vingtième siècle, le mouvement (post)bourbachique ayant orienté l'intérêt des jeunes générations de mathématiciens vers des thématiques émergentes, telles que la géométrie algébrique, l'étude globale des variétés, les systèmes dynamiques, *etc.*, la connaissance de l'héritage mathématique d'Élie Cartan – et notamment de la méthode d'équivalence – souffre de certaines lacunes en France.

Cette situation est regrettable, car l'approche d'Élie Cartan achève et parfait une profonde synthèse, illustration de l'unité indissoluble des mathématiques, entre deux points de vue : la théorie des objets géométrico-différentiels et la théorie des *groupes continus de transformation*, appelés aujourd'hui *groupes de Lie*. Toute l'œuvre d'Élie Cartan s'enracine dans la théorie des groupes continus de transformation<sup>4</sup>, qui fut fondée par Sophus Lie dans les années 1873–1880.

Au début des années 1920, Élie Cartan transférait la méthode d'équivalence à la théorie des espaces de Riemann, et ce faisant, il en tirait une application spectaculaire à la relativité générale : l'unicité du tenseur d'Einstein, ainsi que la décomposition du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel en trois composantes irréductibles. À nouveau, dans le mémoire [Ca1922] ainsi que dans d'autres mémoires rédigés à la même période, les détails techniques étaient complexes et difficiles d'accès. Hermann Weyl lui-même reconnaissait n'avoir pas saisi la totalité des raisonnements qui conduisaient Élie Cartan à établir l'unicité du tenseur d'Einstein.

En nous aidant de présentations modernisées de la méthode d'équivalence ([Ko1972], [St1983], [Ga1989], [OL1995]), nous nous proposons de reprendre et de développer les raisonnements elliptiques d'Élie Cartan, à partir d'une lecture directe du mémoire de 1922. Pour ce faire, nous devons faire preuve d'un effort de formulation conceptuelle et d'un effort de présentation pour rendre accessibles les démonstrations techniques. Ce faisant, nous serons conduits à réexprimer des résultats connus.

Avant de formuler précisément le théorème d'unicité du tenseur d'Einstein, présentons un bref aperçu historique du concept de courbure en géométrie riemannienne.

**1.1. Courbure de Gauss et variétés riemanniennes.** Dans une variété riemannienne locale de dimension  $n$ , identifiée à  $\mathbb{R}^n$  grâce à un système de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ , les rapports de distances infinitésimales sont fournis par un produit scalaire euclidien dont les coefficients dépendent du point où l'on se place. Plus

---

<sup>4</sup>«La plupart de mes travaux mathématiques gravitent autour de la théorie des groupes», [Ca1931], p. 1, première phrase du texte de synthèse écrit par Élie Cartan à l'occasion de sa réception à l'Académie des Sciences.

précisément, soit  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$  la base de champs de vecteurs naturellement associée à ce système de coordonnées et soit

$$(1.2) \quad dx := dx^1 \cdot \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + dx^n \cdot \frac{\partial}{\partial x^n},$$

un vecteur infinitésimal placé au point  $x$  de composantes  $(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$  relativement à la base  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ . Le carré  $ds^2$  de la norme de ce vecteur infinitésimal  $dx$  placé au point  $x$  est représenté par une forme quadratique définie positive en ses composantes infinitésimales :

$$(1.3) \quad ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j,$$

dont les coefficients variables  $g_{ij}(x)$  satisfont la symétrie  $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$ . Ces coefficients fondamentaux seront toujours supposés *analytiques réels* dans ce mémoire, c'est-à-dire localement développables en série entière. Cette hypothèse de régularité n'est ni optimale ni nécessaire pour la plupart de nos considérations, mais nous l'adopterons par souci de simplicité et parce qu'elle était implicitement admise dans les travaux d'Élie Cartan.

Comme le lecteur l'aura remarqué, nous n'avons pas adopté la convention d'Einstein dans l'écriture de (1.3) (lire aussi le §3.1 ci-dessous). Dans la suite, nous maintiendrons toujours les signes de sommation dans l'écriture de nos formules. La raison principale est la suivante : à partir de la Section 2, un paramètre  $\varepsilon_i = \pm 1$ , indexé par  $i = 1, \dots, n$ , entrera dans l'écriture de nos formes différentielles, lesquelles incorporeront aussi l'indice  $i$ , ainsi que d'autres indices  $j, k, \dots$  répétés, mais il n'y aura pas (la plupart du temps) de sommation sur cet indice  $i$ . Il deviendrait inélégant et pesant d'avoir à préciser au cas par cas si l'on doit sommer sur l'indice  $i$  répété. Par exemple, dans la formule (2.5) ci-dessous, où l'indice  $i$  de  $\varepsilon_i$  est répété, on doit sommer sur  $i$ , tandis que dans la formule (3.15) ci-dessous, où l'indice  $i$  de  $\varepsilon_i$  est aussi répété, on ne doit *pas* sommer sur  $i$ .

Ce n'est que dans cette Section 1 que nous pourrions adopter la convention d'Einstein. En effet, nous présentons des concepts classiques de calcul tensoriel pour lesquels cette convention a amplement fait ses preuves. Cependant, pour des raisons de cohérence globale, nous maintiendrons partout les signes de sommation. Ainsi, le lecteur qui a adopté ladite convention reconnaîtra simplement les formules habituelles de géométrie riemannienne, s'il fait l'émission des signes  $\Sigma$ . Du reste, ces signes ne tiennent pas une place considérable dans l'écriture des formules et ils ont la vertu de signaler directement à la lecture quels sont les indices sur lesquels on doit sommer, sans avoir à repérer préalablement la répétition de ces indices. Il est vrai que sur des formules relativement simples comme (1.3) ci-dessus ou encore (1.25) ci-dessous, le repérage des indices répétés se fait rapidement. Par contre, dans des formules comme (7.) incorporant huit répétitions d'indices qui n'ont pas de dénomination homogène simple (par exemple  $j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6, j_7, j_8$ ), le repérage des indices répétés demande un long travail de lecture. Dans un tel cas de figure, sur le plan pratique, le maintien des signes de sommation présente des avantages indéniables.

La *méthode du repère mobile*, introduite par Ribaucour, Frenet, Serret puis systématisée par Darboux à la fin du dix-neuvième siècle, consiste à attacher un système d'axes variables ou de vecteurs «mobiles» à tout objet géométrico-différentiel, afin d'en étudier les propriétés qui sont *invariantes par rapport à un groupe de transformations*, par exemple le groupe des déplacements euclidiens. Dans son œuvre, Élie

Cartan l'a poussée si loin qu'aujourd'hui encore, seule une partie de ses travaux a été relue, comprise et assimilée. Cette «méthode» en quelque sorte implicite dans les calculs de Gauss, permet d'étudier très progressivement (et sans éprouver l'impression de s'égarer dans des calculs interminables) la géométrie intrinsèque d'une surface «gaussienne», équipée d'une métrique de la forme :

$$(1.4) \quad ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2,$$

[en coordonnées  $(u, v)$  au lieu de  $(x^1, x^2)$ ], et notamment, de retrouver la célèbre expression de la courbure  $\kappa = \kappa(u, v)$  en un point de coordonnées  $(u, v)$ , en fonction des dérivées partielles des coefficients  $E, F$  et  $G$ , *i.e.* :

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \kappa = & \frac{1}{4(EG - F^2)^2} \left\{ E \left[ \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} + \left( \frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 \right] + \right. \\ & + F \left[ \frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + 4 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} \right] \\ & + G \left[ \frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + \left( \frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 \right] - \\ & \left. - 2(EG - F^2) \left[ \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Cette expression relativement complexe aura coûté tant d'années de recherches à Carl Friedrich Gauss qu'il baptisera<sup>5</sup> «*Theorema Egregium*» (théorème «remarquable», «extraordinaire») la conséquence qui en découle directement et qu'il avait en vue, à savoir que la courbure est préservée par toute application isométrique d'une surface sur une autre, et ce, grâce à un argument purement intrinsèque, qui se dispense de tout plongement de la surface dans l'espace<sup>6</sup>. En effet, grâce à cette formule qui affirme que la courbure est une expression algébrique explicite universelle en fonction des dérivées partielles (d'ordre au plus égal à deux) des coefficients de la métrique infinitésimale (1.4) dans les coordonnées internes  $(u, v)$ , il devient évident que si l'on a une transformation  $(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$  isométrique qui transforme le  $ds^2$  (1.4) en un  $d\bar{s}^2 = \bar{E} d\bar{u}^2 + 2\bar{F} d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G} d\bar{v}^2$  similaire, autrement dit, si l'on a  $\bar{E} = E, \bar{F} = F$  et  $\bar{G} = G$  [après remplacement de l'expression de  $(\bar{u}, \bar{v})$  en fonction de  $(u, v)$ ], alors on a aussi pour les dérivées partielles  $\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial E}{\partial v}, \text{etc.}$ , d'où il découle immédiatement que  $\bar{\kappa} = \kappa$  : la courbure  $\bar{\kappa}$  au point de coordonnées  $(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$  coïncide avec la courbure au point repéré par les coordonnées  $(u, v)$ .

**1.6. Coefficients de courbure riemannienne.** En 1854, Bernhard Riemann propose trois sujets possibles à l'université de Göttingen pour passer sa thèse d'habilitation. C.F. Gauss, président du jury, âgé de 77 ans et riche de plusieurs décennies

<sup>5</sup>Dans [Me2004], nous proposons d'appeler «*formula egregia*» la formule (1.5).

<sup>6</sup>C.F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Comment. soc. Gött. **6** (1828), 99–146.

de méditations solitaires sur les géométries non-euclidiennes, choisit de mettre Riemann à l'épreuve sur l'une des trois propositions, intitulée *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* [*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*]. Or, c'était le moins mûr et le moins préparé des trois sujets que Riemann avait proposés. Après six semaines de réflexion et de rédaction, Riemann présente oralement son *habilitationsvortrag* devant un public d'universitaires non mathématiciens, en évitant soigneusement de présenter des calculs et de rentrer dans des considérations techniques.

Dans ce texte court publié à titre posthume en 1868 et qui révolutionna la géométrie, Riemann pose *ab initio* le problème de la nature des notions topologiques, des notions géométriques et des notions métriques de base grâce auxquelles on peut concevoir mathématiquement l'espace, sans entacher cette «Idée problématique» d'hypothèses implicites. En particulier, il propose de généraliser aux espaces à  $n$  dimension la notion de produit scalaire infinitésimal via la définition (1.3), qui généralise la définition (1.4) que Gauss avait prise pour fondement de l'étude intrinsèque des surfaces plongées dans l'espace tridimensionnel. Se posait alors la question de généraliser la notion de courbure en dimension  $n \geq 3$  et d'obtenir un analogue de la *formula egregia* (1.5). Pour cela, une stratégie d'économie aurait alors été la bienvenue, puisque les calculs de Gauss étaient déjà considérables en dimension  $n = 2$ .

Or Riemann savait que la courbure de Gauss s'exprime de manière particulièrement simple dans un système de coordonnées dites «géodésiques». Dans un tel système, le  $ds^2$  se réduit à la forme normalisée  $ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2$ . Ici,  $u$  représente le rayon géodésique issu de l'origine et  $v$  représente l'angle que fait ce rayon à l'origine avec une géodésique fixe. Ainsi, on a  $G(u, 0) = G(u, 2\pi)$ , et il faut considérer qu'une telle métrique est une déformation de la métrique euclidienne  $dr^2 + r^2 d\theta^2$ , écrite en coordonnées polaires. Avant d'obtenir la *formula egregia* (1.5), Gauss avait démontré en 1822 l'existence de systèmes de coordonnées géodésiques pour toute surface plongée dans l'espace et il en déduisit la même année une expression intrinsèque pour la courbure. Évidemment, nous pouvons retrouver cette expression en appliquant la formule (1.5), que Gauss n'obtint que cinq années plus tard, en 1827, ce qui donne :

$$(1.7) \quad \kappa = \frac{1}{4G^2} \left\{ \left( \frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 - 2G \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right\} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

De plus, Riemann savait que dans un système de coordonnées géodésiques, la courbure des surfaces apparaît dans le développement limité du coefficient  $G(u, v)$  du  $ds^2$  au voisinage de l'origine. En effet, après une normalisation élémentaire de la métrique à l'origine qui assure que  $\sqrt{G(0, v)} = 0$  et que  $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}(0, v) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}(u, v) = 1$ , on démontre ([Sp1970], Chapter 3B, Addendum) que

$$(1.8) \quad \sqrt{G}(u, v) = u - \frac{1}{6} \kappa(0)u^3 + o(u^3),$$

où  $\kappa(0)$  est la courbure de la surface à l'origine.

Dans des travaux manuscrits non publiés – difficiles à dater –, en partant de (1.7), Riemann généralise donc la notion de courbure aux variétés de dimension  $n \geq 2$  munies d'un  $ds^2$  général de la forme (1.3). Il se place dans un système de coordonnées appelé depuis «*coordonnées normales de Riemann*», qui généralise le système de coordonnées géodésiques à la dimension quelconque  $n \geq 2$ . Dans un tel système de coordonnées, on a  $g_{ij}(0) = \delta_j^i$  et  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0$ , pour tous  $i, j, k = 1, \dots, n$  (voir [Sp1970], Chapter 4B). En effectuant un développement limité des coefficients  $g_{ij}(x)$  à l'origine, on peut écrire :

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} ds^2(x) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j \\ = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^n \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(0) x^k x^l dx^i dx^j + o(|x|^2). \end{array} \right.$$

Ensuite, grâce à un calcul algébrique – passé sous silence –, Riemann affirme qu'il existe des nombres  $A_{ijkl}$  tels que l'on peut réécrire le précédent développement limité sous la forme :

$$(1.10) \quad ds^2(x) = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - \frac{1}{6} \sum_{i,j,k,l=1}^n A_{ijkl} (x^k dx^i - x^i dx^k) (x^l dx^j - x^j dx^l) + o(|x|^2).$$

Dans ce mémoire de 1854, on ne trouve pas de formule mathématique explicite, mais on remarque une phrase qui décrit «en langue naturelle» le contenu de la formule (1.10), et ce de manière très précise.

Sept années plus tard, en 1861, Riemann soumet à l'Académie des Sciences de Paris un mémoire intitulé *Commentatio mathematica qua respondere tentatur quaestioni ab illustrissima Academia Parisiensi propositae*<sup>7</sup>. Dans ce mémoire qui traite de l'équation de la chaleur, Riemann démontre rigoureusement que l'annulation des coefficients  $A_{ijkl}$  est la condition nécessaire et suffisante pour que la variété riemannienne  $(M, ds^2)$  soit localement isométrique à l'espace  $\mathbb{R}^n$ , muni de la métrique euclidienne standard. Ce résultat généralisait le théorème de Gauss sur les surfaces de courbures nulles. Cet extrait du mémoire de 1861 est traduit en anglais et commenté par M. Spivak dans le Chapitre 4B de [Sp1970].

En 1869, peu de temps après la publication posthume de l'*habilitationsvortrag* de 1854, le disciple de Riemann Erwin Bruno Christoffel entreprend le premier travail de classification des variétés riemanniennes à isométrie près (cf. [Bo1993]). Supposons donnée une isométrie  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  entre deux variétés riemanniennes  $(M, ds^2)$  et  $(\bar{M}, d\bar{s}^2)$ , c'est-à-dire une application qui transforme une métrique  $ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j$  en une autre métrique  $d\bar{s}^2 = \sum_{i,j=1}^n \bar{g}_{ij}(\bar{x}) d\bar{x}^i d\bar{x}^j$ . Pour isoler les dérivées secondes des composantes d'une telle isométrie, pour exprimer les composantes de courbure riemannienne et pour calculer ce qu'on appelle

<sup>7</sup>Ce travail, publié à titre posthume, fait partie de la liste des mémoires qui n'ont pas été traduits en français dans [Ri1898].

(depuis l'article [LR1901] de Ricci et Levi-Civita) les *dérivées covariantes* du tenseur de Riemann, Christoffel choisit d'introduire la notation :

$$(1.11) \quad \left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} := \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n g^{pk} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{pj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{pi} - \frac{\partial}{\partial x^p} g_{ij} \right),$$

où  $(g^{ij})$  désigne la matrice inverse de la matrice  $(g_{ij})$ . On appelle maintenant ces expressions *coefficients de Christoffel* de la *connexion de Levi-Civita* de la variété riemannienne  $(M, ds^2)$ . Cette notation permit à Christoffel de contracter substantiellement l'expression du tenseur de courbure de Riemann. En effet, il obtint l'expression compacte suivante pour les  $A_{ijkl}$  que Riemann avait introduits dans (1.10) :

$$(1.12) \quad A_{ijkl} = \sum_{p=1}^n g_{pl} A_{ijk}^p,$$

où

$$(1.13) \quad A_{ijk}^l := \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} l \\ i k \end{matrix} \right\}}{\partial x^j} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} l \\ j k \end{matrix} \right\}}{\partial x^i} + \sum_{p=1}^n \left( \left\{ \begin{matrix} p \\ i k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l \\ j p \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} p \\ j k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l \\ i p \end{matrix} \right\} \right).$$

En vérité, si l'on insérait les coefficients de Christoffel (1.11) dans ces formules (1.13), on obtiendrait une expression nettement plus complexe qui généraliserait pleinement la *formula egregia* (1.5) au cas de  $n \geq 2$  variables (voir (1.28) ci-dessous).

Grâce à une telle expression des composantes de la courbure, Christoffel établit alors qu'une isométrie  $x \mapsto \bar{x}(x)$  induit la loi de transformation

$$(1.14) \quad \sum_{l=1}^n A_{ijk}^l \frac{\partial \bar{x}^\delta}{\partial x^l} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^n \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^k} \bar{A}_{\alpha, \beta, \gamma}^\delta$$

entre les composantes de la courbure. Plus encore, en introduisant certaines *dérivées modifiées* des composantes de la courbure, Christoffel exprima une famille infinie de conditions nécessaires pour l'existence d'une isométrie entre deux variétés riemanniennes locales. Il démontra aussi que ces conditions sont suffisantes, avec des raisonnements incomplets qui ne s'appliquent en vérité que lorsque le groupe de Lie local des isométries de  $(M, ds^2)$  est de dimension zéro. Pour des groupes de dimension quelconque, ce problème fut définitivement résolu par Élie Cartan dans les années 1920, grâce à une stratégie qui fait la synthèse entre deux notions : formes différentielles, et groupes de Lie.

Ce rappel historique achevé, afin d'être en mesure d'exprimer rigoureusement le théorème d'unicité du tenseur d'Einstein dû à Élie Cartan, effectuons maintenant une brève présentation des concepts de géométrie différentielle riemannienne qui sont à la base des équations de la gravitation d'Einstein, tels qu'ils sont exposés dans la plupart des manuels contemporains.



**1.15. Connexion de Levi-Civita.** Nous renvoyons le lecteur à [DC1992], [We1972] ainsi qu'à d'autres références pour une présentation plus complète du formalisme.

Classiquement, une variété riemannienne  $M$  est canoniquement équipée d'une connexion  $\nabla$ , dite de *Levi-Civita*. C'est l'unique connexion de torsion nulle sur  $M$  qui soit compatible avec la métrique. Rappelons pour commencer les définitions de ces termes.

Tout d'abord, une *connexion affine* (au sens de Koszul) est un opérateur intrinsèque de dérivation d'un champ de vecteur le long d'un autre champ de vecteur. Pour être plus précis, désignons par  $\mathcal{X}(M)$  l'ensemble des champs de vecteurs sur  $M$  : c'est un module sur l'algèbre  $\mathcal{C}^\omega(M)$  des fonctions analytiques réelles sur  $M$ , *i.e.* on peut additionner les champs de vecteurs et les multiplier par des fonctions  $f \in \mathcal{C}^\omega(M)$ , avec des règles d'associativité et de distributivité évidentes. Une *connexion affine*  $\nabla$  est une application qui à un couple de champs de vecteurs  $(X, Y) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$  associe un champ de vecteurs  $\nabla_X(Y) \in \mathcal{X}(M)$ , le «dérivé de  $Y$  le long de  $X$ ». Cette opération satisfait les propriétés suivantes :

- (c1) linéarité par rapport à chacun des deux champs :  $\nabla_{X_1+X_2}(Y) = \nabla_{X_1}(Y) + \nabla_{X_2}(Y)$  et  $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X(Y_1) + \nabla_X(Y_2)$  ;
- (c2) linéarité pour la multiplication (par une fonction  $f \in \mathcal{C}^\omega(M)$ ) du champ *le long duquel* on dérive :  $\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X(Y)$  ;
- (c3) *règle de Leibniz* pour la multiplication (par une fonction  $f \in \mathcal{C}^\omega(M)$ ) du champ *que* l'on dérive :  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f) \cdot Y$  ; ici,  $X(f)$  est la fonction obtenue en appliquant le champ  $X$  – vu comme dérivation – à  $f$ .

La connexion est dite *de torsion nulle* si pour tout couple de champs de vecteurs  $(X, Y) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ , on a

$$(1.16) \quad \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X, Y],$$

où  $[X, Y]$  désigne le *crochet de Lie* de  $X$  avec  $Y$ . Cette terminologie «torsion» s'explique dans la théorie des connexions affines développées par Élie Cartan à partir du concept de repère mobile, mais nous n'entrerons pas dans les détails.

Appliquons maintenant le principe d'après lequel tous les objets de la géométrie différentielle qui possèdent une définition indépendante du choix de coordonnées locales doivent aussi être saisis en coordonnées locales, sous une forme explicite et concrète. Soient donc  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  des coordonnées locales, soient  $X_1 := \frac{\partial}{\partial x^1}, X_2 := \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, X_n := \frac{\partial}{\partial x^n}$  les  $n$  champs de vecteurs «naturels» associés, qui forment un repère mobile. Grâce aux règles (c1), (c2) et (c3) ci-dessus, en décomposant les champs  $X$  et  $Y$  sous la forme  $X = \sum_{i=1}^n a^i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $Y = \sum_{i=1}^n b^i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$ , on vérifie aisément que la connaissance de l'expression  $\nabla_X(Y)$  se ramène à la connaissance des  $n^2$  champs de vecteurs  $\nabla_{X_i}(X_j)$ , que l'on peut décomposer le long de la base des  $X_k$  sous la forme

$$(1.17) \quad \nabla_{X_i}(X_j) =: \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^k},$$

en introduisant des fonctions  $\Gamma_{ij}^k(x)$  qui sont appelées *coefficients de Christoffel* de la connexion. Jusqu'au milieu du vingtième siècle, une connexion était habituellement définie dans les ouvrages classiques par la donnée d'une collection de  $n^3$  fonctions  $\Gamma_{ij}^k(x)$  qui se transforment de la manière suivante à travers un changement de coordonnées  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  :

$$(1.18) \quad \bar{\Gamma}_{ij}^k = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \sum_{k_1=1}^n \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^j} \Gamma_{i_1 j_1}^{k_1} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}.$$

C'est encore cette «ancienne» définition qui est choisie dans certains ouvrages de physique mathématique, comme par exemple dans [HT1990], p. 53. Bien entendu, on peut déduire cette formule de transformation de la définition «abstraite» (*i.e.* présentée *sans* en référer à un système de coordonnées locales) de connexion donnée ci-dessus, en utilisant le fait que les champs  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  se transforment en  $\sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}$ , et en utilisant la règle de Leibniz (c3).

La règle de transformation (1.18) n'est pas de caractère tensoriel, puisque les dérivées secondes du changement de coordonnées interviennent dans le deuxième terme du membre de droite. Néanmoins, cette règle possède un caractère précis et une structure bien définie qui leur confèrent un statut indépendant du système de coordonnées.

Toute connexion affine définit de manière unique un *transport parallèle* le long des courbes tracées dans  $M$ , et ce transport parallèle permet de «connecter» les espaces tangents entre eux d'une manière intrinsèque, indépendante du choix de coordonnées locales. Mais il faut insister sur le fait que ce lien entre les espaces tangents dépend non seulement de la connexion choisie mais aussi de la courbe le long de laquelle on déplace parallèlement un vecteur tangent. Plus précisément, pour toute courbe analytique réelle  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  et tout vecteur  $Y_0$  tangent à  $M$  au point  $\gamma(0)$ , il existe une unique famille à un paramètre  $t \in [0, 1]$  de vecteurs  $Y(t)$  tangents à  $M$  au point  $\gamma(t)$  tels que  $Y(0) = Y_0$  et tels que la dérivée de  $Y(t)$  le long du vecteur tangent  $\frac{d\gamma(t)}{dt}$  s'annule identiquement, *i.e.*

$$(1.19) \quad \nabla_{\frac{d\gamma(t)}{dt}}(Y(t)) \equiv 0.$$

En explicitant ces équations différentielles dans des coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  avec le repère mobile  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ , on obtient un système de  $n$  équations différentielles ordinaires du premier ordre :

$$(1.20) \quad 0 = \frac{\partial b^k}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k b^j \frac{\partial b^i}{\partial t}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ce système porte sur les coefficients  $b^i(t)$  des vecteurs  $Y(t) = \sum_{i=1}^n b^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$  pour  $t \in [0, 1]$ , avec la condition initiale  $b^i(0) = b_0^i$ , si l'on a écrit le champ  $Y_0 = \sum_{i=1}^n b_0^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(0)}$  au point  $\gamma(0)$ . Grâce aux propriétés connues des solutions de tels systèmes d'équations différentielles, on déduit que l'application qui à  $Y_0 = Y(0)$  associe le vecteur tangent final  $Y(1)$  est un *isomorphisme linéaire* entre  $T_{\gamma(0)}M$  et  $T_{\gamma(1)}M$  : c'est l'application que l'on appelle *transport parallèle* associé à la connexion le long de la  $\gamma$ .

Soit maintenant  $(M, ds^2)$  une variété riemannienne qui est aussi équipée d'une connexion  $\nabla$ . Plus généralement, si le produit scalaire  $\langle Y_1, Y_2 \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p) a_1^i a_2^j$  entre vecteurs tangents  $Y_1 = \sum_{i=1}^n a_1^i X_i$  et  $Y_2 = \sum_{i=1}^n a_2^i X_i$  en un point  $p \in M$  est seulement non-dégénéré, mais pas forcément défini positif, on dira que  $(M, ds^2)$  est une variété *pseudo-riemannienne*. Tel est le cas, par exemple, dans l'espace de Minkowski équipé de la métrique  $-(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2$ .

La connexion  $\nabla$  est dite *compatible avec la métrique* si, pour tout point  $p \in M$ , pour toute courbe analytique réelle  $\gamma := [0, 1] \rightarrow M$  telle que  $\gamma(0) = p$  et pour tout couple de vecteurs  $Y_0^1$  et  $Y_0^2$  tangents à  $M$  en  $p$ , le produit scalaire entre  $Y_0^1$  et  $Y_0^2$  au point  $\gamma(0)$  possède la même valeur numérique que le produit scalaire entre les deux vecteurs  $Y_1^1$  et  $Y_1^2$  transportés parallèlement le long de  $\gamma$  jusqu'au point  $\gamma(1)$ . Autrement dit, le produit scalaire est invariant par transport parallèle.

En 1917, Levi-Civita a démontré qu'étant donné une variété riemannienne, il existe une unique connexion de torsion nulle qui est compatible avec la métrique. L'énoncé s'étend sans modification aux variétés pseudo-riemanniennes. En analysant ces deux conditions, on vérifie que les coefficients fondamentaux de cette unique connexion possèdent une expression explicite en fonction des dérivées partielles d'ordre 1 de la métrique :

$$(1.21) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n g^{pk} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{pj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{pi} - \frac{\partial}{\partial x^p} g_{ij} \right).$$

Ici,  $(g^{ij})$  désigne la matrice inverse de la matrice  $(g_{ij})$ . La nullité de la torsion équivaut alors à la propriété de symétrie indicielle  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ . Ces coefficients  $\Gamma_{ij}^k$  coïncident avec les coefficients que Christoffel notait  $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ i \ j \end{smallmatrix} \right\}$ . Historiquement, le point de vue de Levi-Civita eut une importance cruciale, puisqu'il apportait (enfin) une mise en forme géométrique des calculs de courbure dus à Riemann et à Christoffel.

Montrons maintenant comment les coefficients de Christoffel d'une connexion linéaire peuvent servir à différencier des objets géométriques plus généraux que les champs de vecteurs : les tenseurs.

**1.22. Tenseurs, calcul tensoriel, dérivées covariantes des tenseurs.** Résumons d'abord quelques éléments de calcul tensoriel classique. Un tenseur  $p$  fois *contravariant* et  $q$  fois *contravariant* consiste en la donnée de  $n^p n^q$  fonctions  $\Lambda_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  qui dépendent analytiquement de  $x$ , dans le système initial de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ , et qui se transforment comme suit. Pour tout changement de coordonnées  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ , ces quantités se transforment en des quantités  $\bar{\Lambda}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  qui sont reliées aux  $\Lambda_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  d'une manière linéaire, avec des coefficients qui ne dépendent que de la matrice jacobienne  $(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j})$  :

$$(1.23) \quad \bar{\Lambda}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \sum_{i'_1, \dots, i'_p=1}^n \sum_{j'_1, \dots, j'_q=1}^n \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \cdot \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} \Lambda_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p}.$$

Dans cette transformation jacobienne généralisée, notons que les indices supérieurs se comportent comme dans la formule  $d\bar{x}^i = \sum_{i'=1}^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^{i'}} \cdot dx^{i'}$  pour les différentielles, et que les indices inférieurs se comportent comme dans la formule  $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \sum_{i'=1}^n \frac{\partial x^{i'}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$  pour les champs de vecteurs.

La première opération, appelée *contraction des indices*, consiste à sommer sur des indices sélectionnés à l'avance. Par exemple, voici deux contractions possibles d'un tenseur  $\Lambda_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_3}$  : on sélectionne  $i_1$  en haut et  $j_2$  en bas et on définit  $\Psi_{j_1}^{i_2 i_3} := \sum_{p=1}^n \Lambda_{j_1 p}^{p i_2 i_3}$  ; autre possibilité, on sélectionne  $(i_1, i_3)$  en haut et  $(j_1, j_2)$  en bas et on définit  $\Phi^{i_2} := \sum_{p, q=1}^n \Lambda_{p q}^{p i_2 q}$ . En général, soit  $\Lambda_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  un tenseur quelconque et soit  $r$  un entier positif tel que  $r \leq p$  et  $r \leq q$ . Dans les indices inférieurs et dans les indices supérieurs du tenseur  $\Lambda_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ , choisissons  $r$  indices et sommons sur ces indices. Le résultat fournit une quantité à  $(p - r)$  indices supérieurs et à  $(q - r)$  indices inférieurs. En effectuant les mêmes choix d'indices dans (1.23) et en observant que  $\sum_{p=1}^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} = \delta_j^i$ , on vérifie que le résultat obtenu est effectivement un tenseur.

La seconde opération est une différentiation «absolue», *i.e.* indépendante du système de coordonnées. En utilisant les coefficients de Christoffel d'une connexion linéaire quelconque  $\nabla$ , il est possible de définir des dérivées directionnelles d'un tenseur, qu'on appellera *dérivées covariantes*. Ces dérivées doivent fournir un résultat indépendant du système de coordonnées pour qu'il puisse être question d'un «calcul différentiel absolu», au sens de Ricci et de Levi-Civita. Par exemple, si  $\Lambda^i$  est un tenseur une fois contravariant, sa  $k$ -ième dérivée covariante sera définie par :

$$(1.24) \quad \nabla_k (\Lambda^i) := \frac{\partial}{\partial x^k} \Lambda^i + \sum_{l=1}^n \Gamma_{kl}^i \Lambda^l.$$

Par un calcul qui utilise la loi de transformation (1.18) des coefficients de Christoffel de la connexion  $\nabla$ , on peut vérifier que  $\nabla_k (\Lambda^i)$  est effectivement un tenseur qui comporte un indice inférieur supplémentaire et qui jouit de la loi de transformation (1.23), avec  $p = q = 1$ . Second exemple : la  $k$ -ième dérivée covariante d'un tenseur  $\Lambda_j^i$  une fois contravariant et une fois covariant sera définie par

$$(1.25) \quad \nabla_k (\Lambda_j^i) := \frac{\partial}{\partial x^k} \Lambda_j^i - \sum_{l=1}^n \Gamma_{kj}^l \Lambda_l^i + \sum_{l=1}^n \Gamma_{kl}^i \Lambda_j^l.$$

Notons l'apparence du signe «-». À nouveau, on peut vérifier en utilisant la loi de transformation (1.18) que la dérivée covariante  $\nabla_k (\Lambda_j^i)$  ainsi définie constitue un tenseur à trois indices, une fois contravariant et deux fois covariant. D'une manière générale, définissons enfin la  $k$ -ième dérivée covariante d'un tenseur  $p$  fois



Le tenseur métrique deux fois covariant  $g_{ij}$  et son inverse  $g^{ij}$  qui est deux fois contravariant peuvent servir à élever et à baisser les indices d'un tenseur donné  $\Lambda_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ . Prenons par exemple un tenseur  $\Lambda_j$  une fois covariant. On vérifie aisément que le tenseur  $\Lambda^i := \sum_p g^{pi} \Lambda_p$  est une fois contravariant, et l'on a les formules inverses  $\Lambda_j = \sum_p g_{pj} \Lambda^p$ . Prenons maintenant un tenseur une fois covariant et une fois contravariant  $\Lambda_j^i$ . On vérifie que  $\sum_p g_{pi} \Lambda_j^p$  définit un tenseur deux fois covariants en termes des indices  $i$  et  $j$ . Mais comment écrire ce tenseur :  $\Lambda_{ij}$  ou  $\Lambda_{ji}$ ? Faut-il mettre  $i$  ou  $j$  à la première place? Par construction, c'est l'indice supérieur  $i$  que nous avons abaissé dans  $\Lambda_j^i$ . Convenons provisoirement d'écrire  $\Lambda_{ij}$ . Pour retrouver le tenseur initial  $\Lambda_j^i$  par une formule inverse, il faut écrire  $\sum_p g^{pi} \Lambda_{pj}$  et non pas  $\sum_p g^{pj} \Lambda_{pi}$ , parce que c'était le premier indice de  $\Lambda_{ij}$  qui avait été abaissé et non pas le second. En définitive, puisque la notation  $\Lambda_j^i$  devient ambiguë lorsque l'on élève et abaisse les indices, *il est nécessaire de préciser l'ordre d'apparition des indices colonne par colonne*. Ainsi, nous écrirons  $\Lambda_j^i$  (ou bien  $\Lambda_j^i$  : il faut faire un choix définitif au départ, mais tous les choix sont équivalents) en affectant chaque indice à une colonne, afin de conserver le numéro de colonne des indices que l'on élève ou que l'on abaisse. Dans la notation  $\Lambda_{ij}$ , deux colonnes étant déjà clairement délimitées, on pourra déduire que  $\Lambda_{ij} = \sum_p g_{pi} \Lambda_j^p$  s'obtient à partir de  $\Lambda_j^i$  par abaissement du premier indice  $i$ . Par la même occasion, le tenseur  $\Lambda_j^i := \sum_p g^{pi} \Lambda_{jp}$ , obtenu par élévation du second indice de  $\Lambda_{ji}$  sera clairement distingué de  $\Lambda_j^i = \sum_p g^{pi} \Lambda_{pj}$ . Cette distinction, invisible dans la notation  $\Lambda_j^i$ , est absolument nécessaire, puisque les deux tenseurs  $\Lambda_j^i$  et  $\Lambda_j^i$  (évidemment égaux dans le cas spécial où le tenseur  $\Lambda_{jp} = \Lambda_{pj}$  est symétrique) peuvent être réellement différents, comme on s'en convaincrait sur un exemple.

Pour terminer, mentionnons que la version mixte du tenseur de courbure  $g_j^i := \sum_p g_{pj} g^{pi} = \delta_j^i$  coïncide avec le symbole de Kronecker et que dans ce cas, il est inutile de préciser les colonnes dans la notation des indices.

**1.32. Composantes du tenseur de courbure et ses symétries.** Grâce à la notion de connexion présentée ci-dessus, on peut introduire maintenant le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. La *courbure* d'une variété riemannienne  $M$  est une correspondance qui associe à toute paire de champs de vecteurs  $(X, Y)$  sur  $M$  une application  $A(X, Y)$  définie sur l'ensemble des champs de vecteurs et à valeurs dans l'ensemble des champs de vecteurs. Elle est définie par

$$(1.33) \quad A(X, Y)Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

où  $Z$  est un champ de vecteurs sur  $M$  et où  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita sur  $M$ . Grâce aux propriétés **(c1)**, **(c2)** et **(c3)** caractéristiques d'une connexion et grâce à la nullité de la torsion (1.16), on vérifie que l'application  $(X, Y, Z) \mapsto A(X, Y)Z$  est trilinéaire. De plus, la trilinearité est aussi satisfaite en multipliant les champs

de vecteurs par des fonctions analytiques arbitraires  $f_1, f_2 \in C^\omega(M)$  :

$$(1.34) \quad \begin{cases} A(f_1 X_1 + f_2 X_2, Y) Z = f_1 A(X_1, Y) Z + f_2 A(X_2, Y) Z, \\ A(X, f_1 Y_1 + f_2 Y_2) Z = f_1 A(X, Y_1) Z + f_2 A(X, Y_2) Z, \\ A(X, Y) [f_1 Z_1 + f_2 Z_2] = f_1 A(X, Y) Z_1 + f_2 A(X, Y) Z_2. \end{cases}$$

Grâce à ces propriétés de linéarité, la courbure est uniquement déterminée par la collection de champs de vecteurs  $A(X_i, X_j)X_k$ , où  $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ . En décomposant  $A(X_i, X_j)X_k$  selon la base des  $X_i$ , on introduit des coefficients  $A_{ijk}{}^l$  tels que

$$(1.35) \quad A(X_i, X_j)X_k =: \sum_{l=1}^n A_{ijk}{}^l X_l.$$

Comme nous l'avons argumenté après le Lemme 1.30, il est nécessaire d'affecter une fois pour toutes une colonne à chacun des quatre indices  $(i, j, k, l)$ . Tous les choix sont équivalents, pourvu que l'on respecte rigoureusement le choix effectué au départ. Ici, nous choisissons d'écrire  $A_{ijk}{}^l$ , car les trois champs de vecteurs  $X_i, X_j$  et  $X_k$  apparaissent à la suite dans la définition (1.35). Dans [Ch1963], l'auteur utilise la notation  $A_k{}^l{}_{ij}$ .

En utilisant l'expression (1.17) de la dérivée covariante en l'insérant dans la définition (1.33) (bien entendu, le terme  $\nabla_{[X_i, X_j]} X_k$  s'annule, puisque l'on a trivialement :  $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$ ), on obtient :

$$(1.36) \quad A_{ijk}{}^l = \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^l + \sum_{p=1}^n \left( \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l - \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l \right).$$

C'est l'expression des  $n^4$  composantes du tenseur de courbure. On dit en effet que la collection de ces composantes  $A_{ijk}{}^l$  est un *tenseur* parce qu'elle se transforme de la manière suivante à travers un changement de coordonnées  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  :

$$(1.37) \quad \bar{A}_{ijk}{}^l = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \sum_{k_1=1}^n \sum_{l_1=1}^n \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^{l_1}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial \bar{x}^k} A_{i_1 j_1 k_1}{}^{l_1}.$$

*Seul le comportement infinitésimal tangentiel d'ordre 1 d'un changement de coordonnées influe sur les composantes d'un tenseur.*

Après un calcul dont nous ne reproduisons pas les étapes intermédiaires ici, nous obtenons une expression massive qu'il faut prendre comme telle, puisque nous analysons ses caractères immédiatement après :

$$(1.38) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{ijk}{}^l &= \frac{1}{2} \sum_{m,p,q=1}^n g^{qm} g^{pl} \left( \frac{\partial g_{qp}}{\partial x^j} \left[ \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right] \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{m,p,q=1}^n g^{qm} g^{pl} \left( \frac{\partial g_{qp}}{\partial x^i} \left[ \frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right] \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{ml} \left( \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{jm}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^m} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{m,p,q=1}^n g^{pm} g^{ql} \left( \left[ \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^p} \right] \left[ \frac{\partial g_{qm}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{qj}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^q} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{pj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^p} \right] \left[ \frac{\partial g_{qm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{qi}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^q} \right] \right). \end{aligned} \right.$$

Voici l'analyse de cette formule.

- Formula egregia :  $A_{121}{}^2$  ou  $A_{1212}$  ?
- Formule plus courte pour  $A_{ijk}{}^l$  ?

- (1) Dans le cas  $n = 2$ , il n'y a essentiellement qu'une seule composante de courbure  $A_{121}{}^2$ , car les  $A_{ijk}{}^l$  possèdent de fortes propriétés de symétrie (cf. (1.??) ci-dessous), et alors la formule (1.38) pour  $A_{121}{}^1$  coïncide avec la *formula egregia* (1.5) de Gauss. [Check].
- (2) Les  $A_{ijk}{}^l$  sont donnés par une *expression explicite universelle, fonction algébrique des dérivées partielles d'ordre 2, 1 et 0 des coefficients métriques  $g_{ij}(x)$  par rapport aux variables  $x^k$* . En effet, grâce aux formules de Cramer, les éléments de la matrice inverse  $(g^{ij})$  s'expriment en fonction des  $g_{kl}$ . Cette expression est universelle en ce sens qu'elle ne dépend ni de la métrique, ni du système de coordonnées : pour une autre métrique riemannienne quelconque  $d\bar{s}^2 = \sum_{i,j=1}^n \bar{g}_{ij}(\bar{x}) d\bar{x}^i d\bar{x}^j$ , les coefficients de courbure  $\bar{A}_{ijk}{}^l$  s'expriment par la même formule rationnelle, en fonction des dérivées partielles d'ordre 2, 1 et 0 des  $\bar{g}_{ij}(\bar{x})$  par rapport aux  $\bar{x}^k$ . Nous pouvons donc abrégier l'écriture de cette formule sous la forme :

$$(1.39) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{ijk}{}^l(x) &= \mathcal{A}_{ijk}{}^l \left( g_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right) \\ &= \mathcal{A}_{ijk}{}^l (J_x^2 g_{\alpha\beta}(x)), \end{aligned} \right.$$

en désignant par  $J_x^2 g_{\alpha\beta}$  le *jet d'ordre 2* de  $g_{\alpha\beta}$ , c'est-à-dire la collection de ses dérivées partielles d'ordre 2, 1 et 0. Dans cette écriture, nous sous-entendons que les indices  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  varient entre 1 et  $n$ . La fonction en question sera notée  $\mathcal{A}_{ijk}{}^l$ . Ainsi,  $\bar{A}_{ijk}{}^l(\bar{x}) = \mathcal{A}_{ijk}{}^l (J_{\bar{x}}^2 \bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{x}))$ .



(3) Les coefficients de courbure  $A_{ijk}{}^l$  s'expriment linéairement en fonction des dérivées partielles d'ordre deux des  $g_{\alpha\beta}$ . Autrement dit, la fonction  $A_{ijk}{}^l$  de (1.39) est linéaire par rapport à ses derniers arguments. Cette propriété est évidente dans (1.38).

Les composantes  $A_{ijk}{}^l$  satisfont les relations de symétrie suivantes :

$$(1.40) \quad \begin{cases} 0 = A_{ijk}{}^l + A_{kij}{}^l + A_{jki}{}^l, \\ 0 = A_{ijk}{}^l + A_{jik}{}^l. \end{cases}$$

Introduisons maintenant les composantes «totalelement covariantes» du tenseur de courbure, qui sont définies par :

$$(1.41) \quad A_{ijkl} := \sum_p g_{pl} A_{ijk}{}^p.$$

On dit que ces composantes sont *totalelement covariantes* parce qu'elles se transforment de la manière suivante à travers un changement de coordonnées  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  :

$$(1.42) \quad \bar{A}_{ijkl} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \sum_{k_1=1}^n \sum_{l_1=1}^n \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x^l} A_{i_1 j_1 k_1 l_1}.$$

On démontre ([DC1992], Chapter 4) que ces nouveaux coefficients  $A_{ijkl}$  satisfont les quatre relations de symétrie indicielle suivantes :

$$(1.43) \quad \begin{cases} 0 = A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl}, \\ 0 = A_{ijkl} + A_{jikl}, \\ 0 = A_{ijkl} + A_{ijlk}, \\ 0 = A_{ijkl} - A_{klij}, \end{cases}$$

la quatrième étant conséquence subtile des trois premières. À cause de ces relations de symétries, il n'existe en réalité que  $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$  composantes  $A_{ijkl}$  linéairement indépendantes (*voir* le §3.?? ci-dessous pour une démonstration complète). Enfin, les  $A_{ijk}{}^l$  initiaux qui satisfont les deux relations de symétrie (1.40) *ne satisfont pas de relations de symétrie qui seraient analogues aux deux dernières de la liste* (1.43).

**1.44. Identités de Bianchi.** Rappelons que  $X_m = \frac{\partial}{\partial x^m}$  et notons  $\nabla_m := \nabla_{X_m}$  l'opérateur de dérivée covariante le long du champ de vecteurs  $X_m$ . D'après le calcul différentiel absolu de Ricci et Levi-Civita (§1.22 ci-dessus), cet opérateur se prolonge comme un *opérateur de différentiation covariante* agissant sur le tenseur de courbure  $A_{ijk}{}^l$  de la manière suivante :

$$(1.45) \quad \nabla_m A_{ijk}{}^l := \frac{\partial A_{ijk}{}^l}{\partial x^m} + \sum_{p=1}^n \left( \Gamma_{pm}^l A_{ijk}{}^p - \Gamma_{im}^p A_{pjk}{}^l - \Gamma_{jm}^p A_{ipk}{}^l - \Gamma_{km}^p A_{ijp}{}^l \right)$$

Classiquement, au moyen d'un calcul algébrique qui est parfois présenté de manière «aveugle», on démontre que ce tenseur satisfait les identités suivantes, dites

«de Bianchi» :

$$(1.46) \quad 0 = \nabla_m A_{ijk}{}^l + \nabla_j A_{mik}{}^l + \nabla_i A_{jmk}{}^l.$$

Observons la permutation circulaire sur les trois indices  $(m, i, j)$ .

Grâce à la méthode du repère mobile d'Élie Cartan, il est possible de comprendre pourquoi une telle permutation circulaire apparaît et d'interpréter cette identité de manière géométrique (voir [Ca1951] et le § ??). Afin d'offrir au passage une idée intuitive de cette raison, mentionnons que l'identité de Bianchi provient d'une application particulière du Lemme de Poincaré d'après lequel  $dd\omega = 0$  pour toute forme différentielle. En effet, considérons une 2-forme différentielle exacte  $d\omega := \sum_{i<j} \Lambda_{ij} \cdot dx^i \wedge dx^j$ , différentielle d'une 1-forme  $\omega$ , et prolongeons la définition de ses coefficients en posant  $\Lambda_{ij} = -\Lambda_{ji}$  pour  $i \geq j$ . Après une réorganisation qui fait apparaître la base de 3-formes  $(dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k)_{1 \leq i < j < k \leq n}$ , la différentielle extérieure de cette 2-forme  $d\omega$  s'écrit sous la forme suivante :

$$(1.47) \quad 0 = dd\omega = \sum_{i<j<k} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \cdot \left( \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Lambda_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Lambda_{jk}}{\partial x^i} \right).$$

Ainsi, l'annulation de cette 3-forme conduit aux identités

$$(1.48) \quad 0 = \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Lambda_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Lambda_{jk}}{\partial x^i},$$

pour  $1 \leq i < j < k \leq n$ . On vérifie alors qu'elles sont satisfaites pour tous  $i, j, k = 1, \dots, n$ . Formellement, elles sont très similaires aux identités de Bianchi (1.46).

**1.49. Tenseur de Ricci et sa divergence covariante.** Les relations de symétrie (1.) impliquent que toutes les contractions que l'on peut effectuer sur les indices de  $A_{ijk}{}^l$  se ramènent ou bien au tenseur nul (inintéressant) ou bien au *tenseur de Ricci*, ou à son opposé. Ce tenseur à deux indices est défini par :

$$(1.50) \quad A_{ij} := \sum_{k=1}^n A_{ikj}{}^k = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n g^{kl} A_{ikjl}.$$

En partant de la deuxième représentation de  $A_{ij}$ , issue de (1.41) et en appliquant la quatrième relation de symétrie (1.43), on vérifie que ce tenseur contracté est symétrique :  $A_{ij} = A_{ji}$ . De plus, en contractant la transformation (1.42), on vérifie que l'on a :

$$(1.51) \quad \bar{A}_{ij} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} A_{i_1 j_1}.$$

Autrement dit, le tenseur de Ricci est complètement covariant.

En appliquant le principe d'élévation des indices que nous avons déjà utilisé en (1.41), définissons maintenant le *tenseur de Ricci mixte*, qui est une fois covariant et une fois contravariant :

$$(1.52) \quad A_i{}^j := \sum_{p=1}^n g^{pj} A_{ip}.$$

Définissons aussi la *courbure scalaire* par :

$$(1.53) \quad A := \sum_{i,j=1}^n g^{ij} A_{ij}.$$

Observons que la courbure scalaire possède une expression équivalente, utile dans la suite :

$$(1.54) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} A_{ij} = \sum_{i,j=1}^n \sum_{p=1}^n g^{ij} A_{ipj}{}^p = \sum_{i,p=1}^n A_{ip}{}^{ip} \\ = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}{}^{ij}. \end{array} \right.$$

Le lemme suivant constituera le point de départ fondamental pour l'écriture des équations de la gravitation d'Einstein.

**Lemme 1.55.** *La divergence covariante du tenseur de Ricci s'exprime en fonction de la dérivée covariante de la courbure scalaire de la manière suivante :*

$$(1.56) \quad \sum_{j=1}^n \nabla_j (A_i{}^j) = \frac{1}{2} \nabla_i (A).$$

Autrement dit, le *tenseur mixte d'Einstein* défini par

$$(1.57) \quad E_i{}^j := A_i{}^j - \frac{1}{2} \delta_i^j A$$

a une «divergence absolue» nulle.

*Démonstration.* Définissons les composantes deux fois covariantes et deux fois contravariantes du tenseur de courbure :

$$(1.58) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{ij}{}^{kl} := \sum_{p=1}^n g^{pk} A_{ijp}{}^l \\ = \sum_{p,q=1}^n g^{pk} g^{ql} A_{ijpq} \end{array} \right.$$

En insérant les deux relations d'antisymétrie  $A_{ijkl} = -A_{jikl} = -A_{ijlk}$  dans cette définition, on vérifie immédiatement que l'on a aussi les deux relations d'antisymétrie suivantes :

$$(1.59) \quad A_{ij}{}^{kl} = -A_{ji}{}^{kl} = -A_{ij}{}^{lk}.$$

Pour établir (1.), partons de l'identité de Bianchi (1.) dans laquelle on remplace  $k$  par  $p$ , multiplions par  $g^{pk}$  et sommons sur l'indice  $p$ , ce qui donne :

$$(1.60) \quad 0 = \sum_{p=1}^n \left( g^{pk} \cdot \nabla_m (A_{ijp}{}^l) + g^{pk} \cdot \nabla_j (A_{mip}{}^l) + g^{pk} \cdot \nabla_i (A_{jmp}{}^l) \right).$$

Grâce au théorème de Ricci d'après lequel  $\nabla_k(g_{ij}) = \nabla_k(g^{ij}) = 0$ , nous pouvons insérer les  $g^{pk}$  à l'intérieur des dérivées covariantes, ce qui donne, en tenant compte de la définition des  $A_{ij}{}^{kl}$  :

$$(1.61) \quad 0 = \nabla_m \left( A_{ij}{}^{kl} \right) + \nabla_j \left( A_{mi}{}^{kl} \right) + \nabla_i \left( A_{jm}{}^{kl} \right).$$

Maintenant, contractons cette identité : posons  $k := i$ ,  $l := j$  et sommions sur  $i$  et sur  $j$  :

$$(1.62) \quad 0 = \nabla_m \left( \sum_{i,j=1}^n A_{ij}{}^{ij} \right) + \sum_{j=1}^n \nabla_j \left( \sum_{i=1}^n A_{mi}{}^{ij} \right) + \sum_{i=1}^n \nabla_i \left( \sum_{j=1}^n A_{jm}{}^{ij} \right).$$

D'après (1.), dans la première parenthèse, nous reconnaissons la courbure scalaire. En permutant les indices  $i$  et  $j$  dans la seconde parenthèse, nous reconnaissons le tenseur de Ricci mixte  $-A_m{}^j$  défini en (1.). Enfin, en permutant les indices  $j$  et  $m$  dans la seconde parenthèse, nous reconnaissons  $-A_m{}^i$ . Au total, nous pouvons réécrire cette identité sous la forme :

$$(1.63) \quad 0 = \nabla_m(A) - \sum_j \nabla_j (A_m{}^j) - \sum_i \nabla_i (A_m{}^i).$$

Cette identité est clairement équivalente à (1.56), ce qui complète la démonstration.  $\square$

**1.64. Covariance de la forme quadratique de Ricci.** Nous affirmons que la forme différentielle quadratique

$$(1.65) \quad \sum_{i,j=1}^n A_{ij} dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^n \bar{A}_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j$$

est conservée par tout changement de coordonnées  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ . En effet, grâce à la tensorialité de  $A_{ij}$  exprimée par la loi de transformation (1.52), nous pouvons calculer :

$$(1.66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k,l=1}^n \bar{A}_{kl} d\bar{x}^k d\bar{x}^l = \sum_{k,l,p,q,i,j=1}^n \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^l} A_{pq} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} dx^i dx^j \\ = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} dx^i dx^j. \end{array} \right.$$

**1.67. Analyse fine de la covariance du tenseur de Ricci.** Par ailleurs, en contractant l'expression (1.39), nous observons que les composantes  $A_{ij}$  du tenseur de Ricci s'expriment comme des fonctions  $\mathcal{A}_{ij}$  du jet d'ordre 2 des coefficients métriques  $g_{\alpha\beta}$  et que ces fonctions  $\mathcal{A}_{ij}$  dépendent linéairement des dérivées partielles d'ordre 2 des  $g_{\alpha\beta}$ . D'après les remarques qui suivent l'expression (1.38), il se trouve que les  $\bar{A}_{ij}$  s'expriment par *les mêmes fonctions*  $\mathcal{A}_{ij}$  du jet d'ordre deux  $J_{\bar{x}}^2 \bar{g}_{\alpha\beta}$  des

coefficients métriques transformés. Ainsi, la loi de transformation tensorielle (1. 51) doit-elle précisément s'écrire :

$$(1.68) \quad A_{ij} (J_{\bar{x}}^2 \bar{g}_{\alpha\beta}) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} A_{i_1 j_1} (J_x^2 g_{\alpha_1 \beta_1}),$$

avec les mêmes fonctions  $A_{ij}$  de part et d'autre de l'égalité. Dans cette relation, nous sous-entendons que le jet  $J_{\bar{x}}^2 \bar{g}_{\alpha\beta}$  s'exprime en fonction du jet  $J_x^2 g_{\alpha_1 \beta_1}$ . En effet, grâce à (1.28), nous savons déjà comment  $\bar{g}_{\alpha\beta}$  s'exprime en fonction de  $g_{\alpha_1 \beta_1}$  à travers le changement de coordonnées  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ . En appliquant la dérivation  $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\gamma} = \sum_{\gamma_1=1}^n \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma_1}}$  à ces relations  $\bar{g}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha_1, \beta_1=1}^n \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\alpha_1 \beta_1}$ , nous obtenons la loi de transformation pour les dérivées premières :

$$(1.69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma} = \sum_{\alpha_1, \beta_1=1}^n \left( \frac{\partial^2 x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\alpha_1 \beta_1} + \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial^2 x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^\beta \partial \bar{x}^\gamma} g_{\alpha_1 \beta_1} \right) + \\ \quad + \sum_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1=1}^n \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial g_{\alpha_1 \beta_1}}{\partial x^{\gamma_1}}. \end{array} \right.$$

En appliquant à nouveau la dérivation  $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\delta}$ , on obtiendrait une formule de transformation pour les dérivées secondes  $\frac{\partial^2 \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma \partial \bar{x}^\delta}$ . Soit  $G = (g_{ij})$  la matrice (symétrique) des coefficients métriques, où  $i$  désigne l'indice des lignes et  $j$  celui des colonnes. De même, soit  $\bar{G}$  la matrice des  $\bar{g}_{ij}$ . Nous résumons les relations obtenues entre le jet d'ordre 2 de  $\bar{G}$  et le jet d'ordre 2 de  $G$  sous la forme suivante :

$$(1.70) \quad J_{\bar{x}}^2 \bar{G} = \Pi (J_{\bar{x}}^3 x, J_x^2 G).$$

Par construction,  $\Pi$  est un polynôme universel (dont on pourrait aisément écrire l'expression explicite) à valeurs vectorielles qui dépend du jet d'ordre trois du changement de coordonnées (noter l'apparition des dérivées d'ordre 2 de  $x$  par rapport à  $\bar{x}$  dans (1.69)). C'est avec ces formules que l'on doit remplacer  $J_{\bar{x}}^2 \bar{g}_{\alpha\beta}$  en fonction de  $J_x^2 g_{\alpha_1 \beta_1}$  dans les relations (1.68) pour leur donner sens.

**1.71. Formes différentielles quadratiques covariantes.** En suivant Élie Cartan, nous dirons qu'une forme quadratique différentielle

$$(1.72) \quad \sum_{i,j=1}^n C_{ij}^0 dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^n C_{ij}^0 \left( g_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right) dx^i dx^j$$

dont les coefficients sont des fonctions  $C_{ij}^0$  du jet d'ordre 2 des coefficients métriques est *covariante de la forme quadratique fondamentale*  $\sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j$  si l'on a :

$$(1.73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j=1}^n C_{ij}^0 \left( \bar{g}_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma}(\bar{x}), \frac{\partial^2 \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma \partial \bar{x}^\delta}(\bar{x}) \right) d\bar{x}^i d\bar{x}^j = \\ \quad = \sum_{i,j=1}^n C_{ij}^0 \left( g_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right) dx^i dx^j, \end{array} \right.$$

avec les mêmes fonctions  $C_{ij}^0$  de part et d'autre de l'égalité, pour tout changement de coordonnées  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ . De manière équivalente, les  $C_{ij}^0$  se comportent comme le tenseur de Ricci  $A_{ij}$  et jouissent d'une loi de transformation précise, exactement analogue à (1.68) :

$$(1.74) \quad C_{ij}^0 (J_{\bar{x}}^2 \bar{g}_{\alpha\beta}) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} C_{i_1 j_1}^0 (J_x^2 g_{\alpha_1 \beta_1}).$$

Pour être encore plus précis, en tenant compte de (1.70), les fonctions universelles  $C_{ij}^0$  satisfont :

$$(1.75) \quad C_{ij}^0 (\Pi (J_{\bar{x}}^3 x, J_x^2 G)) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} C_{i_1 j_1}^0 (J_x^2 G),$$

après remplacement de  $\bar{x}$  en fonction de  $x$  pour donner sens à cette égalité.

Avant de formuler le théorème d'unicité d'Élie Cartan, évoquons rapidement les origines physiques des équations d'Einstein.

**1.76. Géométrie et physique.** En opposition à une physique des phénomènes discrets, la relativité générale se fonde sur un certain nombre de postulats qui sont caractéristiques d'une «physique du continu» : les objets célestes et terrestres peuvent être décrits au moyen de concepts géométriques ; continuité et différentiabilité sont acceptées comme hypothèses fondamentales ; mesure de l'espace et mesure du temps peuvent s'effectuer avec des moyens expérimentaux ; enfin, les appareils de mesure confèrent un sens tangible à l'idée de *système de coordonnées mathématiques sur l'espace-temps*. Se pose alors une question cruciale :

*Quels objets géométriques doit-on placer au fondement d'une physique du continu ? Existe-t-il des objets géométriques qui s'imposent a priori pour penser l'univers physique continu ?*

Sans approfondir le problème métaphysique des rapports entre la pensée mathématique pure et la pensée physique, contentons-nous d'évoquer la contribution de Riemann à cette question qui agite encore la science contemporaine.

Dans son *habilitationsvortrag*, Riemann s'interrogeait *a priori* sur la notion d'espace. Il s'agissait là d'un bouleversement philosophique majeur dans l'histoire des mathématiques. L'espace cessait d'être une notion transmise par l'expérience, intuitive et caractérisée de manière unique. En effet, l'espace changeait radicalement de statut pour devenir question *a priori* sur l'espace : en tant que donnée intuitive, l'espace disparaissait ; il réapparaissait en tant que question pour la science. Et les conceptions qui pouvaient naître de cette question *a priori* se démultipliaient *a priori*. En effet, le destin négatif de l'axiome des parallèles d'Euclide, l'émergence des géométries non-euclidiennes, à travers les travaux de Bolyai et de Lobatchevsky (anticipés par Gauss), la constitution de la géométrie projective dans l'école française et l'émergence des travaux de Gauss sur les transformations conformes appliquées à la cartographie, toutes ces innovations géométriques poussèrent Riemann à s'interroger totalement *a priori* sur les hypothèses qui peuvent servir de fondement à la conceptualisation de la notion d'espace, dans les mathématiques et dans la physique. Il s'agissait en particulier de s'interroger sur les données primitives de la

géométrie, sur leur degré de généralité, sur leur progressivité, sur leur dépendance relative, sur leur nécessité relative<sup>8</sup>, etc.

Les rapports mutuels des données primitives [de la Géométrie] restent enveloppés de mystère ; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même *a priori* si elles peuvent l'être ([Ri1854], p. 280).

Ainsi Riemann anticipait-il l'*explosion et la ramification nécessaires des hypothèses géométriques possibles*. Effectivement, la seconde moitié du dix-neuvième siècle et le début du vingtième devaient voir naître la géométrie projective, la géométrie conforme, la géométrie lorentzienne, les espaces non holonomes, les espaces généralisés au sens d'Élie Cartan, etc.

Conséquence inévitable de cette diversité : la théorie physique se voyait obligée *a priori* d'effectuer un choix *a posteriori* parmi toutes les géométries possibles. Les mathématiques, avec leur *hubris* hypothético-déductive, et leur profusion incontrôlée de résultats abstraits, encombraient, embarrassaient, déconcertaient déjà la physique, qui se voyait contrainte de reconnaître sous cet afflux quelle géométrie correspondait à la réalité, dans un faisceau de théories géométriques architecturées.

[...] les propriétés, par lesquelles l'espace [physique] se distingue de toute autre grandeur imaginable de trois dimensions, ne peuvent être empruntés qu'à l'expérience. De là surgit le problème de rechercher les faits les plus simples au moyen desquels puissent s'établir les rapports métriques de l'espace, problème qui, par la nature même de l'objet n'est pas complètement déterminé ; car on peut indiquer plusieurs systèmes de faits simples, suffisants pour la détermination des rapports métriques de l'espace. [...] Ces faits, comme tous les faits possibles, ne sont pas nécessaires ; ils n'ont qu'une certitude empirique, ce sont des hypothèses ([Ri1854], p. 281). [...] Il faut donc, ou que la réalité sur laquelle est fondé l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui ([Ri1854], p. 2 ? ?).

Ces prédictions allaient être confirmées par Einstein.

**1.77. Équations de la gravitation d'Einstein.** La relativité restreinte est fondée sur une classe restreinte de transformations de coordonnées, celles qui stabilisent la forme de Minkowski  $-(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2$  sur l'espace-temps

---

<sup>8</sup>Nous pourrions soutenir la thèse suivante : la méthode axiomatique et hypothético-déductive, en mathématiques s'enracine profondément dans la pensée riemannienne. En effet, Riemann est l'un des rares mathématiciens de l'histoire qui ait accepté les interrogations mathématiques dans leur pureté intrinsèque, quelle que soit leur difficulté invisible, et plus encore, qui les ait *formulées explicitement dans ses travaux*, quelle que soit leur ouverture. La méthode axiomatique construit un cadre arborescent pour insérer ces interrogations mathématiques absolues dans une architecture qui les prolonge, qui les réalise et qui les démultiplie. Sur la question de l'espace, Riemann aura anticipé les architectures modernes et stratifiées de la topologie et de la géométrie différentielle, et c'est pourquoi nous disons qu'il y a quelque chose de la pensée riemannienne qui se réalise dans la méthode axiomatique. Il est vrai que cette méthode, qui fut largement promue par Hilbert, aime à cacher son questionnement intrinsèque. Mais elle n'est qu'un cadre d'expression rigoureusement élaboré pour faire face à la complexité du réel spéculatif : elle ne contrôle que partiellement les tensions «riemanniennes» qui la déploient.

(après normalisation à 1 de la vitesse  $c$  de la lumière). Précisément, ce sont les transformations linéaires  $\bar{x}^i = \sum_{j=1}^4 u_j^i x^j$  dites «de Lorentz» qui satisfont :

$$(1.78) \quad -(d\bar{x}^1)^2 - (d\bar{x}^2)^2 - (d\bar{x}^3)^2 + (d\bar{x}^4)^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2.$$

Il n’y a aucune raison de se restreindre à une telle classe de transformations. Mais à travers un changement de coordonnées  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  quelconque, cette géométrie lorentzienne ne subit qu’une déformation apparente : les trajectoires des particules ne sont certes plus rectilignes, mais elles sont curvilignes, et pour être plus exact, ce ne sont que des «images» curvilignes de droite, vues à travers le prisme déformant de la transformation  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ . Notamment, la courbure de l’espace-temps reste constante, puisque celle de l’espace-temps de Minkowski l’était. Au total, la déformation  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  fournit une image différente du même objet.

En relativité restreinte, Einstein postulait que les lois physiques sont *invariantes* par rapport à toute transformation de Lorentz : leur forme est exactement la même dans tout référentiel lorentzien. Motivé par les expériences négatives de Michelson et Morley sur la détection du vent d’éther, Einstein postulait aussi la constance de la vitesse de la lumière dans tout référentiel. Pour insister sur le caractère *a priori* et «métaphysique» des raisonnements d’Einstein, on pourrait aussi considérer que la vitesse de la lumière est une loi physique, dont la forme est indépendante du référentiel lorentzien, et par conséquent, la vitesse de la lumière est constante : le second postulat serait une conséquence du premier.

En recherchant une généralisation de la relativité restreinte aux systèmes de coordonnées non lorentziens, Einstein fut conduit à *abandonner le principe d’invariance*, trop restrictif, et à le remplacer par un *principe de covariance*. Ce principe, qu’Einstein emprunta aux travaux mathématiques de Ricci et de Levi-Civita, exprime toujours une exigence purement *a priori*, sans origine physique :

**Principe de covariance 1.79.** *Les lois d’une physique géométrisée doivent pouvoir se transformer selon des règles précises lorsque l’on passe d’un système de coordonnées sur l’espace-temps à un autre.*

Seconde exigence *a priori*, qui doit évidemment être satisfaite :

**Principe d’équivalence 1.80.** *Deux systèmes physiques qui se déduisent l’un de l’autre par un changement de coordonnées sur l’espace-temps doivent être considérés comme rigoureusement équivalents.*

Comme ses contemporains Nordström, ??, Einstein recherchait une expression relativiste des lois de la gravitation newtonienne, gouvernée par l’équation de Poisson :

$$(1.81) \quad \Delta\Phi = 4\pi G \rho,$$

où  $\Phi$  est le potentiel scalaire du champ de gravité,  $G = 6,67 \text{ S.I.}$  est la constante de gravitation universelle et  $\rho$  es la densité de matière. Après plusieurs tentatives infructueuses, on a suggéré de remplacer le scalaire densité de matière  $\rho$  par un tenseur énergie-impulsion  $T_{ij}$ . Cependant, cette voie a été abandonnée car il semblait impossible de satisfaire la loi de conservation. Einstein montra que cela est



possible, à condition de travailler dans des coordonnées curvilignes quelconques, en présence de courbure.

**1.82. Conditions auxquelles doit satisfaire le tenseur d'Einstein.** Dans le mémoire où il expose sa synthèse finale ([Ei1916]), Einstein postule que toutes les caractéristiques géométriques de l'espace-temps peuvent être décrites au moyen d'un tenseur différentiel  $E_{ij}$  deux fois covariant qui satisfait quatre conditions.

1. *Ce tenseur est exprimé dans un espace pseudo-riemannien quadridimensionnel.*
2. *Il doit dépendre des dérivées partielles des coefficients métriques d'ordre au plus égal à 2.*
3. *Il doit être linéaire par rapport aux dérivées partielles des coefficients métriques d'ordre exactement égal à 2.*
4. *Sa version mixte  $E_i^j := \sum_{p=1}^n g^{pj} E_{ip}$  doit être de divergence absolue nulle :*

$$(1.83) \quad 0 = \sum_{j=1}^n \nabla_j E_i^j.$$

Voici comment Einstein présentait le choix de ce tenseur :

[...] pour le champ de gravitation en l'absence de matière, il est naturel de chercher à annuler le tenseur symétrique  $B_{\mu\nu}$ , déduit du tenseur  $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$ . [...] avec le choix du système de coordonnées que nous avons fait, ces équations s'écrivent dans le cas du champ libre de matière :

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = 0 \\ \sqrt{-g} = 1. \end{cases}$$

Il faut remarquer que le choix de ces équations comporte un minimum d'arbitraire. Car, en dehors de  $B_{\mu\nu}$ , il n'existe pas de tenseur de rang 2 formé des  $g_{\mu\nu}$  et de leurs dérivées qui ne comporte aucune dérivée d'ordre supérieur à deux et qui soit linéaire en fonction de ces dernières ([Ei1916], p. 209 de la traduction française).

Notons que les considérations sont légèrement différentes : la normalisation  $\sqrt{-g} = 1$  du déterminant de la métrique introduit une simplification des équations de la gravitation dans le vide qui élimine la moitié des termes du tenseur de Ricci  $A_{ij}$  classique. En vérité, Einstein n'introduira le tenseur  $A_j^i - \frac{1}{2} \delta_j^i A$  que dans un mémoire ultérieur. En tout état de cause, sa dernière affirmation revient à dire que le tenseur de Ricci  $A_{ij}$  est essentiellement le seul tenseur deux fois covariant qui dépend linéairement des dérivées partielles d'ordre deux des coefficients métriques. Cette affirmation signifie sans doute que le seul tenseur que l'on peut obtenir par contraction des indices à partir du tenseur de courbure  $A_{ijk}^l$  est le tenseur de Ricci, ce qui était bien connu.

Élie Cartan poussa plus loin la question d'unicité et démontra un théorème beaucoup plus fort que cette observation élémentaire.

**1.84. Théorème d'unicité d'Élie Cartan.** Supposons donc  $n = 4$  et soit  $\sum_{i,j=1}^4 g_{ij} dx^i dx^j$  une pseudo-métrique non-dégénérée, possédant trois valeurs propres négatives et une valeur propre positive en tout point. Soit  $A_{ij}$  le tenseur de Ricci. Nous avons déjà observé que la forme quadratique différentielle  $\sum_{i,j=1}^4 A_{ij} dx^i dx^j$  est covariante de la forme quadratique fondamentale  $\sum_{i,j=1}^4 g_{ij} dx^i dx^j$  (cf. (1.65)). On vérifierait qu'il en est de même pour la forme  $\sum_{i,j=1}^4 A g_{ij} dx^i dx^j$ , obtenue en multipliant la forme fondamentale par la courbure scalaire  $A$ . Enfin, la forme quadratique fondamentale est évidemment covariante d'elle-même.

**Théorème 1.85.** (Élie CARTAN 1922) *Toute forme quadratique différentielle*

$$(1.86) \quad \sum_{i,j=1}^4 C_{ij}^0 dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^4 C_{ij}^0 \left( g_{\alpha\beta}(x), \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right) dx^i dx^j,$$

*linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre 2 des coefficients  $g_{\alpha\beta}$  et covariante de la forme quadratique fondamentale est nécessairement une combinaison linéaire des trois formes précédentes :*

$$(1.87) \quad \sum_{i,j=1}^4 C_{ij}^0 dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^4 [\nu A_{ij} + \mu A g_{ij} + \lambda g_{ij}] dx^i dx^j,$$

*avec des constantes  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$  arbitraires.*

Grâce au calcul effectué dans le Lemme 1.55, il en découle la conséquence suivante.

**Corollaire 1.88.** *Le tenseur une fois covariant et une fois contravariant défini par :*

$$(1.89) \quad E_i^j := \mu \left( A_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j A \right) + \lambda \delta_i^j,$$

*où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes, est le plus général qui satisfait la loi de conservation  $\sum_{j=1}^4 \nabla_j E_i^j = 0$ .*

**1.90. Groupes de Lie, formes différentielles et méthode du repère mobile d'après Élie Cartan.** Résumons maintenant les grandes lignes de la démonstration du Théorème 1.85.

\*\*\*

**1. Avertissement.** Quatre préoccupations sous-tendent la rédaction de ce mémoire :

- (i) un souci de mentionner régulièrement des pensées intuitives, conceptuelles, dialectiques, heuristiques et spéculatives propres à la géométrie, de les développer et de leur conférer le statut qu'elles méritent ; en effet, telles les âmes d'une Atlantide disparue, ces pensées virtuelles sont trop souvent englouties dans le langage formel ; elles sont quasi fossilisées dans les strates innombrables de la tour de Babel des langages mathématico-physiques formalisés ;
- (ii) un souci de concrétude absolue dans la présentation des concepts géométriques, cachés derrière les définitions «formalistes» ;

- (iii) un *respect absolu des calculs intermédiaires*, jamais envisagés comme des étapes obscures indignes d'apparaître dans le texte écrit, mais toujours considérés comme des briques essentielles pour ériger les raisonnements géométriques ;
- (iv) une volonté d'*approfondir et de méditer le contenu spéculatif immanent aux mémoires originaux* de Gauss, de Riemann, de Christoffel, de Lie, d'Einstein et d'Élie Cartan.

De ces quatre préoccupations découlent trois principes majeurs qui imposeront un style particulier à la rédaction de ce mémoire :

- (a) accepter la longueur du texte : il est paradoxalement beaucoup plus facile de lire un texte long et complet qui s'interdit les ellipses qu'un texte court qui fait l'impasse sur le suivi dialectique et rhétorique des raisonnements ;
- (b) renforcer la présence d'une langue «littéraire» ou tout du moins «littérale» : les explications reformulées en langue naturelle offrent toujours des éclaircissements qui sont indispensables à la compréhension adéquate d'un sujet ;
- (c) préciser chaque geste de calcul qui entre dans la dérivation d'une identité formelle et privilégier systématiquement la concrétude des calculs : ce n'est qu'à cette condition que le lecteur pourra pénétrer dans les royaumes oubliés de la géométrie classique, ceux que la vague de formalisation au milieu du vingtième siècle n'a pas eu l'énergie d'absorber et de réécrire en totalité.

Ces orientations s'expliquent par notre projet initial : rendre accessibles les idées d'Élie Cartan, les retraduire, les reconstruire, en s'aidant de sources modernes (par exemple [Ga1989], [OL1995]), mais en dépassant le niveau de la théorie générale. Quatre mois nous auront été nécessaires pour déchiffrer les soixante-trois pages du mémoire original [Ca1922] d'Élie Cartan. Parfois sans indiquer ses sources, Élie Cartan applique des théorèmes profonds qui requièrent une culture préalable. Certains passages laissent réellement perplexes quant aux arguments qu'il utilise. Le lecteur opiniâtre et curieux finit par admettre que la seule stratégie qui se présente à lui est de reconstituer *ab initio* tous les raisonnements suggérés de manière elliptique, et de compléter tous les calculs passés sous silence par Élie Cartan.

**1. Remerciement.** Nous remercions Françoise Panigeon pour des relectures minutieuses sur écran.

## §2. DIAGONALISATION DE LA MÉTRIQUE PSEUDO-RIEMANNIENNE

Tous nos raisonnements seront locaux et effectués dans des systèmes de coordonnées précis  $x = (x^1, \dots, x^n)$ , ou  $\bar{x}, \bar{\bar{x}}, \dots$ , sur  $\mathbb{R}^n$ , au voisinage d'un point que nous supposons être l'origine, sans perte de généralité.

**2.1. Diagonalisation de la pseudo-métrie.** Pour les applications à la relativité générale, nous supposons que la «métrie» riemannienne locale est non-dégénérée, *i.e.* que la matrice symétrique  $(g_{ij}(x))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  est inversible en tout point  $x$ , sans être forcément définie positive. Puisque le  $ds^2$  peut alors s'annuler dans certaines directions dites «isotropes» et posséder des valeurs alternativement positives

et négatives, et puisque le terme «métrique» doit être réservé aux distances toujours positives, nous parlerons dans ce cas de «pseudo-métrique» riemannienne.

Il est bien connu qu'après un changement de base orthogonal, toute matrice symétrique non-dégénérée peut être réduite à une matrice diagonale. De plus, après une dilatation appropriée le long des axes de coordonnées et après une permutation des coordonnées, on peut supposer que les  $p$  premiers éléments de la diagonale sont des  $-1$  et que les  $(n - p)$  derniers éléments des  $1$ . On appellera «cas riemannien», le cas  $p = 0$  et «cas pseudo-riemanniens» les autres cas  $0 < p \leq n$ . En relativité restreinte (et générale), on a bien évidemment  $n = 4$ ,  $p = 3$  et le  $ds^2$  est minkowskien :

$$(2.2) \quad ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2.$$

Afin de préparer à l'avance les harmonies formelles, définissons des constantes qui s'introduiront dans toutes nos équations :

$$(2.3) \quad \varepsilon_i := -1, \quad \text{pour } i = 1, \dots, p \text{ et } \varepsilon_i := 1, \quad \text{pour } i = p + 1, \dots, n.$$

D'après la loi d'inertie de Sylvester, toute forme quadratique non-dégénérée en les variables  $(x^1, \dots, x^n)$  est de la forme  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i [\lambda_i(x)]^2$ , où les  $\lambda_i(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x^j$  sont des formes linéaires linéairement indépendantes. Autrement dit, une telle forme quadratique se «redresse» en  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (\bar{x}^i)^2$ , grâce au changement de coordonnées linéaires sur  $\mathbb{R}^n$  défini par  $\bar{x}^i := \sum_{j=1}^n \lambda_j x^j$ . Ce résultat reste vrai, plus généralement, pour un  $ds^2$  pseudo-riemannien quelconque, à condition de remplacer les  $\lambda_i(x)$  par des formes différentielles, *i.e.* des formes linéaires à coefficients variables.

**Lemme 2.4.** *Il existe  $n$  formes différentielles  $\theta^i = \theta^i(x, dx) = \sum_{j=1}^n h_j^i(x) dx^j$  de degré 1 à coefficients analytiques réels  $h_j^i(x)$  qui diagonalisent le  $ds^2$  en tout point, c'est-à-dire telles que l'on a*

$$(2.5) \quad ds^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (\theta^i)^2.$$

Avant de rédiger la démonstration de ce lemme, formulons un certain nombre d'observations préliminaires. Tout d'abord, il importe de faire remarquer qu'en général, de telles formes différentielles non seulement ne sont pas uniques mais surtout ne sont pas exactes. En vérité, ce n'est que dans le cas exceptionnel où le tenseur de courbure est constant qu'il existe des fonctions  $y^i(x)$  telles que l'on puisse prendre  $\theta^i = dy^i$  pour  $i = 1, \dots, n$  (voir Théorème 2).

La non-unicité du système de formes  $\theta^1, \dots, \theta^n$  est causée par une ambiguïté essentielle qui sera exploitée à fond par la «méthode d'équivalence» d'Élie Cartan. Par exemple, dans le cas riemannien, pour toute matrice  $U(x) = (u_j^i(x))$  qui dépend analytiquement du point  $x$  et qui est orthogonale, c'est-à-dire qui vérifie  $\delta_j^i = \sum_{k=1}^n u_i^k(x) u_j^k(x)$ , nous affirmons que le  $ds^2$  sera tout aussi bien représenté comme

$$(2.6) \quad ds^2 = \sum_{i=1}^n (\omega^i)^2,$$

où  $\omega^i := \sum_{j=1}^n u_j^i \theta^j$  : autrement dit, les  $\omega^i$  proviennent d'une rotation des  $\theta^i$ . En effet, nous vérifions immédiatement par le calcul que :

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n (\omega^i)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j_1=1}^n u_{j_1}^i \theta^{j_1} \right) \left( \sum_{j_2=1}^n u_{j_2}^i \theta^{j_2} \right) \\ = \sum_{i, j_1, j_2=1}^n u_{j_1}^i u_{j_2}^i \theta^{j_1} \theta^{j_2} \\ = \sum_{j_1, j_2=1}^n \delta_{j_1}^{j_2} \theta^{j_1} \theta^{j_2} \\ = \sum_{i=1}^n (\theta^i)^2. \end{array} \right.$$

Pour le passage de la troisième à la quatrième ligne, on utilise la relation précitée  $\delta_{j_1}^{j_2} = \sum_{k=1}^n u_{j_1}^k u_{j_2}^k$ . Ici, nous explicitons à dessein chaque ligne de calcul, fût-elle élémentaire, afin d'assurer la lisibilité et la reproductibilité des calculs explicites que nous effectuerons par la suite. Ces calculs qui préciseront ceux d'Élie Cartan sont nettement plus délicats, et c'est pourquoi nous devons faire preuve de clarté et de discipline formelle dès maintenant. Ainsi, tout système de formes différentielles  $\omega^i$  qui se déduit d'un système de formes différentielles  $\theta^i$  diagonalisant le  $ds^2$  (2.5) par une rotation vectorielle  $\omega^i = \sum_{j=1}^n u_j^i \theta^j$  constitue encore un système de formes différentielles qui diagonalise le  $ds^2$ . Poursuivons les commentaires avant d'entamer la démonstration du Lemme 2.4.

**2.8. Équations matricielles fondamentales.** Admettons ce lemme et fixons une fois pour toutes le système de formes différentielles  $\theta^i$ . Soit  $G = G(x)$  la matrice  $(g_{ij}(x))$ , où  $i$  représente l'indice des lignes et  $j$  celui des colonnes. Soit  $H = H(x)$  la matrice  $(h_j^i(x))$ , où, de même,  $i$  représente l'indice des lignes et  $j$  celui des colonnes. Soit  $E$  la matrice diagonale avec  $\varepsilon_i$  sur le  $i$ -ième élément de la diagonale, *i.e.* en notation tabulaire :

$$(2.9) \quad E := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

En développant la représentation (2.5) et en réordonnant, nous obtenons :

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j &= \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \left( \sum_{i=1}^n h_i^k(x) dx^i \right) \left( \sum_{j=1}^n h_j^k(x) dx^j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n dx^i dx^j \left( \sum_{k=1}^n h_i^k(x) \cdot \varepsilon_k \cdot h_j^k(x) \right), \end{aligned} \right.$$

d'où

$$(2.11) \quad g_{ij}(x) = \sum_{k=1}^n h_i^k(x) \cdot \varepsilon_k \cdot h_j^k(x).$$

De manière équivalente, la matrice  $H$  vérifie l'équation matricielle

$$(2.12) \quad G = {}^T H \cdot E \cdot H,$$

qui se réduit à  $G = {}^T H \cdot H$  dans le cas riemannien.

Soit  $\tilde{H}$  la matrice inverse<sup>8</sup> de  $H$ . Par définition, on a les deux identités matricielles  $I_{n \times n} = H \cdot \tilde{H} = \tilde{H} \cdot H$ , où  $I_{n \times n}$  désigne la matrice identité de taille  $n \times n$ . Écrivons ces identités qui seront fort utiles par la suite, avec des indices :

$$(2.13) \quad \delta_j^i = \sum_{k=1}^n h_k^i \cdot \tilde{h}_j^k = \sum_{k=1}^n \tilde{h}_k^i \cdot h_j^k.$$

Bien qu'il existe des formules rationnelles explicites, dites «de Cramer», pour les éléments de la matrice inverse de  $H$  en fonction des éléments de  $H$ , nous adopterons la notation  $\tilde{H} = (\tilde{h}_i^j)$  pour désigner la matrice inverse de  $H$ . Dans ce qui va suivre, souvenons-nous que cette notation n'introduit pas les éléments d'une nouvelle matrice. Souvenons-nous aussi que la dépendance entre les éléments de  $\tilde{H}$  et les éléments de  $H$  est entièrement exprimée par les relations algébriques (2.13). Ainsi, lorsque nous aurons besoin de simplifier certaines expressions algébrico-différentielles complexes où apparaissent les éléments de  $H$  et de  $\tilde{H}$ , il nous suffira de tenir compte de ces relations.

**2.14. Base orthonormale mobile.** Toujours en admettant le Lemme 2.4, introduisons le système de champs de vecteurs définis par

$$(2.15) \quad e_i = e_i(x) := \sum_{j=1}^n \tilde{h}_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Ces champs de vecteurs sont *duaux* du système de formes différentielles  $\theta^j$ , au sens de la dualité canonique entre champs de vecteurs et formes différentielles définie

---

<sup>8</sup>D'une manière générale, nous noterons avec un signe «tilde» l'inverse de toute matrice inversible, sauf dans le cas évident  $\tilde{E} = E$ .

par  $dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i$ . En effet, on vérifie par le calcul que :

$$(2.16) \quad \begin{cases} \theta^i(e_j(x)) = \sum_{k=1}^n h_k^i(x) \cdot \tilde{h}_j^k(x) \\ = \delta_j^i. \end{cases}$$

De plus, nous affirmons que le produit scalaire entre les deux vecteurs  $e_i(x)$  et  $e_j(x)$  défini au moyen du  $ds^2$  pseudo-riemannien satisfait la relation de pseudo-orthogonalité :

$$(2.17) \quad \langle e_i(x), e_j(x) \rangle_{ds^2} = \varepsilon_i \delta_i^j.$$

En effet, on vérifie par le calcul que

$$(2.18) \quad \begin{cases} \langle e_i, e_j \rangle_{ds^2} = \sum_{k,l=1}^n g_{kl} dx^k(e_i) dx^l(e_j) \\ = \sum_{k,l=1}^n g_{kl} \tilde{h}_i^k \tilde{h}_j^k \\ = \varepsilon_i \delta_i^j, \end{cases}$$

grâce à la relation matricielle (2.12), écrite sous la forme équivalente  $E = {}^T \tilde{H} \cdot G \cdot \tilde{H}$ . Dans le cas riemannien, on a  $\varepsilon_i = 1$  pour tout  $i = 1, \dots, n$  et les relations précédentes expriment qu'en tout point  $x$ , les  $n$  vecteurs  $e_1(x), \dots, e_n(x)$  forment un  $n$ -èdre orthonormé, *i.e.* un repère orthogonal dont tous les vecteurs sont de norme 1. Puisque ces vecteurs varient analytiquement en fonction du point  $x$ , nous avons effectivement construit une base orthonormée «mobile» qui provient des relations pseudo-métriques infinitésimales fournies par le  $ds^2$ . Réciproquement, les formes  $\theta^i$  duales de ce repère orthonormé mobile représentent le  $ds^2$  via la formule (2.5).

Voici une représentation mentale illustrative. Dans l'espace euclidien tridimensionnel physique standard, tout corps solide rigide se déplaçant tel un ballon de rugby emporte avec lui un système d'axes fixes déterminés à l'avance que l'on peut s'imaginer «imprimés» en tout point de l'espace que ce corps visite dans son mouvement continu : c'est la notion de repère mobile le long d'une courbe de l'espace.

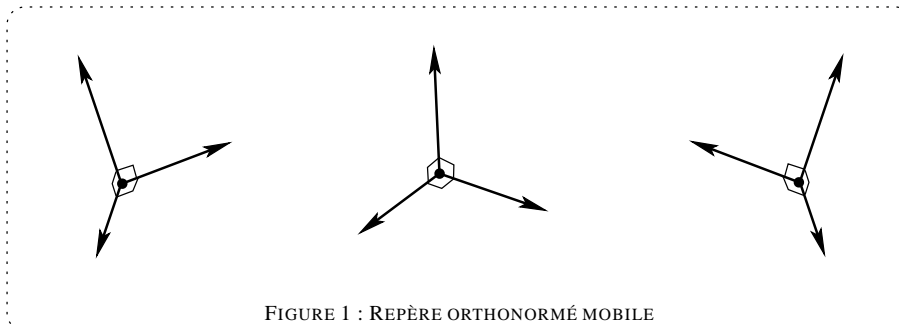


FIGURE 1 : REPÈRE ORTHONORMÉ MOBILE

*Démonstration du Lemme 2.4.* Établissons enfin ce lemme. Pour cela, nous allons appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, bien connu dans le cas des espaces vectoriels équipés d'un produit scalaire euclidien et vérifions qu'il se généralise au cas des formes différentielles, pour un  $ds^2$  pseudo-riemannien.

Cherchons tout d'abord une transformation linéaire à l'origine de la forme  $x \mapsto K \cdot x =: \bar{x}$ , où  $K$  est une matrice, qui redresse le  $ds^2$  à l'origine, c'est-à-dire qui transforme la forme quadratique (non différentielle)  $\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(0) x^i x^j$  en la forme quadratique  $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\bar{x}^k)^2$ . En remplaçant  $\bar{x}^k$  par  $\sum_{i=1}^n K_i^k x^i$  on obtient l'équation :

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(0) x^i x^j &= \sum_k \varepsilon_k (\bar{x}^k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \left( \sum_{i=1}^n K_i^k x^i \right) \left( \sum_{j=1}^n K_j^k x^j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x^i x^j \left( \sum_{k=1}^n K_i^k \cdot \varepsilon_k \cdot K_j^k \right), \end{aligned} \right.$$

d'où

$$(2.20) \quad g_{ij}(0) = \sum_{k=1}^n K_i^k \cdot \varepsilon_k \cdot K_j^k.$$

De manière équivalente, la matrice  $K$  vérifie l'équation matricielle :

$$(2.21) \quad G(0) = {}^T K \cdot E \cdot K,$$

où  $E$  est la matrice diagonale (2.9). Rappelons que toute matrice symétrique non-dégénérée telle que  $G(0)$  est diagonalisable dans une base qui est orthonormale pour le produit scalaire euclidien (voir [Ga1966]). Autrement dit, il existe une matrice orthogonale  $O$ , *i.e.* satisfaisant  $O \cdot {}^T O = I_{n \times n}$ , telle que  $G(0) = {}^T O \cdot D \cdot O$ , où  $D$  est une matrice diagonale qui possède des valeurs propres strictement positives sur les  $p$  premiers éléments de sa diagonale et  $n - p$  valeurs propres strictement négatives sur les derniers éléments. Il en découle que la matrice diagonale  $E \cdot D$  a tous ses éléments diagonaux strictement positifs. Il existe donc une matrice diagonale  $F$  ayant tous ses éléments diagonaux strictement positifs qui est racine carrée de  $E \cdot D$ , *i.e.* telle que  $F^2 = E \cdot D$ . Puisque les matrices diagonales commutent et puisque  $E^2 = I_{n \times n}$ , on a, de manière équivalente :

$$(2.22) \quad D = {}^T F \cdot E \cdot F.$$

En remplaçant cette expression de  $D$  dans  $G(0) = {}^T O \cdot D \cdot O$ , nous avons immédiatement :

$$(2.23) \quad G(0) = {}^T O \cdot {}^T F \cdot E \cdot F \cdot O,$$

et il est maintenant évident qu'il suffit de prendre  $K := F \cdot O$  pour satisfaire l'équation (2.21).



Notons dorénavant  $x$  (au lieu de  $\bar{x}$ ) un tel système de coordonnées qui redresse le  $ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j$  à l'origine, *i.e.* dans lesquelles on a  $g_{ij}(0) = \varepsilon_i \delta_i^j$ . Pour démontrer l'existence des formes différentielles  $\theta^i$ , raisonnons de manière duale. Il suffit en effet d'établir qu'il existe des champs de vecteurs  $e_i$ , duaux des formes différentielles  $\theta^i$ , de la forme  $e_i(x) := \sum_{j=1}^n \tilde{h}_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$  tels que :

$$(2.24) \quad \langle e_i(x), e_j(x) \rangle_{ds^2} = \varepsilon_i \delta_i^j.$$

L'inconnue est la matrice  $\tilde{H}(x) = (\tilde{h}_j^i(x))$ , et l'on doit vérifier qu'il existe une telle matrice qui est solution de (2.24) et qui est analytique par rapport à la variable  $x$ .

Puisque  $g_{11}(0) = \varepsilon_1$ , la racine carrée  $\sqrt{\varepsilon_1 g_{11}(x)}$  est analytique dans un voisinage de l'origine et si l'on pose

$$(2.25) \quad e_1 := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 g_{11}}} \frac{\partial}{\partial x^1},$$

il est évident que  $\langle e_1, e_1 \rangle_{ds^2} = \varepsilon_1$ . Observons que  $e_1(0)$  est un multiple positif de  $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_0$ .

Supposons par récurrence que nous ayons déjà construit  $k$  champs de vecteurs à coefficients analytiques  $e_1(x), \dots, e_k(x)$  définis dans un voisinage de l'origine, tels que  $e_i(0)$  est un multiple positif de  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_0$  pour  $i = 1, \dots, k$  et tels que

$$(2.26) \quad \langle e_i(x), e_j(x) \rangle_{ds^2} = \varepsilon_i \delta_i^j,$$

pour tous  $i, j = 1, \dots, k$ , avec un certain entier  $k$  satisfaisant  $1 \leq k \leq n-1$ . Cherchons un  $k+1$ -ième champ de vecteurs de la forme

$$(2.27) \quad e'_{k+1}(x) := \frac{\partial}{\partial x^{k+1}} + \sum_{j=1}^k a_j(x) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

qui est orthogonal à  $e_1, \dots, e_k$ , c'est-à-dire satisfaisant :

$$(2.28) \quad 0 = \langle e'_{k+1}, e_i \rangle_{ds^2} = \langle \partial_{x^{k+1}}, e_i \rangle_{ds^2} + \sum_{j=1}^k a_j \langle \partial_{x^j}, e_i \rangle_{ds^2},$$

pour  $i = 1, \dots, k$ . Grâce à l'hypothèse que  $e_i(0)$  est un multiple positif de  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_0$ , grâce à l'hypothèse de récurrence (2.26) et grâce au fait que les formules de résolution dites «de Cramer» sont algébriques, nous déduisons que ce système linéaire de  $k$  équations linéaires à  $k$  inconnues admet une unique solution  $a_1(x), \dots, a_k(x)$ , qui est analytique dans un voisinage (peut-être restreint) de l'origine. Il ne reste plus qu'à dilater  $e'_{k+1}$  de manière à normaliser sa norme au carré : pour assurer que  $\langle e_{k+1}, e_{k+1} \rangle_{ds^2} = \varepsilon_{k+1}$ , il suffit évidemment de prendre

$$(2.29) \quad e_{k+1} := \sqrt{\frac{\varepsilon_{k+1}}{\langle e'_{k+1}, e'_{k+1} \rangle_{ds^2}}} \cdot e'_{k+1},$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 2.4.  $\square$

### §3. ÉQUATIONS DE STRUCTURE ET COURBURE PSEUDO-RIEMANNIENNE

**3.1. Convention sur la notation des sommes.** Nous n'adopterons *pas* la convention dite «d'Einstein»<sup>9</sup>, qui consiste à sous-entendre tout signe «somme» dès que deux indices sont répétés : une somme est une somme et mérite de figurer pleinement aussi bien dans l'écriture des formules intermédiaire que dans les expressions finales. De plus, à cause de la présence du facteur non sommant  $\varepsilon_i$ , si nous adoptions cette convention, nous devrions fréquemment notifier qu'elle ne s'applique pas, ce qui reviendrait à lui ôter tout intérêt simplificateur. En revanche, nous admettons l'allègement notational qui consiste à sous-entendre le domaine de variation des indices de sommation. Puisque toutes les sommes qui apparaîtront dans ce mémoire portent sur des indices compris entre 1 et  $n$ , nous écrirons  $\sum_i$ ,  $\sum_{i,j}$ ,  $\sum_{i_1, i_2, i_3}$  et  $\sum_{i < j}$  à la place de  $\sum_{i=1}^n$ ,  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n$ ,  $\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n$  et  $\sum_{1 \leq i < j \leq n}$ , respectivement.

**3.2. Différentiation extérieure des formes  $\theta^i$ .** Rappelons l'expression des formes  $\theta^i$  en fonction des formes  $dx^i$  ainsi que les expressions inverses :

$$(3.3) \quad \theta^i = \sum_j h_j^i \cdot dx^j \quad \text{et} \quad dx^i = \sum_j \tilde{h}_j^i \cdot \theta^j.$$

Autrement dit, aussi bien la collection  $(dx^1, \dots, dx^n)$  que la collection  $(\theta^1, \dots, \theta^n)$  constituent une base de formes différentielles de degré 1 sur  $\mathbb{R}^n$ . Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure aux formes  $\theta^i$ , utilisons les expressions inverses (3.3), réorganisons le résultat et utilisons la relation élémentaire  $\sum_j \sum_k A_{jk} \cdot \theta^j \wedge \theta^k \equiv \sum_{j < k} (A_{jk} - A_{kj}) \cdot \theta^j \wedge \theta^k$ , ce qui donne :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{aligned} d\theta^i &= \sum_{l_2} dh_{l_2}^i \wedge dx^{l_2} \\ &= \sum_{l_1} \sum_{l_2} \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} \cdot dx^{l_1} \wedge dx^{l_2} \\ &= \sum_{l_1} \sum_{l_2} \sum_j \sum_k \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} \tilde{h}_j^{l_1} \tilde{h}_k^{l_2} \cdot \theta^j \wedge \theta^k \\ &= \sum_j \sum_k \theta^j \wedge \theta^k \cdot \left( \sum_{l_1} \sum_{l_2} \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} \tilde{h}_j^{l_1} \tilde{h}_k^{l_2} \right) \\ &= \sum_{j < k} \theta^j \wedge \theta^k \cdot \left( \sum_{l_1} \sum_{l_2} \tilde{h}_j^{l_1} \tilde{h}_k^{l_2} \left[ \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h_{l_1}^i}{\partial x^{l_2}} \right] \right). \end{aligned} \right.$$

<sup>9</sup>Einstein est censé avoir dit à l'un de ses amis : «J'ai fait une grande découverte en mathématiques ; j'ai supprimé le signe de sommation chaque fois que la somme porte sur un indice qui figure deux fois» (cité page 189 de la traduction française [Ei1916]).

En posant pour tout  $j < k$

$$(3.5) \quad K_{jk}^i := \sum_{l_1} \sum_{l_2} \tilde{h}_j^{l_1} \tilde{h}_k^{l_2} \left[ \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h_{l_1}^i}{\partial x^{l_2}} \right]$$

et en prolongeant cette définition pour  $j \geq k$  de telle sorte que  $K_{jk}^i := -K_{kj}^i$ , nous obtenons le lemme suivant.

**Lemme 3.6.** *Il existe des fonctions  $K_{jk}^i = K_{jk}^i(x)$  satisfaisant les relations d'antisymétrie indicielle  $K_{jk}^i = -K_{kj}^i$  telles que :*

$$(3.7) \quad d\theta^i = \sum_{j < k} K_{jk}^i \cdot \theta^j \wedge \theta^k.$$

Observons au passage que les mêmes fonctions  $K_{jk}^i$  apparaissent dans les crochets de Lie des champs de vecteurs duaux  $e_i$  des formes  $\theta^i$ , à un signe « $-$ » global près (une telle observation ne sera pas utilisée par la suite).

**Lemme 3.8.** *Avec ces mêmes fonctions  $K_{jk}^i(x)$ , on a :*

$$(3.9) \quad [e_j, e_k] = - \sum_i K_{jk}^i \cdot e_i.$$

*Démonstration.* Bien qu'il existe une démonstration directe à partir des relations de dualité  $\theta^i(e_j) = \delta_j^i$ , nous préférons développer la démonstration qui passe par les calculs explicites, afin de «muscler» progressivement notre capacité au calcul formel. Rappelons que  $e_i = \sum_j \tilde{h}_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Pour développer  $[e_j, e_k] = \left[ \sum_{l_1} \tilde{h}_j^{l_1} \frac{\partial}{\partial x^{l_1}}, \sum_{l_2} \tilde{h}_k^{l_2} \frac{\partial}{\partial x^{l_2}} \right]$ , effectuons alors le calcul suivant : pour passer à la troisième ligne, intervertissons  $l_1$  et  $l_2$  dans la seconde double somme ; pour passer à la quatrième ligne, réexprimons les champs de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial x^{l_2}}$  au moyen des  $e_i$  via les formules  $\frac{\partial}{\partial x^{l_2}} = \sum_i h_{l_2}^i e_i$  ; pour passer à la cinquième ligne, réorganisons les

signes de sommation, ce qui donne :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{aligned} [e_j, e_k] &= \left[ \sum_{l_1} \tilde{h}_j^{l_1} \frac{\partial}{\partial x^{l_1}}, \sum_{l_2} \tilde{h}_k^{l_2} \frac{\partial}{\partial x^{l_2}} \right] \\ &= \sum_{l_1} \tilde{h}_j^{l_1} \sum_{l_2} \frac{\partial \tilde{h}_k^{l_2}}{\partial x^{l_1}} \frac{\partial}{\partial x^{l_2}} - \sum_{l_2} \tilde{h}_k^{l_2} \sum_{l_1} \frac{\partial \tilde{h}_j^{l_1}}{\partial x^{l_2}} \frac{\partial}{\partial x^{l_1}} \\ &= \sum_{l_2} \frac{\partial}{\partial x^{l_2}} \cdot \left[ \sum_{l_1} \left( \tilde{h}_j^{l_1} \frac{\partial \tilde{h}_k^{l_2}}{\partial x^{l_1}} - \tilde{h}_k^{l_1} \frac{\partial \tilde{h}_j^{l_2}}{\partial x^{l_1}} \right) \right] \\ &= \sum_i \sum_{l_1} \sum_{l_2} e_i \cdot \left[ \tilde{h}_j^{l_1} h_{l_2}^i \frac{\partial \tilde{h}_k^{l_2}}{\partial x^{l_1}} - \tilde{h}_k^{l_1} h_{l_2}^i \frac{\partial \tilde{h}_j^{l_2}}{\partial x^{l_1}} \right] \\ &= \sum_i e_i \cdot \left[ \sum_{l_1} \tilde{h}_j^{l_1} \left( \sum_{l_2} h_{l_2}^i \frac{\partial \tilde{h}_k^{l_2}}{\partial x^{l_1}} \right) - \sum_{l_1} \tilde{h}_k^{l_1} \left( \sum_{l_2} h_{l_2}^i \frac{\partial \tilde{h}_j^{l_2}}{\partial x^{l_1}} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Maintenant, nous devons éliminer des dérivées partielles (intempêtes)  $\frac{\partial \tilde{h}_k^{l_2}}{\partial x^{l_1}}$  et  $\frac{\partial \tilde{h}_j^{l_2}}{\partial x^{l_1}}$  des composantes de la matrice inverse  $\tilde{H}$ , *puisqu'elles n'apparaissent pas dans l'expression (3.5) de  $K_{jk}^i$* . Pour cela, différencions par rapport à  $x^{l_1}$  la première famille d'identités (2.13), écrites avec les indices  $i, k$  et  $l_2$  à la place des indices  $i, j$  et  $k$ , ce qui donne :

$$(3.11) \quad 0 = \sum_{l_2} \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} \tilde{h}_k^{l_2} + \sum_{l_2} h_{l_2}^i \frac{\partial \tilde{h}_k^{l_2}}{\partial x^{l_1}}.$$

Grâce à cette relation, nous pouvons remplacer directement le terme  $\sum_{l_2} h_{l_2}^i \frac{\partial \tilde{h}_k^{l_2}}{\partial x^{l_1}}$  qui apparaît avant le signe « $-$ » dans les premières parenthèses de la dernière ligne de (3.10) par  $-\sum_{l_2} \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} \tilde{h}_k^{l_2}$ ; procédons de même pour la seconde parenthèse de la dernière ligne de (3.10); après réorganisation des sommes et reconnaissance des fonctions  $K_{jk}^i$ , nous obtenons :

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{aligned} [e_j, e_k] &= \sum_i e_i \cdot \left[ \sum_{l_1} \tilde{h}_j^{l_1} \left( - \sum_{l_2} \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} \tilde{h}_k^{l_2} \right) + \sum_{l_1} \tilde{h}_k^{l_1} \left( \sum_{l_2} \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} \tilde{h}_j^{l_2} \right) \right] \\ &= \sum_i e_i \cdot \left( \sum_{l_1} \sum_{l_2} \tilde{h}_j^{l_1} \tilde{h}_k^{l_2} \left[ - \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} + \frac{\partial h_{l_1}^i}{\partial x^{l_2}} \right] \right) \\ &= - \sum_i e_i \cdot K_{jk}^i, \end{aligned} \right.$$

ce qui complète la démonstration.  $\square$

**3.13. Introduction des composantes de rotation (connexion associée).** Maintenant, nous allons transformer les équations de structure (3.7) de manière à faire apparaître les composantes de la connexion de Levi-Civita canoniquement associée à la métrique riemannienne originale, et ce relativement au co-repère mobile des  $\theta^i$  qui diagonalise la métrique.

**Lemme 3.14.** *Il existe une unique famille de formes différentielles  $\theta_j^i$  de degré 1 satisfaisant les relations d'antisymétrie indicielle  $\theta_j^i = -\theta_i^j$ , telles que les équations de structure (3.7) peuvent se réécrire sous la forme :*

$$(3.15) \quad d\theta^i = \varepsilon_i \sum_j \theta^j \wedge \theta_j^i.$$

*Démonstration.* Décomposons les formes  $\theta_j^i$  recherchées selon la base des  $\theta^k$  de la manière suivante :

$$(3.16) \quad \theta_j^i = \sum_k \Gamma_{jk}^i \cdot \theta^k,$$

avec des fonctions inconnues  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(x)$  qui satisfont les relations d'antisymétrie  $\Gamma_{jk}^i = -\Gamma_{ik}^j$ , pour s'assurer que  $\theta_j^i = -\theta_i^j$ . En remplaçant cette expression dans (3.15) en prenant (3.7) pour point de départ, nous pouvons identifier le système d'équations linéaires que doivent satisfaire les inconnues  $\Gamma_{jk}^i$  :

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j < k} K_{jk}^i \cdot \theta^j \wedge \theta^k = d\theta^i \\ = \varepsilon_i \sum_j \theta^j \wedge \theta_j^i \\ = \sum_{j,k} \varepsilon_i \Gamma_{jk}^i \cdot \theta^j \wedge \theta^k \\ = \sum_{j < k} (\varepsilon_i \Gamma_{jk}^i - \varepsilon_i \Gamma_{kj}^i) \cdot \theta^j \wedge \theta^k, \end{array} \right.$$

ce qui nous donne, après identification des coefficients de la base de 2-formes  $(\theta^j \wedge \theta^k)_{1 \leq j < k \leq n}$  et après multiplication par la constante  $\varepsilon_i$  (qui satisfait bien sûr  $\varepsilon_i^2 = 1$ ) :

$$(3.18) \quad \varepsilon_i K_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i.$$

Écrivons cette égalité trois fois : la première fois, telle quelle ; la seconde fois en remplaçant le triplet  $(i, j, k)$  par  $(k, j, i)$  dans (3.18) ; et la troisième fois en remplaçant le triplet  $(i, j, k)$  par  $(j, k, i)$  dans (3.18), ce qui donne :

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_i K_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i, \\ \varepsilon_k K_{ji}^k = \Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k, \\ \varepsilon_j K_{ki}^j = \Gamma_{ki}^j - \Gamma_{ik}^j. \end{array} \right.$$

Additionnons ces trois identités terme à terme en tenant compte des relations d'antisymétrie satisfaites par les coefficients  $\Gamma_{jk}^i$ , qui entraînent notamment que les quatre termes  $-\Gamma_{kj}^i + \Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ki}^j$  s'annulent par paire, ce qui donne la solution :

$$(3.20) \quad \Gamma_{jk}^i := \frac{1}{2} \left( \varepsilon_i K_{jk}^i + \varepsilon_k K_{ji}^k + \varepsilon_j K_{ki}^j \right).$$

On vérifie que cette solution, unique par construction, satisfait effectivement  $\Gamma_{jk}^i = -\Gamma_{ik}^j$ , ce qui achève la démonstration du lemme.  $\square$

Les coefficients  $\Gamma_{jk}^i$  sont les coefficients de Christoffel de la connexion de Levi-Civita dans le co-repère diagonalisant.

$\square$  Interprétation géométrique à compléter !!!

**3.21. Calcul des coefficients de courbure.** Ce calcul sera d'abord effectué de manière non explicite, grâce à un raisonnement d'algèbre linéaire utilisé fréquemment par Élie Cartan dans ses travaux. Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure à l'équation  $d\theta^i = \varepsilon_i \sum_j \theta^j \wedge \theta_j^i$ , remplaçons l'expression de  $d\theta^j$  qui apparaît dans le membre de droite de la première ligne et factorisons le résultat :

$$(3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = dd\theta^j = \varepsilon_i \sum_j (d\theta^j \wedge \theta_j^i - \theta^j \wedge d\theta_j^i) \\ = \varepsilon_i \sum_j \sum_k \varepsilon_j \cdot \theta^k \wedge \theta_k^j \wedge \theta_j^i - \varepsilon_i \sum_j \theta^j \wedge d\theta_j^i \\ = \varepsilon_i \sum_j \theta^j \wedge \left( \sum_k \varepsilon_k \cdot \theta_k^j \wedge \theta_j^i - d\theta_j^i \right). \end{array} \right.$$

Afin d'introduire les coefficients de courbure  $R_{jkl}^i$  (sans obtenir encore leur expression explicite), nous pouvons maintenant appliquer à ces équations un argument indirect, appelé traditionnellement *Lemme de Cartan*, qui s'énonce pour les 2-formes comme suit.

**Lemme 3.23.** *Une collection de 2-formes  $\Theta^1, \dots, \Theta^n$ , que l'on peut toujours décomposer selon la base des 2-formes  $(\theta^k \wedge \theta^l)_{1 \leq k < l \leq n}$ , de la manière suivante :*

$$(3.24) \quad \Theta^j = \sum_{k < l} A_{kl}^j \cdot \theta^k \wedge \theta^l,$$

pour  $j = 1 \dots, n$ , avec certains coefficients  $A_{kl}^j$ , satisfait l'identité

$$(3.25) \quad 0 = \sum_j \theta^j \wedge \Theta^j$$

si et seulement si les coefficients  $A_{kl}^j$ , dont on prolonge la définition par  $A_{kl}^j := -A_{lk}^j$  pour  $k \geq l$ , satisfont la relation de symétrie indicelle :

$$(3.26) \quad 0 = A_{kl}^j + A_{jk}^l + A_{ij}^k$$

(permutation circulaire dans le sens trigonométrique), pour tous indices  $i, j, k = 1, \dots, n$ .

Avant de démontrer ce lemme, appliquons-le, pour tout indice  $i$  fixé, aux 2-formes différentielles définies par  $\Theta_j^i := d\theta_j^i - \sum_k \varepsilon_k \cdot \theta_j^k \wedge \theta_k^i$ . Elles satisfont effectivement l'identité :  $0 = \sum_j \theta_j^i \wedge \Theta_j^i$ , d'après (3.22) et elles satisfont  $\Theta_j^i = -\Theta_i^j$ . Décomposons donc les  $\Theta_j^i$  selon la base des 2-formes  $(\theta^k \wedge \theta^l)_{1 \leq k < l \leq n}$ , en introduisant des coefficients  $R_{jkl}^i$  :

$$(3.27) \quad \Theta_j^i =: \sum_{k < l} R_{jkl}^i \cdot \theta^k \wedge \theta^l.$$

Nous avons les relations d'antisymétrie  $R_{jkl}^i = -R_{ikl}^j$ , provenant de  $\Theta_j^i = -\Theta_i^j$ . Bien entendu, nous prolongeons la définition des  $R_{jkl}^i$  en posant  $R_{jkl}^i := -R_{jlk}^i$  pour  $k \geq l$ . Le Lemme 3.23 affirme alors que les coefficients  $R_{jkl}^i$  satisfont les relations de symétrie indicielle suivantes :

$$(3.28) \quad \begin{cases} 0 = R_{jkl}^i + R_{ljk}^i + R_{klj}^i, \\ 0 = R_{jkl}^i + R_{jlk}^i, \\ 0 = R_{jkl}^i + R_{ilk}^j \end{cases}$$

(permutation circulaire de la gauche vers la droite sur la ligne des indices inférieurs), les deux dernières étant réécrites pour mémoire. *Ce sont les seules relations de symétrie indicielle que satisfont les coefficients  $R_{jkl}^i$ .* De plus, par construction, ces coefficients  $R_{jkl}^i$  sont déterminés de manière unique. On les appelle *coefficients de courbure* et ils sont d'une importance fondamentale. En résumé, nous avons établi l'identité suivante :

$$(3.29) \quad d\theta_j^i = \sum_k \varepsilon_k \cdot \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \sum_{k < l} R_{jkl}^i \cdot \theta^k \wedge \theta^l.$$

Pour l'instant, leur expression explicite ne nous est pas encore connue. Appliquer le Lemme (3.23) de Cartan présente donc l'inconvénient de ne pas donner accès directement à l'expression des coefficients de courbure. Néanmoins, appliquer ce lemme d'emblée présente trois avantages majeurs : premièrement, cela nous permet d'obtenir facilement toutes les relations de symétrie indicielles sur les coefficients de courbure<sup>10</sup> ; deuxièmement, cela nous permet de *préparer le terrain pour les calculs explicites* ; troisièmement, sans connaître explicitement les coefficients  $R_{jkl}^i$ , il est possible de voir par un raisonnement élémentaire (voir Lemme ?? ci-dessous) qu'ils sont invariants par changement de coordonnées, tandis que la vérification de cette propriété d'invariance en travaillant directement à partir des expressions complètes (2. ??) serait une tâche de calcul formel substantielle<sup>11</sup>.

<sup>10</sup>Au contraire, nous pourrions éprouver certaines difficultés à deviner ces relations en examinant l'expression explicite des  $R_{jkl}^i$  donnée par (2. ??) ci-dessous.

<sup>11</sup>C'est peut-être pour ces raisons qu'Élie Cartan, au fur et à mesure que sa théorie des systèmes différentiels extérieurs mûrissait, et parce qu'il avait une fréquentation journalière de la complexité des calculs explicites, en est venu à mettre au point une manière de les «court-circuiter», de les «éviter», tout en élaborant des raisonnements indirects astucieux qui permettent quand même de conserver toutes les informations importantes.

*Preuve du Lemme 3.23.* Remplaçons les expressions (3.24) de  $\Theta^j$  dans l'équation (3.25), et réorganisons la somme, ce qui donne :

$$(3.30) \quad \begin{cases} 0 = \sum_j \sum_{k < l} A_{kl}^j \cdot \theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l \\ = \sum_{j < k < l} \left[ A_{kl}^j + A_{jk}^l + A_{lj}^k \right] \cdot \theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l, \end{cases}$$

d'où les relations désirées (2.), puisque la famille  $(\theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l)_{1 \leq j < k < l \leq n}$ , constitue une base de 3-formes.  $\square$

### 3.31. Invariance des composantes de courbure par application isométrique.

Une telle invariance, qui généralise le *Theorema Egregium* de Gauss, est particulièrement significative et mérite d'être citée à cet endroit.

Supposons donnée une application  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  entre deux variétés pseudo-riemanniennes locales  $M$  et  $\bar{M}$  équipées chacune d'une pseudo-métrique diagonalisée  $ds^2 = \sum_i \varepsilon_i (\theta^i)^2$  et  $d\bar{s}^2 = \sum_i \varepsilon_i (\bar{\theta}^i)^2$ , qui transforme la collection des formes  $(\bar{\theta}^i)_{1 \leq i \leq n}$  en la collection des formes  $(\theta^i)_{1 \leq i \leq n}$ , c'est-à-dire telle que l'on a  $\bar{\theta}^i = \theta^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , lorsque l'on remplace  $\bar{x}$  en fonction de  $x$  dans l'expression de  $\bar{\theta}^i$ . Dans la Section 5 ci-dessous, nous démontrerons que toute isométrie entre variétés riemanniennes se ramène, après un changement éventuel du co-repère des formes  $\theta^i$  qui diagonalisent le  $ds^2$ , à une telle transformation satisfaisant  $\bar{\theta}^i = \theta^i$ . De manière équivalente, une telle isométrie envoie exactement le repère orthonormé des  $e_i$  sur le repère orthonormé des  $\bar{e}_i$ .

**Assertion 3.32.** *Sous ces hypothèses, les composantes de la courbure se correspondent terme à terme, i.e. on a :*

$$(3.33) \quad \bar{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i,$$

pour tous  $i, j, k, l = 1, \dots, n$ , après remplacement de  $\bar{x}$  en fonction de  $x$  dans l'expression de  $\bar{R}_{jkl}^i$ .

*Démonstration.* En effet, différencions extérieurement les identités  $\bar{\theta}^i = \theta^i$  et appliquons deux fois le Lemme 3.14, ce qui donne les identités :

$$(3.34) \quad d\bar{\theta}^i = \varepsilon_i \sum_j \bar{\theta}^j \wedge \bar{\theta}_j^i = \varepsilon_i \sum_j \theta^j \wedge \theta_j^i = d\theta^i,$$

pour  $i = 1, \dots, n$ . Grâce aux relations  $\bar{\theta}^j = \theta^j$  et grâce à l'unicité des formes  $\bar{\theta}_j^i$ , nous en déduisons que  $\bar{\theta}_j^i = \theta_j^i$ , toujours après remplacement de  $\bar{x}$  en fonction de  $x$ . À nouveau, grâce aux identités suivantes :

$$(3.35) \quad \begin{cases} \sum_{k < l} R_{jkl}^i \cdot \theta^k \wedge \theta^l = d\theta_j^i - \sum_k \varepsilon_k \cdot \theta_j^k \wedge \theta_k^i \\ = d\bar{\theta}_j^i - \sum_k \varepsilon_k \cdot \bar{\theta}_j^k \wedge \bar{\theta}_k^i \\ = \sum_{k < l} \bar{R}_{jkl}^i \cdot \bar{\theta}^k \wedge \bar{\theta}^l, \end{cases}$$



et grâce à l'unicité des coefficients de courbure, nous déduisons les identités (3.33), comme annoncé.  $\square$

En particulier, dans le cas des surfaces 2-dimensionnelles, en tenant compte des relations de symétrie indicelle (3.28), on vérifie<sup>12</sup> qu'il n'existe qu'une seule composante de courbure, laquelle s'identifie à la courbure de Gauss de la surface. L'Assertion 3.32 établit alors que la courbure de Gauss d'une surface est invariante par toute application isométrique : c'est le fameux *Theorema egregium* de Gauss ([Ga1828], §12).

**3.36. Dérivées covariantes.** Pour préparer le calcul explicite des coefficients de courbure, réécrivons d'abord la différentielle

$$(3.37) \quad dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot dx^i$$

d'une fonction  $F = F(x)$  quelconque dans le système de bases duales  $(\theta^i)$  et  $(e_i)$ , grâce aux formules de changement de base inverses de (3.3), ce qui donne :

$$(3.38) \quad \left\{ \begin{aligned} dF &= \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot dx^i \\ &= \sum_i \sum_j \frac{\partial F}{\partial x_i} \tilde{h}_j^i \cdot \theta^j \\ &= \sum_i \left( \sum_j \tilde{h}_i^j \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \cdot \theta^i. \end{aligned} \right.$$

Nous reconnaissons la dérivation  $e_i(F)$  dans les parenthèses, ce qui montre que la différentielle  $dF$  s'exprime par une formule aussi simple que la formule originale (3.37) dans le système de bases duales  $(\theta^i)$  et  $(e_i)$  :

$$(3.39) \quad dF = \sum_i e_i(F) \cdot \theta^i.$$

Cette formule est à retenir pour la suite. Afin d'insister encore plus sur l'analogie avec la formule (3.37), nous noterons plutôt  $\frac{\partial F}{\partial \theta^i}$  les dérivées  $e_i(F)$  et nous les appellerons *dérivées covariantes de F*. En définitive, la différentielle de  $F$  s'écrit :

$$(3.40) \quad dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial \theta^i} \cdot \theta^i.$$

**3.41. Calcul explicite des composantes de courbure.** Venons-en enfin à ce calcul. L'application précédente du Lemme de Cartan tient lieu de guide pour la conduite du calcul complet. Ainsi, d'après (3.28), nous savons que les coefficients  $R_{jkl}^i$  doivent apparaître dans le membre de droite de l'expression  $d\theta_j^i - \sum_k \varepsilon_k \theta_j^k \wedge \theta_k^i$ , lorsqu'on remplace ces formes  $\theta_j^i$ ,  $\theta_j^k$  et  $\theta_k^i$ , par leurs expressions explicites (3.16).

<sup>12</sup>Voir le Lemme 3. ci-dessous qui compte le nombre de composantes de courbure linéairement indépendantes dans le cas  $n \geq 2$  général.

Tout d'abord, appliquons l'opérateur de différentiation extérieure à cette représentation (3.16), ce qui donne, grâce à la sous-section précédente et en remplaçant  $d\theta^k$ , puis en remplaçant  $\theta_l^k$  et en réorganisant les sommes :

$$(3.42) \quad \left\{ \begin{aligned} d\theta_j^i &= \sum_k d\Gamma_{jk}^i \cdot \theta^k + \sum_k \Gamma_{jk}^i \cdot d\theta^k \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial \theta^l} \cdot \theta^l \wedge \theta^k + \sum_{k,l} \varepsilon_k \Gamma_{jk}^i \cdot \theta^l \wedge \theta_l^k \\ &= \sum_{k<l} \left( \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial \theta^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial \theta^l} \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l + \\ &\quad + \sum_{k<l} \left( \sum_m \varepsilon_m [\Gamma_{jm}^i \Gamma_{kl}^m - \Gamma_{jm}^i \Gamma_{lk}^m] \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons par ailleurs les expressions de  $\theta_j^k \wedge \theta_k^i$  dans la somme :

$$(3.43) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_k \varepsilon_k \cdot \theta_j^k \wedge \theta_k^i &= \sum_{k,l,m} \varepsilon_k \Gamma_{jl}^k \Gamma_{km}^i \cdot \theta^l \wedge \theta^m \\ &= \sum_{k<l} \left( \sum_m \varepsilon_m [\Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^i - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^i] \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l. \end{aligned} \right.$$

En soustrayant (3.43) de (3.42), nous obtenons l'expression explicite, en fonction des coefficients de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$ , des composantes de la courbure :

$$(3.44) \quad R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial \theta^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial \theta^l} + \sum_m \varepsilon_m [\Gamma_{jm}^i \Gamma_{kl}^m - \Gamma_{jm}^i \Gamma_{lk}^m - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^i + \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^i].$$

**3.45. Commentaires et spéculations sur l'expression explicite du tenseur de courbure.** Il est important de faire remarquer que cette expression des composantes de la courbure n'est pas encore l'analogue (à  $n \geq 2$  dimension) de la *formula egregia* (1.) découverte par Gauss. Pour obtenir l'analogue complet, il faudrait remplacer dans (3.44) l'expression complète des coefficients  $\Gamma_{jk}^i$  donnée par (3.20), sans oublier l'expression complète des  $K_{jk}^i$  donnée par (3.5). Après un calcul dont nous ne reproduisons pas les étapes intermédiaires ici, nous obtenons l'expression complète suivante des  $R_{jkl}^i$  en fonction des éléments de  $H$  et de  $\tilde{H}$  : d'après (3.44), il faut additionner deux et quatre expressions de la forme suivante, à permutation

d'indices près :

$$(3.46) \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial \theta^l} = -\frac{1}{2} \sum_{l_1, l_2, p} \tilde{h}_l^p \left( \varepsilon_i \tilde{h}_j^{l_1} \tilde{h}_k^{l_2} \left[ \frac{\partial^2 h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1} \partial x^p} - \frac{\partial^2 h_{l_1}^i}{\partial x^{l_2} \partial x^p} \right] + \right. \\ & \left. + \varepsilon_k \tilde{h}_j^{l_1} \tilde{h}_i^{l_2} \left[ \frac{\partial^2 h_{l_2}^k}{\partial x^{l_1} \partial x^p} - \frac{\partial^2 h_{l_1}^k}{\partial x^{l_2} \partial x^p} \right] + \varepsilon_j \tilde{h}_k^{l_1} \tilde{h}_i^{l_2} \left[ \frac{\partial^2 h_{l_2}^j}{\partial x^{l_1} \partial x^p} - \frac{\partial^2 h_{l_1}^j}{\partial x^{l_2} \partial x^p} \right] \right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{l_1, l_2, p, q_1, q_2} \tilde{h}_l^p \frac{\partial h_{q_1}^{q_2}}{\partial x^p} \left( \varepsilon_i \left( \tilde{h}_{q_2}^{l_1} \tilde{h}_j^{q_1} \tilde{h}_k^{l_2} + \tilde{h}_j^{l_1} \tilde{h}_k^{q_1} \tilde{h}_{q_2}^{l_2} \right) \left[ \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h_{l_1}^i}{\partial x^{l_2}} \right] \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon_k \left( \tilde{h}_{q_2}^{l_1} \tilde{h}_j^{q_1} \tilde{h}_i^{l_2} + \tilde{h}_j^{l_1} \tilde{h}_i^{q_1} \tilde{h}_{q_2}^{l_2} \right) \left[ \frac{\partial h_{l_2}^k}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h_{l_1}^k}{\partial x^{l_2}} \right] \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon_j \left( \tilde{h}_{q_2}^{l_1} \tilde{h}_k^{q_1} \tilde{h}_i^{l_2} + \tilde{h}_k^{l_1} \tilde{h}_i^{q_1} \tilde{h}_{q_2}^{l_2} \right) \left[ \frac{\partial h_{l_2}^j}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h_{l_1}^j}{\partial x^{l_2}} \right] \right), \\ & \sum_m \varepsilon_m \Gamma_{jm}^i \Gamma_{kl}^m = \frac{1}{4} \sum_{m, l_1, l_2, q_1, q_2} \left( \varepsilon_i \tilde{h}_j^{l_1} \tilde{h}_m^{l_2} \left[ \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h_{l_1}^i}{\partial x^{l_2}} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon_m \tilde{h}_j^{l_1} \tilde{h}_i^{l_2} \left[ \frac{\partial h_{l_2}^m}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h_{l_1}^m}{\partial x^{l_2}} \right] + \varepsilon_j \tilde{h}_m^{l_1} \tilde{h}_i^{l_2} \left[ \frac{\partial h_{l_2}^j}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h_{l_1}^j}{\partial x^{l_2}} \right] \right) \times \\ & \quad \times \left( \varepsilon_m \tilde{h}_k^{q_1} \tilde{h}_l^{q_2} \left[ \frac{\partial h_{q_2}^m}{\partial x^{q_1}} - \frac{\partial h_{q_1}^m}{\partial x^{q_2}} \right] + \varepsilon_l \tilde{h}_k^{q_1} \tilde{h}_m^{q_2} \left[ \frac{\partial h_{q_2}^l}{\partial x^{q_1}} - \frac{\partial h_{q_1}^l}{\partial x^{q_2}} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon_k \tilde{h}_l^{q_1} \tilde{h}_m^{q_2} \left[ \frac{\partial h_{q_2}^k}{\partial x^{q_1}} - \frac{\partial h_{q_1}^k}{\partial x^{q_2}} \right] \right). \end{aligned} \right.$$

Aucune simplification notable n'apparaît lorsque l'on additionne ces six termes. Notons la présence des dérivées partielles des coefficients  $h_j^i(x)$  du  $ds^2$  diagonalisé sous la forme  $ds^2 = \sum_i \varepsilon_i \left( \sum_j h_j^i(x) dx^j \right)^2$ , et non pas des coefficients  $g_{ij}(x)$  du  $ds^2$  original, comme c'était le cas dans la *formula egregia* (1.). En toute rigueur, on devrait transformer encore l'expression (3.46) pour revenir aux coefficients  $g_{ij}(x)$ , grâce à la relation (2.12) qui relie la matrice  $G$  à la matrice  $H$ . Néanmoins, deux difficultés se présentent. Premièrement, cette relation ne définit pas  $H$  de manière unique, à cause de l'observation effectuée après l'énoncé du Lemme 2.4. Ainsi, pour assurer que  $H$  s'exprime explicitement en fonction de  $G$ , il est nécessaire d'opérer une normalisation préalable. Par exemple, si l'on choisit  $H$  symétrique ou triangulaire (supérieure ou inférieure), il existera une seule matrice  $H$  solution de (2.12). Deuxièmement, la résolution explicite de cette équation (2.12) d'inconnue  $H$  n'est pas aisée, et nous ignorons l'existence de formules explicites valable pour  $n \geq 3$ . Dans le cas  $n = 2$ , de telles formules existent et nous résumerons le calcul de  $R_{121}^2$  en fonction de  $g_{11}$ , de  $g_{12}$  et de  $g_{22}$ . dans le §3.?? ci-dessous.

En définitive, nous pensons qu'il est préférable de considérer que dans l'application de la méthode de Cartan, la donnée fondamentale de base n'est pas la matrice  $G$  des coefficients  $g_{ij}$ , mais la matrice  $H$  des coefficients  $h_j^i$  du repère diagonalisant.

De toute façon, l'analogie exacte de la *formula egregia* (1.) démontrée par Gauss s'obtient plus aisément à partir du calcul classique des coefficients de courbure  $R_{jkl}^i$  dans le repère – en général non diagonalisant – constitué des vecteurs  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  naturellement associés au système de coordonnées  $(x^i)$ , calcul que nous avons résumé dans la Section 1. En effet, en remplaçant les expressions des coefficients de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$  dans (1.), nous avons obtenu l'expression (1.28). Dans le cas  $n = 2$  et à un changement de notation près, c'est effectivement la *formula egregia* (1.) que l'on retrouve pour le seul coefficient de courbure  $R_{212}^1$  existant. Dans la quasi-totalité des manuels de géométrie différentielle, on s'en tient à l'expression (1.) du tenseur de courbure en fonction des coefficients de Christoffel de la connexion de Levi-Civita.

Pour terminer ce commentaire, étudions les différences entre (1.26) et (3.44). Les dérivées parallèles aux lignes de coordonnées qui apparaissent dans les deux premiers termes de (1.26) sont remplacées dans les deux premiers termes de (3.44) par des dérivées covariantes. En général, ces dérivées covariantes ne commutent pas entre elles, à cause de la relation (3.9). C'est aussi parce que les dérivées covariantes ne commutent pas entre elles qu'il y a quatre sommes de termes quadratiques en les  $\Gamma_{jk}^i$  dans (3.44), au lieu de deux seulement dans (1.26). En effet, la propriété d'être de torsion nulle que possède la connexion de Levi-Civita s'exprime par la relation de symétrie indicelle  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$  dans le repère des champs de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  parallèles aux axes de coordonnées. Il en découle clairement que les deux premières sommes quadratiques  $\sum_m \varepsilon_m \left[ \Gamma_{jm}^i \Gamma_{kl}^m - \Gamma_{jm}^i \Gamma_{lk}^m \right]$  s'annihilent.

**3.47. Dénombrement des composantes de courbure indépendants.** En suivant É. Cartan, nous appellerons *quantités normales* les composantes du tenseur de courbure  $R_{jkl}^i$  pour lesquelles on a

$$(3.48) \quad \begin{cases} j > i, & k > l, \\ j \geq k, & i \geq l. \end{cases}$$

**Lemme 3.49.** *Les coefficients de courbure  $R_{jkl}^i$  satisfont la relation de symétrie suivante, conséquence de (3.28) :*

$$(3.50) \quad R_{jkl}^i = R_{lij}^k.$$

*De plus, toute composante du tenseur de courbure s'exprime comme combinaison linéaire des composantes normales, qui sont linéairement indépendantes. Enfin, il y a exactement*

$$(3.51) \quad \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}$$

*quantités normales.*

*Démonstration.* Adoptons la notation

$$(3.52) \quad (i|jkl) := R_{ikl}^j + R_{ijk}^l + R_{ilj}^k.$$

On a  $(i|jkl) = 0$ , grâce aux relations (3.28). En développant la relation

$$(3.53) \quad 0 = (i|jkl) - (j|ikl) - (k|ijl) + (l|ijk),$$

en tenant compte des relations d'antisymétrie pour simplifier, on obtient :

$$(3.54) \quad R_{ikl}^j = R_{kij}^l.$$

Cette relation, ajoutée à l'antisymétrie par rapport aux indices  $i$  et  $j$  d'une part, et  $k$  et  $l$  d'autre part, permet d'exprimer toute quantité  $R_{ikl}^j$  comme égale ou opposée d'une quantité  $R_{ikl}^j$  vérifiant

$$(3.55) \quad i > j, \quad k > l, \quad i \geq k.$$

Mais pour exprimer tous les coefficients de courbure, en fonction de certains d'entre eux seulement, on peut encore restreindre le nombre de ces derniers, en imposant que  $j \geq l$ . En effet, supposons que  $i > j$ ,  $k > l$ ,  $i \geq k$  et  $j < l$ , c'est-à-dire  $i \geq k > l > j$ . Alors la relation  $(i|jkl) = 0$  permet d'exprimer  $R_{ikl}^j$  en fonction de quantités normales :

$$(3.56) \quad R_{ikl}^j = R_{ikj}^l - R_{ilj}^k.$$

Pour terminer la démonstration, il suffit d'effectuer un dénombrement élémentaire. Premièrement, les quantités normales à deux indices distincts ne peuvent être que de la forme  $A_{jij}^i$  avec  $i > j$  : elles sont au nombre de  $C_n^2$  ; deuxièmement, les quantités normales à trois indices distincts sont des trois formes suivantes :  $A_{jik}^i$ ,  $A_{jjk}^i$  et  $A_{kjk}^i$  avec  $i > j > k$  ; troisièmement, les quantités normales à quatre indices distincts sont des deux formes suivantes :  $A_{jkl}^i$  et  $A_{kjl}^i$ . Au total, il y a :

$$(3.57) \quad C_n^2 + 3C_n^3 + 2C_n^4 = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}$$

quantités normales. La démonstration est achevée.  $\square$

**3.58. Caractérisation de la courbure nulle.** Pour terminer cette section, citons sans démonstration le résultat suivant. Une dizaine de démonstrations distinctes sont rédigées dans [Sp1970].

**Théorème 3.59.** *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *il existe un changement de coordonnées analytiques locales  $x \mapsto \bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$  dans lesquelles  $d\bar{s}^2 = \sum_i \varepsilon_i (d\bar{x}^i)^2$  ;*
- (2) *il existe un changement de coordonnées analytiques locales  $x \mapsto \bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$  telles que les 1-formes  $\theta^i = d\bar{x}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont exactes ;*
- (3) *les coefficients de courbure  $R_{jkl}^i$  sont nuls.*

Il existe une dizaine de démonstrations essentiellement équivalentes de ce théorème. La démonstration est

#### §4. MÉTHODE D'ÉQUIVALENCE POUR LES SURFACES GAUSSIENNES

Dans cette section, nous étudions le problème d'équivalence pour les variétés riemanniennes 2-dimensionnelles, intrinsèques, non plongées dans  $\mathbb{R}^3$ , que nous appellerons *surfaces gaussiennes*.

**Problème d'équivalence 4.1.** *Étant donné deux surfaces gaussiennes  $S$  et  $\bar{S}$  munies de métriques prédéfinies :*

$$(4.2) \quad ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2 \quad \text{et} \quad d\bar{s}^2 = \bar{E} du^2 + 2\bar{F} d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G} d\bar{v}^2,$$

*trouver un algorithme universel pour déterminer si elles sont localement isométriques.*

L'exposition de ce cas spécial du problème d'équivalence servira de préliminaire à la Section 5 ci-dessous, consacrée aux variétés pseudo-riemanniennes de dimension quelconque.

**4.3. Étude du plan euclidien.** Soit  $(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$  une application analytique réelle qui conserve la métrique pythagoricienne :

$$(4.4) \quad (d\bar{u})^2 + (d\bar{v})^2 = du^2 + dv^2.$$

Nous pouvons supposer que cette application conserve aussi l'orientation, quitte à la composer avec l'application  $(u, v) \mapsto (v, u)$ . Introduisons le co-repère ayant pour base :  $\theta^1 := du$  et  $\theta^2 := dv$ . La condition (4.4) est équivalente à : en tout point  $(u, v)$ , il existe  $t$  tel que

$$(4.5) \quad \begin{pmatrix} \bar{\theta}^1 \\ \bar{\theta}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}.$$

La structure de groupe des matrices  $2 \times 2$  ci-dessus est le groupe des rotations  $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ . Ici, la variable  $t$  dépend en principe des variables  $(u, v)$ , mais il est intéressant de l'envisager comme une nouvelle variable indépendante. Introduisons alors le *co-repère relevé*, constitué des deux 1-formes suivantes :

$$(4.6) \quad \begin{cases} \omega^1 := (\cos t) \cdot \theta^1 - (\sin t) \cdot \theta^2, \\ \omega^2 := (\sin t) \cdot \theta^1 + (\cos t) \cdot \theta^2, \end{cases}$$

qui sont définies sur l'espace à trois dimension équipée des coordonnées  $(u, v, t)$ . Les équations de structure associées sont :

$$(4.7) \quad d\omega^1 = -\alpha \wedge \omega^2, \quad d\omega^2 = \alpha \wedge \omega^1,$$

où  $\alpha := dt$  est la forme de Maurer-Cartan sur le groupe  $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ . D'après le Théorème 5.24 ci-dessous, l'application  $(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$  induit une unique application  $\bar{t} = \bar{t}(u, v, t)$  qui laisse *invariant* le co-repère relevé, au sens où l'on a :  $\bar{\omega}^i = \omega^i$ , pour  $i = 1, 2$ .

Formellement, les équations de structure écrites avec les nouvelles variables  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{t})$  dans le nouveau système de coordonnées sont exactement les mêmes que (4.7), à un changement de notation près. En comparant ces équations à (4.7) et en tenant compte des deux équations  $\bar{\omega}^1 = \omega^1$ ,  $\bar{\omega}^2 = \omega^2$ , nous déduisons que  $\bar{\alpha} = \alpha$ .

Aussi, nous pouvons prolonger le problème en adjoignant une 1-forme additionnelle  $\alpha$  au co-repère relevé. Les équations de structure prolongées sont de la forme :

$$(4.8) \quad d\omega^1 = -\alpha \wedge \omega^2, \quad d\omega^2 = \alpha \wedge \omega^1, \quad d\alpha = 0,$$

puisque  $\alpha = dt$  est exacte. On reconnaît alors les équations de structure pour les trois formes de Maurer-Cartan  $d\theta^1, d\theta^2, d\alpha$  du groupe des déplacements euclidiens  $SE(2, \mathbb{R})$ , constitué du produit semi-direct du groupe des rotations avec le groupe des translations du plan pythagoricien.

**4.9. Équations de structure dans le cas général.** Soit  $S$  une surface, c'est-à-dire une variété 2-dimensionnelle, que nous supposons équipée d'une métrique gaussienne

$$(4.10) \quad ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2,$$

à coefficients analytiques réels dans un système de coordonnées locales  $(u, v)$ . Recherchons deux combinaisons linéaires des 1-formes  $du$  et  $dv$  :

$$(4.11) \quad \begin{cases} \theta^1 = A(u, v) du + B(u, v) dv, \\ \theta^2 = C(u, v) du + D(u, v) dv, \end{cases}$$

où  $A, B, C$  et  $D$  sont des inconnues, qui diagonalise le  $ds^2$  sous la forme canonique :

$$(4.12) \quad ds^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2.$$

La solution n'est pas unique, puisque toute rotation d'angle arbitraire d'une matrice  $2 \times 2$  solution de (4.12) est encore une solution de cette équation. Pour garantir l'unicité, choisissons la matrice inconnue triangulaire supérieure, c'est-à-dire supposons  $C = 0$  (nous pourrions aussi choisir la matrice symétrique). Alors il existe une unique solution telle que  $A$  est positif :

$$(4.13) \quad A = \sqrt{E}, \quad B = \frac{F}{\sqrt{E}}, \quad D = \sqrt{\frac{EG - F^2}{E}} = \sqrt{\frac{\Delta}{E}},$$

où  $\Delta := EG - F^2 = (AD - BC)^2 > 0$  est le discriminant (positif) du  $ds^2$ . Avec ce choix de co-repère, le problème d'équivalence se formule de la même manière que dans le cas pythagoricien. Calculons les équations de structure en appliquant l'opérateur de différentiation extérieure  $d$  à (4.11) et en réexprimant le résultat obtenu dans la base de 1-formes  $(\theta^i)_{1 \leq i \leq 2}$ . Nous obtenons :

$$(4.14) \quad \begin{cases} d\omega^1 = -\alpha \wedge \omega^2 + P \cdot \omega^1 \wedge \omega^2, \\ d\omega^2 = \alpha \wedge \omega^1 + Q \cdot \omega^1 \wedge \omega^2, \end{cases}$$

où à nouveau  $\alpha := dt$ . Ici, les coefficients  $P$  et  $Q$  s'expriment en fonction des coefficients  $A, B, C$  et  $D$  sous la forme suivante :

$$(4.15) \quad P = J \cos t - K \sin t, \quad Q = J \sin t + K \cos t,$$

où  $P$  et  $Q$  sont des «coefficients de torsion» donnés par :

$$(4.16) \quad J = \frac{\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}}{\sqrt{\Delta}}, \quad K = \frac{\frac{\partial D}{\partial u}}{\sqrt{\Delta}}.$$

Nous pouvons contracter les équations de structure (4.14) en introduisant la forme  $\pi$  définie par :

$$(4.17) \quad \pi := \alpha - P \cdot \omega^1 - Q \cdot \omega^2 = \alpha - J \cdot \omega^1 - K \cdot \omega^2,$$

ce qui donne :

$$(4.18) \quad d\omega^1 = -\pi \wedge \omega^2, \quad d\omega^2 = \pi \wedge \omega^1.$$

Dans la théorie d'Élie Cartan, on appelle ce procédé «*absorption de la torsion*». Comme dans le cas euclidien, nous pouvons prolonger le problème en introduisant la variable supplémentaire  $t$ . Néanmoins, il y aura une différence importante : l'apparition d'un invariant bien connu, la *courbure de Gauss*.

En effet, appliquons l'opérateur de différentiation extérieure aux équations (4.18) :

$$(4.19) \quad \begin{cases} 0 = dd\omega^1 = -d\pi \wedge \omega^1 + \pi \wedge d\omega^2 = -d\pi \wedge \omega^1, \\ 0 = dd\omega^2 = d\pi \wedge \omega^2. \end{cases}$$

Toute 2-forme telle que  $d\pi$  se décompose sur la base des trois 2-formes  $\omega^1 \wedge \omega^2$ ,  $\omega^1 \wedge \alpha$ ,  $\omega^2 \wedge \alpha$ . Les deux équations précédentes impliquent que dans une telle décomposition pour  $d\pi$ , les deux coefficients devant  $\omega^1 \wedge \alpha$  et devant  $\omega^2 \wedge \alpha$  doivent s'annuler. Il existe donc une fonction  $\kappa$  des trois variables  $(t, u, v)$  telle que

$$(4.20) \quad d\pi = \kappa \cdot \omega^1 \wedge \omega^2 = \kappa \cdot \theta^1 \wedge \theta^2.$$

Évidemment, ce raisonnement est un cas particulier du Lemme dit «*de Cartan*» (Lemme 3.23 ci-dessus et Lemme 6.34 ci-dessous). En appliquant l'opérateur de différentiation extérieure à cette équation, nous obtenons la relation suivante :

$$(4.21) \quad 0 = dd\pi = \frac{\partial \kappa}{\partial t} \cdot dt \wedge \omega^1 \wedge \omega^2,$$

qui montre que le coefficient  $\kappa = \kappa(u, v)$  est *indépendant de  $t$* .

Par le même raisonnement qui nous a permis de démontrer l'Assertion 3.32, on vérifie que  $\bar{\kappa} = \kappa$  à travers toute isométrie  $(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$  telle que  $\bar{\theta}^1 = \theta^1$  et  $\bar{\theta}^2 = \theta^2$ . Après (5.17) ci-dessous, nous justifierons le fait que pour toute isométrie, on peut supposer satisfaites les correspondances  $\bar{\theta}^1 = \theta^1$  et  $\bar{\theta}^2 = \theta^2$ , par un choix approprié de co-repères.

**4.22. Calcul de la courbure de Gauss  $\kappa$ .** Calculons maintenant l'expression explicite de  $\kappa$  et vérifions qu'elle coïncide avec la *formula egregia* (1.5). En utilisant (4.17) et le fait que  $\omega^1 \wedge \omega^2 = \theta^1 \wedge \theta^2$ , nous trouvons :

$$(4.23) \quad \begin{cases} d\pi = -dJ \wedge \omega^1 - dK \wedge \omega^2 - J \cdot d\omega^1 \\ = \left\{ \frac{\partial J}{\partial \omega^2} - \frac{\partial K}{\partial \omega^1} - J^2 - K^2 \right\} \cdot \omega^1 \wedge \omega^2. \end{cases}$$

Nous en déduisons la formule suivante :

$$(4.24) \quad \begin{cases} \kappa = \frac{\partial J}{\partial \omega^2} - \frac{\partial K}{\partial \omega^1} - J^2 - K^2 \\ = \frac{A \frac{\partial J}{\partial v} - B \frac{\partial J}{\partial u} - D \frac{\partial K}{\partial u}}{AD - BC} - J^2 - K^2. \end{cases}$$



En insérant les valeurs (4.13) de  $A$ , de  $B$  et de  $D$ , nous obtenons :

$$(4.25) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta \kappa &= \frac{1}{4E} \left( \frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 + \frac{1}{4E} \frac{F^2 \left( \frac{\partial E}{\partial u} \right)^2}{EG - F^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{2E^3} \frac{F^4 \left( \frac{\partial E}{\partial u} \right)^2}{EG - F^2} \\ &- \frac{F^2 \left( \frac{\partial E}{\partial u} \right)^2}{2E^3} + \frac{1}{2E^2} \frac{F^2 \left( \frac{\partial E}{\partial u} \right)^2}{EG - F^2} - \frac{1}{2} \frac{F \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v}}{EG - F^2} - \frac{\frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v}}{2E} \\ &- \frac{F^2 \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v}}{2E \frac{EG - F^2}} + \frac{F \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v}}{E^2} + \frac{F^3 \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u}}{E^2(EG - F^2)} - \frac{FG \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u}}{E(EG - F^2)} + \\ &+ \frac{F \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v}}{EG - F^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4} \frac{\frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial v}}{EG - F^2} + \frac{F \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v}}{4(EG - F^2)} - \\ &- \frac{E \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v}}{2(EG - F^2)} - \frac{F \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial u}}{4(EG - F^2)} - \frac{\frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u}}{4E} - \frac{F^2 \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u}}{4E(EG - F^2)} + \\ &+ \frac{G \frac{\partial E}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)} - \frac{F \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)} + \frac{E \left( \frac{\partial G}{\partial u} \right)^2}{4(EG - F^2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}. \end{aligned} \right.$$

Après simplification, nous obtenons :

$$(4.26) \quad \left\{ \begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{4(EG - F^2)^2} \left\{ E \left[ \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} + \left( \frac{\partial G}{\partial u} \right)^2 \right] + \right. \\ &+ F \left[ \frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + 4 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} - 2 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} \right] \\ &+ G \left[ \frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2 \frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + \left( \frac{\partial E}{\partial v} \right)^2 \right] - \\ &\left. - 2(EG - F^2) \left[ \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

et nous reconnaissons la *formula egregia* (1.5), due à Gauss, qui exprime la courbure d'une surface de manière purement intrinsèque.

**Théorème 4.27.** *Soit  $S$  une surface gaussienne munie d'une métrique  $ds^2$  et soit  $\kappa$  sa courbure de Gauss. Alors le groupe des isométries de  $S$  est un groupe de Lie local de dimension au plus 3. La dimension maximale 3 est atteinte si et seulement si la surface possède une courbure de Gauss constante. Dans ce cas, la composante connexe du groupe des isométries a la structure de  $SL(2, \mathbb{R})$  si  $\kappa < 0$  (géométrie hyperbolique), de  $SE(2, \mathbb{R})$  si  $\kappa = 0$  (géométrie euclidienne) ou de  $SO(3, \mathbb{R})$  si  $\kappa > 0$  (géométrie sphérique).*

## §5. MÉTHODE D'ÉQUIVALENCE POUR LES VARIÉTÉS PSEUDO-RIEMANNIENNES

**5.1. Problèmes d'équivalence.** Rappelons qu'une isométrie d'une variété (pseudo)riemannienne  $M$  dans une autre variété (pseudo)riemannienne  $\overline{M}$  est un difféomorphisme qui conserve les (pseudo)distances infinitésimales ; c'est

une notion locale. Autrement dit, si  $M$ , localement identifiée à  $\mathbb{R}^n$  avec des coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ , est munie d'un  $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx^i dx^j$  et si de même,  $\bar{M}$ , localement identifiée à  $\mathbb{R}^n$  avec des coordonnées  $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ , est munie d'un autre  $d\bar{s}^2 = \sum_{i,j} \bar{g}_{ij}(\bar{x}) d\bar{x}^i d\bar{x}^j$ , on demande que la transformation qui à un point  $x$  associe un point  $\bar{x}$  satisfasse  $d\bar{s}^2 = ds^2$  dans l'infiniment petit, condition qu'il nous faut encore analyser. Pour cela, rappelons que nous notons un tel difféomorphisme,  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  sans introduire de symbole de fonction pour marquer la dépendance entre  $x$  et  $\bar{x}$ , et que nous utilisons la notation réciproque aussi simple  $\bar{x} \mapsto x = x(\bar{x})$ , pour désigner la transformation inverse. Une telle transformation inverse induit la transformation

$$(5.2) \quad dx^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j$$

entre les différentielles («dans l'infiniment petit»). Remplaçons ces formules linéaires dans  $ds^2$ , réorganisons et égalons à  $d\bar{s}^2$  :

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} ds^2 = \sum_{k,l} g_{kl}(x) dx^k dx^l \\ = \sum_{i,j} \sum_{k,l} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} g_{kl}(x(\bar{x})) d\bar{x}^i d\bar{x}^j \\ = d\bar{s}^2 \\ = \sum_{i,j} \bar{g}_{ij}(\bar{x}) d\bar{x}^i d\bar{x}^j. \end{array} \right.$$

En identifiant les coefficients des deux formes différentielles quadratiques qui apparaissent à la deuxième et à la quatrième ligne, nous déduisons que *la transformation  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  est une isométrie si et seulement si on a :*

$$(5.4) \quad \bar{g}_{ij}(\bar{x}) \equiv \sum_{k,l} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}(x(\bar{x})) \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}(x(\bar{x})) g_{kl}(x(\bar{x})),$$

ou, de manière équivalente, en inversant les rôles de  $x$  et de  $\bar{x}$  :

$$(5.5) \quad g_{ij}(x) \equiv \sum_{k,l} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}(\bar{x}(x)) \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}(\bar{x}(x)) \bar{g}_{kl}(\bar{x}(x)).$$

On peut aussi établir l'équivalence entre ces deux systèmes de relations grâce aux identités

$$(5.6) \quad \delta_j^i = \sum_k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} = \sum_k \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j},$$

obtenues en dérivant les relations  $x^i \equiv x^i(\bar{x}(x))$  par rapport à  $x^j$  et  $\bar{x}^i \equiv \bar{x}^i(x(\bar{x}))$  par rapport à  $\bar{x}^j$ .

Ces relations entre les coefficients  $g_{ij}$  et  $\bar{g}_{ij}$  possèdent une autre signification géométrique. Supposons la variété  $M$ , localement identifiée à  $\mathbb{R}^n$  avec des coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ , munie d'un  $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx^i dx^j$  prédéfini et considérons un changement de coordonnées arbitraire  $\bar{x} = \bar{x}(x)$ , sans supposer que l'espace des  $\bar{x}$  est muni d'un  $d\bar{s}^2$  prédéfini. Les formules (5.4) permettent alors de définir un  $d\bar{s}^2$  sur l'espace des  $\bar{x}$  par ses coefficients  $\bar{g}_{ij}$ , et alors, avec ce nouveau  $d\bar{s}^2$ , la transformation  $\bar{x} = \bar{x}(x)$  est une isométrie.

Sur le plan du pur calcul formel (c'est-à-dire eu égard aux transformations induites (5.4) et (5.5)), on a identité entre les deux points de vue suivants :

- (i) isométrie  $\bar{x} = \bar{x}(x)$  entre deux variétés riemanniennes prédéfinies ;
- (ii) second  $d\bar{s}^2$  induit par un premier  $ds^2$  prédéfini, via une transformation  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ .

Néanmoins, ces deux points de vue s'affirment dans une différence majeure quant aux questions soulevées naturellement par l'étude locale des variétés riemanniennes. D'après le *Theorema Egregium* de Gauss, la courbure d'une surface est conservée par toute application isométrique : c'est bien à cause de cet invariant que toutes les surfaces ne sont pas représentables «sans déchirure ni duplication» les unes sur les autres. C'est pourquoi la question «doit se poser» de déterminer quand deux surfaces (ou plus généralement, deux variétés riemanniennes) sont localement isométriques.

**Problème d'équivalence 5.7.** *Trouver un algorithme universel pour déterminer si deux variétés riemanniennes  $(M, ds^2)$  et  $(\bar{M}, d\bar{s}^2)$  sont localement isométriques.*

C'est l'une des premières questions que l'on est en devoir de résoudre. Mais en général, deux variétés riemanniennes prises au hasard ne sont jamais localement isométriques, si bien que le problème précédent a quelque chose d'artificiel. Le problème de classification des variétés riemanniennes est plus profond et plus important.

**Problème de classification 5.8.** *Classifier les variétés riemanniennes à isométrie locale près. Trouver un algorithme universel qui produit une forme normale pour le  $ds^2$  d'un représentant distingué de chaque classe d'équivalence.*

Ces deux problèmes, qui ne se limitent pas aux variétés riemanniennes, sont en vérité intimement liés. En théorie, on peut déduire de la réponse complète au second problème la réponse au premier : étant donné deux variétés riemanniennes  $(M, ds^2)$  et  $(\bar{M}, d\bar{s}^2)$ , il suffit de déterminer leurs classes d'équivalences respectives, et de vérifier si elles coïncident ou si elle diffèrent. En pratique, une telle stratégie nécessite de posséder un algorithme pour trouver la classe d'équivalence d'une sous-variété quelconque.

Les travaux de Sophus Lie ont mis en lumière l'existence du *groupe continu de transformations* de tout objet géométrico-différentiel, et en particulier du groupe des isométries locales d'une variété riemannienne. Nous allons voir que les deux problèmes : équivalence et classification, recèlent l'objet «groupe des isométries locales de  $(M, ds^2)$ » et qu'il est impossible de les résoudre sans «voir» cet objet.

**5.9. Diagonalisation de la métrique pseudo-riemannienne et variables de rotation.** Ainsi, c'est le problème de classification des variétés pseudo-riemanniennes que nous allons étudier. Comme dans la Section 2, diagonalisons le  $ds^2$  de  $M$  sous la forme :

$$(5.10) \quad ds^2 = \sum_i \varepsilon_i (\theta^i)^2.$$

Ici, les formes différentielles  $\theta^i$  ne sont pas exactes en général, à moins que la courbure ne soit nulle (cf. le Théorème 3.59 ci-dessus). De même, diagonalisons le  $d\bar{s}^2$  de  $\bar{M}$  sous une forme analogue :

$$(5.11) \quad d\bar{s}^2 = \sum_i \varepsilon_i (\bar{\theta}^i)^2.$$

Supposons que  $M$  et  $\bar{M}$  sont dans une même classe d'équivalence, c'est-à-dire qu'il existe une isométrie  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  entre  $(M, ds^2)$  et  $(\bar{M}, d\bar{s}^2)$ . Soient  $e_i$  les champs de vecteurs duaux des formes  $\theta^i$  et de même, soient  $\bar{e}_i$  les champs duaux des formes  $\bar{\theta}^i$ . Sur la figure suivante, nous représentons le repère orthonormé des  $(e_i)$  en  $x$  et le repère orthonormé des  $(\bar{e}_i)$  en l'image  $\bar{x}$  du point  $x$  par la transformation isométrique.

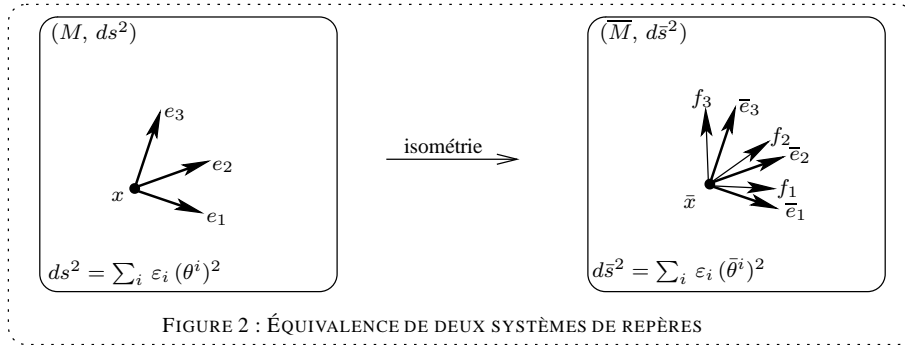


FIGURE 2 : ÉQUIVALENCE DE DEUX SYSTÈMES DE REPÈRES

Il n'y a aucune raison que les images  $\bar{f}_i$  des vecteurs  $e_i$  par l'isométrie  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  coïncident avec les vecteurs  $\bar{e}_i$ . Nous pouvons cependant décomposer les vecteurs  $\bar{f}_i$  selon la base des  $\bar{e}_j$  : il existe une matrice  $\bar{U} = \bar{U}(\bar{x}) = (\bar{u}_j^i(\bar{x}))$  de fonctions de  $\bar{x}$ , telle que  $\bar{f}_i(\bar{x}) = \sum_j \bar{u}_i^j(\bar{x}) \bar{e}_j(\bar{x})$  pour tout  $\bar{x}$  dans  $\bar{M}$ , ou, en abrégé :

$$(5.12) \quad \bar{f}_i = \sum_j \bar{u}_i^j \cdot \bar{e}_j.$$

Mais cette matrice n'est pas quelconque. En effet, puisque la transformation  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  est isométrique, l'image  $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$  du repère  $(e_1, \dots, e_n)$  est encore orthonormée, c'est-à-dire que l'on a :

$$(5.13) \quad \langle \bar{f}_i, \bar{f}_j \rangle_{d\bar{s}^2} = \langle e_i, e_j \rangle_{ds^2} = \delta_i^j \varepsilon_i.$$

Rappelons que par construction les vecteurs  $\bar{e}_i$  satisfont les mêmes relations d'orthonormalité :

$$(5.14) \quad \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle_{d\bar{s}^2} = \delta_i^j \varepsilon_i.$$

En remplaçant  $\bar{f}_i$  et  $\bar{f}_j$  dans (5.13) et en tenant compte de leurs expressions données par (5.12), nous obtenons des identités indicielles sur les coefficients  $\bar{u}_j^i(\bar{x})$ , dont l'interprétation matricielle est l'identité :

$$(5.15) \quad E = {}^T\bar{U} \cdot E \cdot \bar{U}.$$

Rappelons la définition  $E := (\delta_j^i \varepsilon_i)$ . Dans le cas riemannien, tous les  $\varepsilon_i$  sont égaux à 1 et la relation (5.15) se réduit à  $I_{n \times n} = {}^T\bar{U} \cdot \bar{U}$ , i.e.  $\bar{U}$  est une matrice orthogonale.

Ainsi, le repère  $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)$ , transformé du repère  $(e_1, \dots, e_n)$  par l'isométrie, se déduit du repère prédéfini  $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$  par une transformation pseudo-orthogonale qui dépend du point  $\bar{x}$ .

De manière duale (ou par un raisonnement analogue), on vérifie qu'il existe une matrice  $U = U(x) = (u_j^i(x))$  dépendant analytiquement du point  $x$  et satisfaisant l'identité

$$(5.16) \quad E = {}^T U \cdot E \cdot U,$$

telle que

$$(5.17) \quad \bar{\theta}^i = \sum_j u_j^i \cdot \theta^j.$$

Pour que cette égalité ait un sens, on doit remplacer  $\bar{x}$  par son expression en fonction de  $x$  dans le membre de gauche  $\bar{\theta}^i = \bar{\theta}^i(\bar{x}, d\bar{x})$ .

Supposons connue une isométrie  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  entre variétés pseudo-riemanniennes  $M$  et  $\bar{M}$ . Si l'on change le corepère orthonormé sur  $M$  en prenant les formes  $\theta^{i'} := \sum_j u_j^i \cdot \theta^j$  au lieu des formes  $\theta^i$ , la dernière relation s'écrit  $\bar{\theta}^i = \theta^{i'}$ . Étant donné une isométrie  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  entre variétés pseudo-riemanniennes  $M$  et  $\bar{M}$  chacune équipées d'une pseudo-métrique diagonalisée  $ds^2 = \sum_i \varepsilon_i (\theta^i)^2$  et  $d\bar{s}^2 = \sum_i \varepsilon_i (\bar{\theta}^i)^2$ , on peut supposer, après un changement éventuel de co-repère sur  $M$ , que l'on a  $\bar{\theta}^i = \theta^i$ . Dans ces conditions, l'hypothèse de l'Assertion (3.32) est justifiée, d'où l'énoncé suivant : les composantes de courbure se correspondent à travers toute isométrie qui préserve les co-repères :  $\bar{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i$ .

Reprenons maintenant l'analyse à partir de zéro. Supposons données deux variétés pseudo-riemanniennes  $(M, ds^2)$  et  $(\bar{M}, d\bar{s}^2)$ , dont on ignore si elles sont isométriques ou non. Supposons leurs deux pseudo-métriques diagonalisées comme en (5.10) et (5.11). Cette diagonalisation apporte une simplification formelle, mais lorsque l'on s'interroge sur l'existence d'une isométrie pour résoudre le problème d'équivalence, la diagonalisation simultanée introduit de nouvelles inconnues : les fonctions  $u_j^i(x)$ , qui forment une matrice pseudo-orthogonale. Néanmoins, l'apparition de ces inconnues est nécessaire, parce qu'il n'existe pas de choix canonique pour les deux co-repères orthonormés mobiles  $(\theta^i)$  et  $(\bar{\theta}^i)$ . En effet, pour toute matrice  $U(x)$  satisfaisant (5.16) et pour toute matrice  $\bar{U}(\bar{x})$  satisfaisant (5.15), il est

facile de voir que les repères  $\theta^{i'} := \sum_j u_j^i \cdot \theta^j$  et  $\bar{\theta}^{i'} := \sum_j \bar{u}_j^i \cdot \bar{\theta}^j$  sont encore orthonormés.

Par conséquent [explication heuristique à améliorer], il est suggéré d'introduire les composantes de la matrice  $u_j^i(x)$  comme de nouvelles variables *totalelement indépendantes des variables  $x$* ; on réserve ainsi la détermination exacte des fonctions  $u_j^i(x)$  à une analyse ultérieure. C'est la première étape décisive de l'algorithme d'équivalence.

Introduisons alors le groupe  $\mathcal{O}_{p, n-p}$  des matrices  $U = (u_j^i)$  qui satisfont la relation de pseudorthogonalité

$$(5.18) \quad E = {}^T U \cdot E \cdot U.$$

C'est le groupe qui témoigne, en tout point  $x$ , de l'ambiguïté, de l'indétermination et de la non-unicité du repère orthonormé. On démontre que ce groupe est de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ , qu'il possède quatre composantes connexes si  $p \neq 0$ ,  $n$  et sinon deux. En admettant une légère inexactitude, qui n'aura aucune incidence sur la rigueur de nos raisonnements, nous considérerons qu'un système coordonnées sur  $\mathcal{O}_{p, n-p}$  est constitué de toutes les variables  $u_j^i$ , bien qu'il y ait  $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$  relations indépendantes entre elles, extraites de (5.18). Écrivons les relations que doivent satisfaire ces variables. Elle seront fréquemment utilisées dans la suite pour simplifier certaines expressions algébriques. En développant l'identité  $E = {}^T U \cdot E \cdot U$  avec des indices, on obtient :

$$(5.19) \quad \delta_j^i \varepsilon_i = \sum_k u_k^i \varepsilon_k u_j^k.$$

Si on écrit cette identité sous la forme équivalente  $E \cdot U = {}^T \tilde{U} \cdot E$ , et si on la développe aussi avec des indices, on obtient les relations :

$$(5.20) \quad \varepsilon_i u_j^i = \tilde{u}_i^j \varepsilon_j.$$

**5.21. Relèvement des isométries.** La deuxième étape décisive de l'algorithme d'équivalence consiste à introduire l'espace fibré  $M \times \mathcal{O}_{p, n-p}$ , ainsi que les nouvelles formes différentielles

$$(5.22) \quad \omega^i := \sum_j u_j^i \cdot \theta^j,$$

obtenues par «rotation» des formes  $\theta^i$ . De même, on introduit les formes différentielles

$$(5.23) \quad \bar{\omega}^i := \sum_j \bar{u}_j^i \cdot \bar{\theta}^j,$$

sur  $\bar{M} \times \bar{\mathcal{O}}_{p, n-p}$ . On notera  $\pi$  la projection canonique  $(x^i, u_j^i) \mapsto (x^i)$  sur  $M$  et de même pour  $\bar{\pi} : \bar{M} \times \bar{\mathcal{O}}_{p, n-p} \rightarrow \bar{M}$ .

**Théorème 5.24.** *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *il existe une isométrie  $\bar{x} = \bar{x}(x)$  de  $M$  sur  $\bar{M}$ ;*

(ii) il existe une application de  $M \times \mathcal{O}_{p, n-p}$  dans  $\overline{M} \times \overline{\mathcal{O}}_{p, n-p}$  de la forme spécifique :

$$(5.25) \quad \begin{cases} \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^m) \\ \bar{u}_l^k = \bar{u}_l^k(x^m, u_q^p), \end{cases}$$

où les  $\bar{x}^i$  ne dépendent pas des  $u_q^p$ , telle que l'on a :

$$(5.26) \quad \bar{\omega}^i = \omega^i,$$

pour  $i = 1 \dots, n$ , après remplacement de  $\bar{x}$  et de  $\bar{u}$  dans les membres de gauche  $\bar{\omega}^i = \bar{\omega}^i(\bar{x}^j, \bar{u}_k^l, d\bar{x}^m)$ .

Dans ce cas, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathcal{O}_{p, n-p} & \longrightarrow & \overline{M} \times \overline{\mathcal{O}}_{p, n-p} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ M & \longrightarrow & \overline{M} \end{array},$$

Autrement dit, grâce à l'introduction de variables auxiliaires, on a réussi à corriger l'imperfection d'après laquelle les formes  $\bar{\theta}^i$  n'étaient pas égales aux formes  $\theta^i$ , mais se déduisaient des  $\theta^i$  par une rotation telle que (5.17) ; on a maintenant  $\bar{\omega}^i = \omega^i$ , sans rotation, mais avec des variables supplémentaires  $u_j^i$ .

*Démonstration.* La démonstration consiste à analyser la relation désirée  $\bar{\omega}^i = \omega^i$  et à observer que les  $\bar{u}_j^i$  sont déterminés de manière unique en fonction de  $(x^m, u_q^p)$ . Pour cela, développons cette relation :

$$(5.27) \quad \bar{\omega}^i = \sum_j \bar{u}_j^i \cdot \bar{\theta}^j = \sum_j u_j^i \cdot \theta^j = \omega^i.$$

Remplaçons les formes  $\bar{\theta}^j$  et  $\theta^j$  par leurs expressions en fonction des formes  $d\bar{x}^k$  et  $dx^k$  :

$$(5.28) \quad \sum_{j,k} \bar{u}_j^i \bar{h}_k^j \cdot d\bar{x}^k = \sum_{j,k} u_j^i h_k^j \cdot dx^k.$$

Remplaçons  $d\bar{x}^k$  par son expression  $d\bar{x}^k = \sum_l \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} dx^l$  inverse de (5.2), permutons certains indices et réorganisons les sommes :

$$(5.29) \quad \sum_{j,k,l} \bar{u}_j^i \bar{h}_k^j \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} \cdot dx^l = \sum_{j,l} u_j^i h_l^j \cdot dx^l.$$

Identifions les coefficients de  $dx^l$ , ce qui nous donne les identités :

$$(5.30) \quad \sum_{j,k} \bar{u}_j^i \bar{h}_k^j \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} = \sum_j u_j^i h_l^j,$$

pour tout  $l = 1, \dots, n$ . Notons  $\text{Jac} \left( \frac{\bar{x}}{x} \right) := \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right)$  la matrice jacobienne du changement de coordonnées et interprétons matriciellement l'identité précédente :

$$(5.31) \quad \overline{U} \cdot \overline{H} \cdot \text{Jac} \left( \frac{\bar{x}}{x} \right) = U \cdot H.$$

Rappelons que d'après (5.6), la matrice inverse de  $\text{Jac} \left( \frac{\bar{x}}{x} \right)$  est tout simplement la matrice jacobienne de la transformation inverse, *i.e.*  $\text{Jac} \left( \frac{x}{\bar{x}} \right) := \left( \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right)$ . Grâce à cette observation, nous pouvons réécrire l'identité matricielle précédente sous la forme :

$$(5.32) \quad \bar{U} = U \cdot H \cdot \text{Jac} \left( \frac{x}{\bar{x}} \right) \cdot \widetilde{H},$$

où l'on rappelle que la notation  $(\widetilde{\cdot})$  est utilisée pour désigner une matrice inverse. En développant cette relation, nous voyons que les  $\bar{u}_j^i$  sont effectivement déterminés de manière unique en fonction de  $(x^m, u_q^p)$  par les formules :

$$(5.33) \quad \bar{u}_j^i := \bar{u}_j^i(x, u) := \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} u_{l_1}^i(x) h_{l_2}^{l_1}(x) \frac{\partial x^{l_2}}{\partial \bar{x}^{l_3}}(\bar{x}(x)) \widetilde{h}_j^{l_3}(\bar{x}(x)).$$

Grâce à ces relations, la vérification de l'équivalence entre **(i)** et **(ii)** n'est plus qu'une affaire de logique élémentaire, laissée au lecteur.

Observons enfin que l'hypothèse d'après laquelle  $\bar{x}$  ne dépend pas de  $u$  dans (5.25) est en fait une conséquence des identités  $\bar{\omega}^i = \omega^i$  : en effet, puisque dans les  $\omega^i$ , n'apparaissent que des différentielles  $dx^k$  (et aucune différentielle  $du_l^m$ ), et puisqu'il en est de même pour les  $\bar{\omega}^i$ , lorsque l'on remplace les différentielles  $d\bar{x}^k$  présentes dans  $\bar{\omega}^i$  par leur expression en fonction des  $dx^k$  et des  $du_l^m$ , il ne doit apparaître aucune différentielle  $du_l^m$  : ceci démontre que  $\bar{x}$  ne dépend pas de  $u_l^m$ .  $\square$

Ainsi, le problème d'équivalence d'origine  $M \rightarrow \bar{M}$  se relève-t-il en un problème d'équivalence  $M \times \mathcal{O}_{p, n-p} \rightarrow \bar{M} \times \bar{\mathcal{O}}_{p, n-p}$  entre variétés de dimension supérieure.

Dans la suite immédiate de ce mémoire, nous travaillerons avec une seule variété produit  $M \times \mathcal{O}_{p, n-p}$ , en réservant à des analyses ultérieures les conséquences qui découlent de l'existence d'une équivalence relevée. Nous allons calculer explicitement les équations de structure pour les formes  $\omega^i$  en tenant compte des variables de rotation. Dans son mémoire original de 1922, Élie Cartan n'accomplit pas ces calculs explicites.

## §6. ÉQUATIONS DE STRUCTURE

On appellera *co-repère relevé* la famille des  $n$  formes différentielles  $\omega^i$  sur  $M \times \mathcal{O}_{p, n-p}$ . Puisque la dimension de  $M \times \mathcal{O}_{p, n-p}$  est égale à  $\frac{n(n+1)}{2}$ , les formes  $\omega^i$  ne forment *pas* un co-repère ; il manque  $\frac{n(n-1)}{2}$  indépendantes  $\omega_j^i$  que nous introduirons ultérieurement.

**6.1. Différentiation extérieure des formes  $\omega^i$ .** Rappelons que  $\bar{U} = (\bar{u}_j^i)$  désigne la matrice inverse de  $U$ . Ses éléments satisfont les relations

$$(6.2) \quad \delta_j^i = \sum_k u_k^i \cdot \bar{u}_j^k = \sum_k \bar{u}_k^i \cdot u_j^k.$$

Les formes différentielles  $\theta^i$  se déduisent des formes  $\omega^i$  par les formules inverses de (5.22) :

$$(6.3) \quad \theta^i = \sum_j \bar{u}_j^i \cdot \omega^j.$$



Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure à  $\omega^i = \sum_j u_j^i \cdot \theta^j$ , réécrivons les formes  $\theta^j$  en fonction des formes  $\omega^k$  grâce aux formules inverses (6.3) ci-dessus, utilisons les formules (3.7) pour  $d\theta^j$ , réécrivons à la troisième ligne le premier membre de la deuxième ligne sous une forme équivalente, utilisons l'antisymétrie  $K_{kl}^j = -K_{lk}^j$  et réécrivons enfin  $\theta^k$  et  $\theta^l$  en fonction des  $\omega^m$ , ce qui donne :

$$(6.4) \quad \left\{ \begin{aligned} d\omega^i &= \sum_j du_j^i \wedge \theta^j + \sum_j u_j^i \cdot d\theta^j \\ &= \sum_j \sum_k du_j^i \tilde{u}_k^j \wedge \omega^k + \sum_j \sum_{k<l} u_j^i K_{kl}^j \cdot \theta^k \wedge \theta^l \\ &= \varepsilon_i \sum_j \left( \omega^j \wedge \left( -\sum_k \varepsilon_i du_k^i \tilde{u}_j^k \right) \right) + \sum_{j,k,l,k_1,l_1} u_j^i \tilde{u}_{k_1}^k \tilde{u}_{l_1}^l \frac{K_{kl}^j}{2} \cdot \omega^{k_1} \wedge \omega^{l_1}. \end{aligned} \right.$$

Donnons un nom au membre contenu dans la double parenthèse, *i.e.* posons :

$$(6.5) \quad \rho_j^i := \sum_k \varepsilon_i du_k^i \tilde{u}_j^k.$$

Réécrivons le deuxième terme de la troisième ligne en effectuant le changement d'indices

$$(6.6) \quad (j, k, l, k_1, l_1) \longmapsto (i_1, j_1, k_1, j, k),$$

après y avoir remplacé la variable  $u_j^i$  par  $\varepsilon_i \varepsilon_j \tilde{u}_i^j$ , grâce à (5.20), et réorganisons l'ordre d'apparition des facteurs, ce qui donne, en poursuivant (6.4) :

$$(6.7) \quad \left\{ \begin{aligned} d\omega^i &= \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge (-\rho_j^i) + \sum_{j<k} \omega^j \wedge \omega^k \cdot \left( \varepsilon_i \sum_{i_1, j_1, k_1} \tilde{u}_{i_1}^{i_1} \tilde{u}_{j_1}^{j_1} \tilde{u}_k^{k_1} \left[ \varepsilon_{i_1} K_{j_1 k_1}^{i_1} \right] \right) \\ &=: \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge (-\rho_j^i) + \sum_{j<k} T_{jk}^i \cdot \omega^j \wedge \omega^k, \end{aligned} \right.$$

où nous avons posé :

$$(6.8) \quad T_{jk}^i := \varepsilon_i \sum_{i_1, j_1, k_1} \tilde{u}_{i_1}^{i_1} \tilde{u}_{j_1}^{j_1} \tilde{u}_k^{k_1} \left[ \varepsilon_{i_1} K_{j_1 k_1}^{i_1} \right].$$

Grâce à la relation  $\varepsilon_i \varepsilon_{i_1} \tilde{u}_{i_1}^{i_1} = u_{i_1}^i$ , on peut même réexprimer  $T_{jk}^i$  sous la forme plus homogène

$$(6.9) \quad T_{jk}^i := \sum_{i_1, j_1, k_1} u_{i_1}^i \tilde{u}_{j_1}^{j_1} \tilde{u}_k^{k_1} \left[ K_{k_1 l_1}^{j_1} \right],$$

qui met en évidence le fait que ces coefficients  $T_{jk}^i$  se déduisent des coefficients  $K_{jk}^i$  par des formules de triple rotation tensorielle.

**6.10. Introduction des composantes de rotation  $\omega_j^i$  (connexion associée).** Vérifions maintenant que les  $\rho_j^i$  satisfont la relation d'antisymétrie :

$$(6.11) \quad \rho_j^i = -\rho_i^j.$$

En effet, notons  $R$  la matrice des  $(\rho_j^i)$ . D'après sa définition (6.5), elle s'identifie à un produit de matrices introduites auparavant :

$$(6.12) \quad R := E \cdot dU \cdot \tilde{U}.$$

En différentiant l'identité  $E = {}^T U \cdot E \cdot U$ , nous obtenons l'identité  $0 = d({}^T U) \cdot E \cdot U + {}^T U \cdot E \cdot dU$ , identité que nous réécrivons sous la forme équivalente :

$$(6.13) \quad \begin{cases} 0 = {}^T \tilde{U} \cdot d({}^T U) \cdot E + E \cdot dU \cdot \tilde{U} \\ = {}^T R + R, \end{cases}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Voici l'analogie de la relation  $d\theta^i = \varepsilon_i \sum_j \theta^j \wedge \theta_j^i$  établie au Lemme 2.32.

**Lemme 6.14.** *Il existe une unique famille de formes différentielles  $\omega_j^i$ ,  $i, j, = 1, \dots, n$ , de degré 1 et satisfaisant les relations d'antisymétrie  $\omega_j^i = -\omega_i^j$  telles que les équations de structure (6.7) peuvent se réécrire sous la forme :*

$$(6.15) \quad d\omega^i = \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge \omega_j^i.$$

*Démonstration.* Décomposons les formes  $\omega_j^i$  recherchées selon la base des  $\omega^k$

$$(6.16) \quad \omega_j^i = -\rho_j^i + \sum_k \Lambda_{jk}^i \cdot \omega^k,$$

avec des fonctions inconnues  $\Lambda_{jk}^i = \Lambda_{jk}^i(x^l, u_m^p)$  qui satisfont les relations d'antisymétrie  $\Lambda_{jk}^i = -\Lambda_{kj}^i$ , pour s'assurer que  $\omega_j^i = -\omega_i^j$ . Prenons (6.7) pour point de départ, remplaçons  $d\omega^i$  par la valeur désirée  $\varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge \omega_j^i$  et remplaçons  $(\omega_j^i + \rho_j^i)$  grâce à (6.16) :

$$(6.17) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{j < k} T_{jk}^i \cdot \omega^j \wedge \omega^k &= d\omega^i - \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge (-\rho_j^i) \\ &= \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge (\omega_j^i + \rho_j^i) \\ &= \sum_{j, k} \varepsilon_i \Lambda_{jk}^i \cdot \omega^j \wedge \omega^k \\ &= \sum_{j < k} (\varepsilon_i \Lambda_{jk}^i - \varepsilon_i \Lambda_{kj}^i) \cdot \omega^j \wedge \omega^k, \end{aligned} \right.$$

Par identification des coefficients de la famille de 2-formes indépendantes  $(\theta^j \wedge \theta^k)_{1 \leq j < k \leq n}$ , nous extrayons le système linéaire que doivent satisfaire les inconnues  $\Lambda_{jk}^i$  (après multiplication par la constante  $\varepsilon_i$  qui satisfait  $\varepsilon_i^2 = 1$ ) :

$$(6.18) \quad \varepsilon_i T_{jk}^i = \Lambda_{jk}^i - \Lambda_{kj}^i.$$

Nous obtenons exactement les mêmes équations que (3.18), à un changement de notations près. Par conséquent, il est inutile de répéter le raisonnement qui nous a conduit à la solution (3.20), et il nous suffit de la transposer ici :

$$(6.19) \quad \Lambda_{jk}^i := \frac{1}{2} \left( \varepsilon_i T_{jk}^i + \varepsilon_k T_{ji}^k + \varepsilon_j T_{ki}^j \right).$$

On vérifie que cette solution, unique par construction, satisfait la relation d'antisymétrie indicielle  $\Lambda_{jk}^i = -\Lambda_{ik}^j$ , ce qui achève la démonstration du lemme.  $\square$

Plus encore, développons chacune des trois expressions  $\varepsilon_i T_{jk}^i$ ,  $\varepsilon_k T_{ji}^k$  et  $\varepsilon_j T_{ki}^j$  qui apparaissent ci-dessus en utilisant les formules (6.9), effectuons des permutations sur les indices de sommation et reconnaissons le coefficient de Christoffel (3.20) :

$$(6.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{i_1, j_1, k_1} \left( \tilde{u}_{i_1}^{i_1} \tilde{u}_{j_1}^{j_1} \tilde{u}_{k_1}^{k_1} \left[ \varepsilon_{i_1} K_{j_1 k_1}^{i_1} \right] + \tilde{u}_{k_1}^{i_1} \tilde{u}_{j_1}^{j_1} \tilde{u}_{i_1}^{k_1} \left[ \varepsilon_{i_1} K_{j_1 k_1}^{i_1} \right] + \right. \\ \left. + \tilde{u}_{j_1}^{i_1} \tilde{u}_{k_1}^{j_1} \tilde{u}_{i_1}^{k_1} \left[ \varepsilon_{i_1} K_{j_1 k_1}^{i_1} \right] \right) \\ = \sum_{i_1, j_1, k_1} \tilde{u}_{i_1}^{i_1} \tilde{u}_{j_1}^{j_1} \tilde{u}_{k_1}^{k_1} \left( \frac{\varepsilon_{i_1} K_{j_1 k_1}^{i_1} + \varepsilon_{k_1} K_{j_1 i_1}^{k_1} + \varepsilon_{j_1} K_{k_1 i_1}^{j_1}}{2} \right) \end{array} \right.$$

ce qui nous donne une formule très importante pour la suite, que nous écrivons sous deux formes équivalentes, en appliquant la relation (5.20) :

$$(6.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{jk}^i = \sum_{i_1, j_1, k_1} \tilde{u}_{i_1}^{i_1} \tilde{u}_{j_1}^{j_1} \tilde{u}_{k_1}^{k_1} \Gamma_{j_1 k_1}^{i_1} \\ = \sum_{i_1, j_1, k_1} \varepsilon_i \varepsilon_{i_1} u_{i_1}^i \tilde{u}_{j_1}^{j_1} \tilde{u}_{k_1}^{k_1} \Gamma_{j_1 k_1}^{i_1} \end{array} \right.$$

Ces deux formules équivalentes mettent en évidence le fait que *les coefficients*  $\Lambda_{jk}^i$  *se déduisent des coefficients*  $\Gamma_{jk}^i$  *par des formules de rotation tensorielle.*

Pour terminer ce paragraphe, mentionnons une observation évidente qui sera utile par la suite.

**Lemme 6.22.** *Les quatre collections suivantes de 1-formes différentielles, toutes de cardinal  $\frac{n(n+1)}{2}$ , forment une base sur  $M \times \mathcal{O}_{p, n-p}$  dans un voisinage de  $(0, I_{n \times n})$  :*

- (a)  $(dx^i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(du_j^i)_{1 \leq i < j \leq n}$  ;
- (b)  $(\omega^i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(du_j^i)_{1 \leq i < j \leq n}$  ;
- (c)  $(\omega^i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(\rho_j^i)_{1 \leq i < j \leq n}$  ;
- (d)  $(\omega^i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(\omega_j^i)_{1 \leq i < j \leq n}$ .

**6.23 Formule explicite pour les dérivées covariantes.** Pour préparer le calcul explicite des coefficients de courbure dans le corepère relevé, réexprimons la différentielle

$$(6.24) \quad dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot dx^i + \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial u_j^i} \cdot du_j^i$$

d'une fonction  $F = F(x, U) = F(x^i, u_j^i)$  quelconque sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$  dans la base de 1-formes différentielles constitué des  $\theta^i$  et des  $\theta_j^i$ , en appliquant directement la formule (3.40), et la formule  $du_j^i = \varepsilon_i \sum_k u_j^k \cdot \rho_k^i$  tirée de (6.5), ce qui donne :

$$(6.25) \quad dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial \theta^i} \cdot \theta^i + \sum_{i,j,k} \varepsilon_i \frac{\partial F}{\partial u_j^i} u_j^k \cdot \rho_k^i.$$

Dans cette formule, réexprimons  $\theta^i = \sum_j \tilde{u}_j^i \cdot \omega^j$ , remplaçons  $\rho_k^i = -\omega_k^i + \sum_l \Lambda_{kl}^i \cdot \omega^l$  grâce à (6.16) et réorganisons l'expression obtenue, ce qui donne :

$$(6.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} dF = \sum_{i,j} \tilde{u}_j^i \frac{\partial F}{\partial \theta^i} \cdot \omega^j - \sum_{i,j,k} \varepsilon_i \frac{\partial F}{\partial u_j^i} u_j^k \cdot \omega_k^i + \\ \quad + \sum_{i,j,k,l} \varepsilon_i \frac{\partial F}{\partial u_j^i} u_j^k \Lambda_{kl}^i \cdot \omega^l \\ = \sum_i \omega^i \cdot \left( \sum_j \tilde{u}_i^j \frac{\partial F}{\partial \theta^j} + \sum_{j,k,l} \varepsilon_l \frac{\partial F}{\partial u_j^l} u_j^k \Lambda_{ki}^l \right) + \\ \quad + \sum_{i < j} \omega_j^i \cdot \left( -\varepsilon_i \sum_k \frac{\partial F}{\partial u_k^i} u_k^j + \varepsilon_j \sum_k \frac{\partial F}{\partial u_k^j} u_k^i \right). \end{array} \right.$$

Grâce à ce dernier calcul, nous déduisons l'énoncé suivant.

**Lemme 6.27.** *La différentielle d'une fonction  $F = F(x^i, u_j^i)$  s'exprime sous la forme*

$$(6.28) \quad dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial \omega^i} \cdot \omega^i + \sum_{i < j} \frac{\partial F}{\partial \omega_j^i} \cdot \omega_j^i,$$

avec l'expression explicite suivante pour les dérivées covariantes :

$$(6.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \omega^i} = \sum_j \tilde{u}_i^j \frac{\partial F}{\partial \theta^j} + \sum_{j,k,l} \varepsilon_l \frac{\partial F}{\partial u_j^l} u_j^k \Lambda_{ki}^l, \\ \frac{\partial F}{\partial \omega_j^i} = -\varepsilon_i \sum_k \frac{\partial F}{\partial u_k^i} u_k^j + \varepsilon_j \sum_k \frac{\partial F}{\partial u_k^j} u_k^i. \end{array} \right.$$

**6.30. Introduction des coefficients de courbure  $S_{jkl}^i$ .** Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure à l'équation  $d\omega^i = \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge \omega_j^i$ , remplaçons  $d\omega^j = \varepsilon_j \sum_k \omega^k \wedge \omega_k^j$ , changeons les indices et factorisons :

$$(6.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = dd\omega^j = \varepsilon_j \sum_k (\omega^k \wedge \omega_k^j - \omega^j \wedge d\omega_k^i) \\ = \varepsilon_i \sum_j \sum_k \varepsilon_i \cdot \omega^k \wedge \omega_k^j \wedge \omega_j^i - \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge d\omega_j^i \\ = \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge \left( \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_k^j \wedge \omega_k^i - d\omega_j^i \right). \end{array} \right.$$

Après division par  $\varepsilon_i$ , nous obtenons une équation sur des formes différentielles qui est analogue à (3.22), à un changement de notations près.

**Lemme 6.32.** *Il existe des coefficients  $S_{jkl}^i$  (dont l'expression explicite est encore inconnue), tels que*

$$(6.33) \quad d\omega_j^i - \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_j^k \wedge \omega_k^i = \sum_{k < l} S_{jkl}^i \cdot \omega^k \wedge \omega^l.$$

□ Correspondance notationnelle :  $S_{jkl}^i \equiv A_{ji}^{kl}$  de [Ca1922].

*Démonstration.* Pour établir ce lemme à partir de l'identité (6.31), il faut généraliser le Lemme 3.23 à une collection de 2-formes dont le nombre est moindre que la dimension de l'espace ambiant, qui est ici égale à  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Formulons donc l'énoncé suivant.

**Lemme 6.34.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 1$ , soit  $\nu \in \mathbb{N}$ , soient  $\xi^1, \dots, \xi^n$  des 1-formes différentielles à coefficients analytiques localement définies au voisinage de l'origine sur  $\mathbb{R}^{n+\nu}$  qui sont linéairement indépendantes à l'origine et soient  $\Xi^1, \dots, \Xi^n$  des 2-formes différentielles à coefficients analytiques localement définies au voisinage de l'origine. Soient  $\zeta^1, \dots, \zeta^\nu$  des 1-formes différentielles qui complètent la collection  $\xi^1, \dots, \xi^n$  en une base sur  $\mathbb{R}^{n+\nu}$  au voisinage de l'origine, de telle sorte que l'on peut toujours décomposer chacune des 2-formes  $\Xi^j$  de la manière suivante :*

$$(6.35) \quad \Xi^j = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} A_{k_1 k_2}^j \cdot \xi^{k_1} \wedge \xi^{k_2} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{\nu} B_{kl}^j \cdot \xi^k \wedge \zeta^l + \sum_{1 \leq l_1 < l_2 \leq \nu} C_{l_1 l_2}^j \cdot \zeta^{l_1} \wedge \zeta^{l_2},$$

où l'on prolonge bien sûr la définition des  $A_{k_1 k_2}^j$  pour  $k_1 \geq k_2$  en posant  $A_{k_1 k_2}^j := -A_{k_2 k_1}^j$  et de même pour  $C_{l_1 l_2}^j$  lorsque  $l_1 \geq l_2$ . Alors les 2-formes  $\Xi^1, \dots, \Xi^n$  satisfont l'équation

$$(6.36) \quad 0 = \sum_j \xi^j \wedge \Xi^j,$$

si et seulement si tous les coefficients  $B_{kl}^j$  et  $C_{l_1 l_2}^j$  s'annulent et si les coefficients  $A_{k_1, k_2}^j$  satisfont la relation de symétrie indicielle :

$$(6.37) \quad 0 = A_{kl}^j + A_{jk}^l + A_{lj}^k.$$

*Démonstration.* Il suffit de remplacer l'expression (6.) dans l'équation (6.), de réorganiser le tout en faisant apparaître une base de 3-formes sur  $\mathbb{R}^{n+\nu}$ . □

Pour tout  $i = 1, \dots, n$ , si nous appliquons ce lemme à l'équation (6.31), i.e.

$$(6.38) \quad 0 = \sum_j \omega^j \wedge \left( \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_j^k \wedge \omega_k^i - d\omega_j^i \right),$$

nous déduisons directement l'existence des coefficients  $S_{jkl}^i$ . □

Résumons les relations de symétrie indicielle que satisfont les  $S_{jkl}^i$  : par construction  $\omega_j^i + \omega_i^j = 0$ , d'où  $S_{jkl}^i + S_{ikl}^j = 0$ . De plus, l'application du Lemme 6.34 nous donne deux nouvelles relations. En appliquant le Lemme 3.49 (à un changement de notation près), nous déduisons la quatrième relation  $S_{jkl}^i = S_{lij}^k$ . En conclusion, les  $S_{jkl}^i$  satisfont les quatre relations de symétrie indicielle suivantes :

$$(6.39) \quad \begin{cases} 0 = S_{jkl}^i + S_{ikl}^j, \\ 0 = S_{jkl}^i + S_{jlk}^i, \\ 0 = S_{jkl}^i - S_{lij}^k, \\ 0 = S_{jkl}^i + S_{ljk}^i + S_{klj}^i. \end{cases}$$

Comme pour les coefficients  $R_{jkl}^i$ , nous appellerons *quantités normales* les composantes du tenseur de courbure  $S_{jkl}^i$  sur  $M \times \mathcal{O}_{p,n-p}$  dont les indices satisfont les inégalités :

$$(6.40) \quad \begin{cases} j > i, & k > l, \\ j \geq k, & i \geq l. \end{cases}$$

D'après le Lemme 3.49 (à un changement de notation près), toute composante du tenseur de courbure s'exprime comme combinaison linéaire des composantes normales. De plus, les composantes normales sont linéairement indépendantes. Enfin, il y a exactement  $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$  quantités normales.

**6.41. Première expression explicite (insuffisante) des coefficients de courbure  $S_{jkl}^i$ .** L'existence des coefficients de courbure  $S_{jkl}^i$  dans la formule (6.33) tiendra lieu de guide pour calculer leur expression complète, en fonction des  $\Lambda_{mp}^q$ , par une formule qui sera analogue à l'expression (3.44) des  $R_{jkl}^i$  en fonction des  $\Gamma_{mp}^q$  (voir (6.??) ci-dessous).

Les coefficients  $S_{jkl}^i$  doivent apparaître dans le membre de droite de l'expression  $d\omega_j^i - \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_j^k \wedge \omega_k^i$ , lorsque l'on remplace les formes  $\omega_j^i$ , etc., par leurs expressions explicites. Développons ce calcul. Tout d'abord, appliquons l'opérateur de différentiation extérieure à l'identité  $\omega_j^i = -\rho_j^i + \sum_k \Lambda_{jk}^i \cdot \omega^k$  en utilisant la formule de différentiation covariante (6.28), remplaçons  $d\omega^k$ , puis remplaçons  $\omega_m^l = \sum_p \Lambda_{mp}^l \cdot \omega^p - \rho_m^l$  et  $\omega_l^k = \sum_m \Lambda_{lm}^k \cdot \omega^m - \rho_l^k$ , et réorganisons les sommes

en reportant à la fin les termes de type  $\rho_j^i \wedge \omega^k$  ainsi que le terme  $-d\rho_j^i$ , tous envisagés comme des restes «inintéressants», ce qui nous donne :

$$(6.42) \quad \left\{ \begin{aligned} d\omega_j^i &= -d\rho_j^i + \sum_k d\Lambda_{jk}^i \cdot \omega^k + \sum_k \Lambda_{jk}^i \cdot d\omega^k \\ &= \sum_k \sum_l \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega^l} \cdot \omega^l \wedge \omega^k + \sum_k \sum_{l < m} \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega_m^l} \cdot \omega_m^l \wedge \omega^k + \\ &\quad + \sum_{k,l} \varepsilon_k \Lambda_{jk}^i \cdot \omega^l \wedge \omega_l^k - d\rho_j^i \\ &= \sum_{k < l} \left( \frac{\partial \Lambda_{jl}^i}{\partial \omega^k} - \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega^l} \right) \cdot \omega^k \wedge \omega^l + \sum_k \sum_{l < m} \sum_p \Lambda_{mp}^l \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega_m^l} \cdot \omega^p \wedge \omega^k - \\ &\quad - \sum_k \sum_{l < m} \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega_m^l} \cdot \rho_m^l \wedge \omega^k + \sum_{k,l,m} \varepsilon_k \Lambda_{jk}^i \Lambda_{lm}^k \cdot \omega^l \wedge \omega^m - \\ &\quad - \sum_{k,l} \varepsilon_k \Lambda_{jk}^i \cdot \omega^l \wedge \rho_l^k - d\rho_j^i \\ &= \sum_{k < l} \omega^k \wedge \omega^l \cdot \left( \frac{\partial \Lambda_{jl}^i}{\partial \omega^k} - \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega^l} + \sum_{m < p} \Lambda_{mk}^p \frac{\partial \Lambda_{jl}^i}{\partial \omega_m^p} - \sum_{m < p} \Lambda_{ml}^p \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega_m^p} \right) + \\ &\quad + \sum_{k < l} \omega^k \wedge \omega^l \cdot \left( \sum_m \varepsilon_m [\Lambda_{jm}^i \Lambda_{kl}^m - \Lambda_{jm}^i \Lambda_{lk}^m] \right) - \\ &\quad - \sum_k \sum_{l < m} \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega_m^l} \cdot \rho_m^l \wedge \omega^k - \sum_{k,l} \varepsilon_k \Lambda_{jk}^i \cdot \omega^l \wedge \rho_l^k - d\rho_j^i. \end{aligned} \right.$$

Ainsi, dans ce premier résultat, nous considérons que la dernière ligne constituée de trois expressions est un «reste», ce que nous allons expliquer dans un instant.

Remplaçons par ailleurs  $\omega_j^k := -\rho_j^k + \sum_l \Lambda_{jl}^k \cdot \omega^l$  et  $\omega_k^i := -\rho_k^i + \sum_m \Lambda_{km}^i \cdot \omega^m$  dans la somme  $\sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_j^k \wedge \omega_k^i$  et réorganisons seulement la première somme (triple) sans modifier les trois autres termes :

$$(6.43) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_j^k \wedge \omega_k^i &= \sum_{k,l,m} \varepsilon_k \Lambda_{jl}^k \Lambda_{km}^i \cdot \omega^l \wedge \omega^m + \sum_k \varepsilon_k \cdot \rho_j^k \wedge \rho_k^i - \\ &\quad - \sum_{k,l} \varepsilon_k \Lambda_{jl}^k \cdot \omega^l \wedge \rho_k^i - \sum_{k,m} \varepsilon_k \Lambda_{km}^i \cdot \rho_j^k \wedge \omega^m \\ &= \sum_{k < l} \left( \sum_m \varepsilon_m [\Lambda_{jk}^m \Lambda_{ml}^i - \Lambda_{jl}^m \Lambda_{mk}^i] \right) \cdot \omega^k \wedge \omega^l - \\ &\quad - \sum_{k,l} \varepsilon_k \Lambda_{jl}^k \cdot \omega^l \wedge \rho_k^i - \sum_{k,m} \varepsilon_k \Lambda_{km}^i \cdot \rho_j^k \wedge \omega^m + \\ &\quad + \sum_k \varepsilon_k \cdot \rho_j^k \wedge \rho_k^i. \end{aligned} \right.$$

Pour trouver l'expression des  $S_{jkl}^i$ , il faut maintenant soustraire (6.43) de (6.42). Nous affirmons que la soustraction du tout dernier terme de (6.43) au tout dernier terme de (6.42) donne zéro comme résultat, *i.e.* nous avons le lemme suivant (noter l'interversion des facteurs  $\rho_j^k \wedge \rho_k^i = -\rho_k^i \wedge \rho_j^k$ ).

**Lemme 6.44.** *La matrice  $R = (\rho_j^i) = E \cdot dU \cdot \tilde{U}$  satisfait l'équation*

$$(6.45) \quad 0 = dR - R \wedge (E \cdot R),$$

dans laquelle l'opérateur de multiplication extérieure agit en même temps que la multiplication matricielle. Cette équation s'écrit explicitement avec les indices :

$$(6.46) \quad 0 = d\rho_j^i - \sum_k \rho_k^i \wedge (\varepsilon_k \cdot \rho_j^k).$$

*Démonstration.* En appliquant l'opérateur de différentiation extérieure à la définition  $R = E \cdot dU \cdot \tilde{U}$ , nous obtenons

$$(6.47) \quad dR = -E \cdot dU \wedge d\tilde{U}.$$

Par ailleurs, en différentiant l'identité  $I_{n \times n} = U \cdot \tilde{U}$ , nous obtenons  $0 = dU \cdot \tilde{U} + U \cdot d\tilde{U}$ , ce qui nous permet de remplacer  $dU \cdot \tilde{U}$  par  $-U \cdot d\tilde{U}$  dans le calcul suivant :

$$(6.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} R \wedge (E \cdot R) = E \cdot dU \cdot \tilde{U} \wedge E \cdot E \cdot dU \cdot \tilde{U} \\ \quad = E \cdot dU \cdot \tilde{U} \wedge dU \cdot \tilde{U} \\ \quad = -E \cdot dU \cdot \tilde{U} \wedge U \cdot d\tilde{U} \\ \quad = -E \cdot dU \wedge d\tilde{U} \\ \quad = dR, \end{array} \right.$$

en tenant compte de (6.47) pour la dernière égalité, ce qui achève la vérification de (6.45).  $\square$

Ainsi, dans la soustraction de (6.43) à (6.42), le terme  $-d\rho_j^i + \sum_k \varepsilon_k \cdot \rho_k^i \wedge \rho_j^k$  disparaît. Il ne reste donc plus que des combinaisons linéaires des 2-formes  $\omega^k \wedge \omega^l$ , avec  $k < l$ , et  $\omega^k \wedge \rho_j^i$ , avec la condition supplémentaire  $i < j$  [après une légère réorganisation qui utiliserait l'antisymétrie  $\rho_j^i = -\rho_i^j$ , mais que nous n'avons pas effectuée]. Or ces 2-formes différentielles  $(\omega^k \wedge \omega^l)_{k < l}$  et  $(\omega^k \wedge \rho_j^i)_{i < j}$  sont indépendantes, grâce au Lemme 6.22 (c). Nous en déduisons que dans la soustraction de (6.43) à (6.42), les termes que nous avons appelés «restes» et qui sont les coefficients de  $(\omega^k \wedge \rho_j^i)_{i < j}$ , doivent s'annihiler. Très précisément, la soustraction de l'avant-dernière ligne de (6.) à la dernière ligne de (6.) (excepté le terme  $-d\rho_j^i$ ) donne zéro :

$$(6.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = - \sum_k \sum_{l < m} \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega_m^l} \cdot \rho_m^l \wedge \omega^k - \sum_k \sum_l \varepsilon_k \Lambda_{jk}^i \cdot \omega^l \wedge \rho_l^k - \\ \quad + \sum_k \sum_l \varepsilon_k \Lambda_{jl}^k \cdot \omega^l \wedge \rho_k^i - \sum_k \sum_m \varepsilon_k \Lambda_{km}^i \cdot \rho_j^k \wedge \omega^m. \end{array} \right.$$



Ici, il est remarquable que nous ayons pu déduire cette propriété d'annulation *sans avoir à pousser plus loin le calcul explicite de ces restes qui voudrait qu'on y insère les expressions (6.) des termes  $\Lambda_{jk}^i$ .*

Ensuite – et c'est ce qui nous intéresse – nous pouvons déduire que dans la soustraction de (6.43) à (6.42), les coefficients des 2-formes  $\omega^k \wedge \omega^l$  s'identifie aux composantes  $S_{jkl}^i$ . Ainsi, en limitant le développement des calculs à l'essentiel, nous avons obtenu l'énoncé suivant.

**Lemme 6.50.** *L'expression explicite des coefficients de courbure  $S_{jkl}^i$  dans le co-repère relevé (avec les variables de rotation) en fonction des coefficients  $\Lambda_{ij}^k$  est la suivante :*

$$(6.51) \quad \left\{ \begin{aligned} S_{jkl}^i &= \frac{\partial \Lambda_{jl}^i}{\partial \omega^k} - \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega^l} + \sum_{m < p} \left( \Lambda_{mk}^p \frac{\partial \Lambda_{jl}^i}{\partial \omega_m^p} - \Lambda_{ml}^p \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega_m^p} \right) + \\ &+ \sum_m \varepsilon_m (\Lambda_{jm}^i \Lambda_{kl}^m - \Lambda_{jm}^i \Lambda_{lk}^m - \Lambda_{jk}^m \Lambda_{ml}^i + \Lambda_{jl}^m \Lambda_{mk}^i). \end{aligned} \right.$$

Cette formule est analogue à la formule (3. 44) pour les composantes de courbure  $R_{jkl}^i$ . On notera la présence des dérivées covariantes  $\frac{\partial}{\partial \omega_m^i} \Lambda_{jl}^i$  dans la formule (6.) ci-dessus, absentes dans (3.44). Rappelons que les coefficients  $\Lambda_{jl}^i$  se déduisent des coefficients  $\Gamma_{j_1 l_1}^{i_1}$  par les formules de rotation tensorielle (6.21). Aussi la formule (6.) est-elle insuffisante. Pour la conduire à son aboutissement, il faudrait remplacer dans (6.) tous les coefficients  $\Lambda_{jl}^i$  par leur expression, tenir compte des expressions explicites (6.29) des dérivées covariantes, réorganiser le tout et le simplifier afin de faire apparaître une formule finale synthétique et harmonieuse. Cette voie est viable, mais elle exigerait un calcul considérable et elle requerrait une certaine expertise dans l'art de reconnaître les harmonies formelles invisibles. Nous allons procéder différemment, en court-circuitant ce long calcul.

**6.52. Expression des  $S_{jkl}^i$  en fonction des  $R_{jkl}^i$ .** Ainsi, l'expression précédente (6.51) n'est-elle pas encore satisfaisante. L'expression désirée (6.54) ci-dessous montre que les  $S_{jkl}^i$  s'obtiennent par des formules de rotation tensorielles à partir des  $R_{jkl}^i$ . Sans produire les détails de la démonstration, Peter J. Olver cite ces formules (dans le cas riemannien) page 3 ?? de [OL1995].

**Lemme 6.53.** *Les  $S_{jkl}^i$  se déduisent des  $R_{jkl}^i$  par des formules de degré quatre par rapport aux éléments de la matrice de rotation  $U = (u_j^i)$  et de son inverse  $\tilde{U} = (\tilde{u}_j^i)$  :*

$$(6.54) \quad \left\{ \begin{aligned} S_{jkl}^i &= \sum_{i_1, j_1, k_1, l_1} \varepsilon_i \varepsilon_{i_1} u_{i_1}^i \tilde{u}_j^{j_1} \tilde{u}_k^{k_1} \tilde{u}_l^{l_1} R_{j_1 k_1 l_1}^{i_1} \\ &= \sum_{i_1, j_1, k_1, l_1} \tilde{u}_i^{i_1} \tilde{u}_j^{j_1} \tilde{u}_k^{k_1} \tilde{u}_l^{l_1} R_{j_1 k_1 l_1}^{i_1}. \end{aligned} \right.$$

Évidemment, ces deux formules sont équivalentes, en vertu des relations  $\varepsilon_i u_{i_1}^i = \varepsilon_{i_1} \tilde{u}_i^{i_1}$ , établies en (5.20). La première présente l'avantage de respecter les étages

indiciels :  $i$  reste en haut,  $j$ ,  $k$  et  $l$  restent en bas. La seconde présente l'avantage d'être homogène : elle n'incorpore que les éléments de la matrice inverse  $\tilde{U}$  et les quatre indices  $i$ ,  $j$ ,  $k$  et  $l$  sont placés en bas.

*Démonstration.* La stratégie la plus économique pour établir ce lemme consiste à comparer le calcul des  $S_{jkl}^i$  à celui des  $R_{jkl}^i$ , en négligeant toutes les formes différentielles  $du_q^p$ , afin de ne pas avoir à développer certains termes trop complexes qui disparaissent de toute façon à la fin du calcul.

Pour expliquer cette stratégie, considérons la base de formes différentielles sur  $M \times \mathcal{O}_{p, n-p}$  constituée des 1-formes différentielles  $(\omega^i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(du_j^i)_{1 \leq i, j \leq n}$  (cf. Lemme 6.22 (b)). Introduisons le signe de congruence « $\equiv$ » pour signifier «modulo les 1-formes  $du_q^p$ ». Supposons qu'après un calcul intermédiaire (relativement économique) *effectué modulo les 1-formes  $du_q^p$* , nous obtenions la relation de congruence :

$$(6.55) \quad d\omega_j^i \equiv \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \sum_{k < l} S_{jkl}^i \cdot \omega^k \wedge \omega^l,$$

avec des  $S_{jkl}^i$  connus explicitement en fonction des  $R_{jkl}^i$ . Alors, grâce au Lemme 6.32, nous savons que le signe de congruence « $\equiv$ » est en vérité un signe d'égalité « $=$ ». Ainsi est-il justifié (et avantageux) de conduire les calculs modulo les  $du_q^p$ .

Pour commencer, observons que  $\rho_j^i \equiv 0$ , d'après la définition (6.5), d'où la réécriture suivante de la relation (6.16) :

$$(6.56) \quad \omega_j^i \equiv \sum_k \Lambda_{jk}^i \cdot \omega^k.$$

Dans cette congruence, remplaçons la valeur de  $\Lambda_{jk}^i$  en fonction des  $\Gamma_{l_2 l_3}^{l_1}$  trouvée en (6.21), remplaçons  $\omega^k = \sum_{l_4} u_{l_4}^k \cdot \theta^{l_4}$ , simplifions le tout grâce à la relation  $\sum_k \tilde{u}_k^{l_3} u_{l_4}^k = \delta_{l_4}^{l_3}$  et reconnaissons l'apparition de  $\theta_{l_2}^{l_1}$  :

$$(6.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_j^i \equiv \sum_k \sum_{l_1, l_2, l_3} \sum_{l_4} \tilde{u}_i^{l_1} \tilde{u}_j^{l_2} \tilde{u}_k^{l_3} u_{l_4}^k \Gamma_{l_2 l_3}^{l_1} \cdot \theta^{l_4} \\ \equiv \sum_{l_1, l_2} \tilde{u}_i^{l_1} \tilde{u}_j^{l_2} \left( \sum_{l_3} \Gamma_{l_2 l_3}^{l_1} \cdot \theta^{l_3} \right) \\ \equiv \sum_{l_1, l_2} \tilde{u}_i^{l_1} \tilde{u}_j^{l_2} \cdot \theta_{l_2}^{l_1}. \end{array} \right.$$

Inversons aussi ces formules :

$$(6.58) \quad \theta_j^i \equiv \sum_{l_1, l_2} u_i^{l_1} u_j^{l_2} \cdot \omega_{l_2}^{l_1}.$$

Écrivons maintenant la différentielle extérieure  $d\omega_j^i$  modulo les formes différentielles  $du_j^i$ . Pour cela, observons qu'en vertu de la relation  $d\tilde{U} = -\tilde{U} \cdot dU \cdot \tilde{U}$ , les différentielles  $d\tilde{u}_i^{l_1}$  et  $d\tilde{u}_j^{l_2}$  sont congrues à zéro. Par conséquent, nous pouvons

écrire, en utilisant les équations de structure (3.29) pour  $d\theta_{l_2}^{l_1}$  qui définissent les  $R_{l_2kl}^{l_1}$  et en remplaçant  $\sum_{k<l} R_{l_2kl}^{l_1} \cdot \theta^k \wedge \theta^l$  par  $\sum_{k,l} \frac{R_{l_2kl}^{l_1}}{2} \cdot \theta^k \wedge \theta^l$  :

$$(6.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\omega_j^i \equiv \sum_{l_1, l_2} \tilde{u}_i^{l_1} \tilde{u}_j^{l_2} \cdot d\theta_{l_2}^{l_1} \\ \equiv \sum_{l_1, l_2} \sum_k \varepsilon_k \tilde{u}_i^{l_1} \tilde{u}_j^{l_2} \cdot \theta_{l_2}^k \wedge \theta_k^{l_1} + \sum_{l_1, l_2} \sum_{k, l} \tilde{u}_i^{l_1} \tilde{u}_j^{l_2} \frac{R_{l_2kl}^{l_1}}{2} \cdot \theta^k \wedge \theta^l. \end{array} \right.$$

Remplaçons  $\theta_{l_2}^k = \sum_{l_3, l_4} u_k^{l_3} u_{l_2}^{l_4} \cdot \omega_{l_4}^{l_3}$ , remplaçons  $\theta_k^{l_1} = \sum_{l_5, l_6} u_{l_1}^{l_5} u_k^{l_6} \cdot \omega_{l_6}^{l_5}$ , puis remplaçons  $\theta^k = \sum_{l_3} \tilde{u}_{l_3}^k \cdot \omega^{l_3}$  et remplaçons  $\theta^l = \sum_{l_4} \tilde{u}_{l_4}^l \cdot \omega^{l_4}$ , ce qui donne :

$$(6.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\omega_j^i \equiv \sum_{l_1, l_2} \sum_k \sum_{l_3, l_4} \sum_{l_5, l_6} \varepsilon_k \tilde{u}_i^{l_1} \tilde{u}_j^{l_2} u_k^{l_3} u_{l_2}^{l_4} u_{l_1}^{l_5} u_k^{l_6} \cdot \omega_{l_4}^{l_3} \wedge \omega_{l_6}^{l_5} + \\ + \sum_{l_1, l_2} \sum_{k, l} \sum_{l_3, l_4} \tilde{u}_i^{l_1} \tilde{u}_j^{l_2} \tilde{u}_{l_3}^k \tilde{u}_{l_4}^l \frac{R_{l_2kl}^{l_1}}{2} \cdot \omega^{l_3} \wedge \omega^{l_4}. \end{array} \right.$$

Simplifions la première ligne en trois temps : premièrement,  $\sum_{l_1} \tilde{u}_i^{l_1} u_{l_1}^{l_5} = \delta_i^{l_5}$ , donc les deux sommes  $\sum_{l_1}$ ,  $\sum_{l_5}$  disparaissent et  $l_5$  est remplacé par  $i$  ; deuxièmement,  $\sum_{l_2} \tilde{u}_j^{l_2} u_{l_2}^{l_4} = \delta_j^{l_4}$ , donc les deux sommes  $\sum_{l_2}$ ,  $\sum_{l_4}$  disparaissent et  $l_4$  est remplacé par  $j$  ; troisièmement, pour simplifier  $\sum_k \varepsilon_k u_k^{l_3} u_k^{l_6}$ , utilisons la relation (5.20) pour y remplacer  $\varepsilon_k u_k^{l_6} = \varepsilon_{l_6} \tilde{u}_{l_6}^k$ , ce qui transforme cette somme en  $\sum_k \varepsilon_{l_6} u_k^{l_3} \tilde{u}_{l_6}^k = \varepsilon_{l_6} \delta_{l_6}^{l_3}$ , donc les deux sommes  $\sum_k$ ,  $\sum_{l_6}$  disparaissent et  $l_6$  est remplacé par  $l_3$ . Enfin, réorganisons la deuxième ligne en permutant la dénomination des indices :  $(l_1, l_2, k, l, l_3, l_4) \mapsto (l_1, l_2, l_3, l_4, k, l)$  et en faisant réapparaître  $\sum_{k<l}$  au lieu de  $\sum_{k, l}$ . Au total, nous obtenons :

$$(6.61) \quad d\omega_j^i \equiv \sum_{l_3} \varepsilon_{l_3} \cdot \omega_j^{l_3} \wedge \omega_{l_3}^i + \sum_{k<l} \omega^k \wedge \omega^l \cdot \left( \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} \tilde{u}_i^{l_1} \tilde{u}_j^{l_2} \tilde{u}_k^{l_3} \tilde{u}_l^{l_4} R_{l_2l_3l_4}^{l_1} \right),$$

ce qui donne l'expression désirée (6.54) des  $S_{jkl}^i$ .  $\square$

## §7. IDENTITÉS DE BIANCHI ET DÉRIVÉES COVARIANTES D'ORDRE QUELCONQUE

### 7.1. Différentiation des équations de structure sans les variables de rotation.

Calculons explicitement les dérivées covariantes du tenseur de courbure  $R_{jkl}^i$ . Tout d'abord, réécrivons (3.29) en remplaçant  $\sum_{k<l}$  par  $\frac{1}{2} \sum_{k, l}$ , grâce à l'antisymétrie  $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$  :

$$(7.2) \quad d\theta_j^i = \sum_k \varepsilon_k \cdot \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \sum_{k, l} \frac{R_{jkl}^i}{2} \cdot \theta^k \wedge \theta^l.$$

Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure à ces identités, en tenant compte de la relation de Poincaré  $dd\alpha = 0$  et en tenant compte du changement

de signe pour la différentiation du produit extérieur de deux 1-formes  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta$ , ce qui donne :

$$(7.3) \quad \begin{cases} 0 = dd\theta_j^i = \sum_k \varepsilon_k \cdot d\theta_j^k \wedge \theta_k^i - \sum_k \varepsilon_k \cdot \theta_j^k \wedge d\theta_k^i + \sum_{k,l,m} \frac{1}{2} \frac{\partial R_{jkl}^i}{\partial \theta^m} \cdot \theta^m \wedge \theta^k \wedge \theta^l + \\ \quad + \sum_{k,l} \frac{1}{2} R_{jkl}^i \cdot d\theta^k \wedge \theta^l - \sum_{k,l} \frac{1}{2} R_{jkl}^i \cdot \theta^k \wedge d\theta^l. \end{cases}$$

Grâce aux relations (3.) et (3.), nous pouvons remplacer les valeurs de  $d\theta_j^k$ , de  $d\theta_k^i$ , de  $d\theta^k$  et de  $d\theta^l$ , ce qui donne :

$$(7.4) \quad \begin{cases} 0 = \underbrace{\sum_{k,l} \varepsilon_k \varepsilon_l \cdot \theta_j^l \wedge \theta_l^k \wedge \theta_k^i}_{\boxed{1}} + \sum_k \sum_{l,m} \varepsilon_k \frac{1}{2} R_{jlm}^k \cdot \theta^l \wedge \theta^m \wedge \theta_k^i - \\ \quad - \underbrace{\sum_{k,l} \varepsilon_k \varepsilon_l \cdot \theta_j^k \wedge \theta_k^l \wedge \theta_l^i}_{\boxed{1}} - \sum_k \sum_{l,m} \varepsilon_k \frac{1}{2} R_{klm}^i \cdot \theta_j^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m + \\ \quad + \sum_{k,l,m} \frac{1}{2} \frac{\partial R_{jkl}^i}{\partial \theta^m} \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m + \sum_{k,l,m} \varepsilon_k \frac{1}{2} R_{jkl}^i \cdot \theta^m \wedge \theta_m^k \wedge \theta^l - \\ \quad - \sum_{k,l,m} \frac{1}{2} R_{jkl}^i \varepsilon_l \cdot \theta^k \wedge \theta^m \wedge \theta_m^l. \end{cases}$$

Dans cette identité, nous avons souligné et numéroté deux termes qui s'annihilent. Avant de poursuivre, énonçons sans le vérifier un lemme élémentaire.

**Lemme 7.5.** *Si des quantités indicées  $A_{klm}$  satisfont la relation d'antisymétrie  $A_{klm} = -A_{lkm}$ , on a l'identité suivante :*

$$(7.6) \quad \begin{cases} \sum_{k,l} \sum_m \frac{1}{2} A_{klm} \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m = \sum_{k<l} \sum_m A_{klm} \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m \\ \quad = \sum_{k<l<m} (A_{klm} + A_{mkl} + A_{lmk}) \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m. \end{cases}$$

Maintenant, plaçons à la première place le troisième des cinq termes qui restent dans (7.4) et appliquons le Lemme 7.5 ci-dessus ; dans les quatre termes restants,

remplaçons  $\theta_k^i$ ,  $\theta_j^k$ ,  $\theta_m^l$  et  $\theta_m^l$  par leurs valeurs et réorganisons les indices sans reproduire les calculs intermédiaires ; nous obtenons :

$$(7.7) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \sum_{k < l < m} \left( \frac{\partial R_{jkl}^i}{\partial \theta^m} + \frac{\partial R_{jmk}^i}{\partial \theta^l} + \frac{\partial R_{jlm}^i}{\partial \theta^k} \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m + \\ &+ \sum_p \varepsilon_p \left( \Gamma_{pm}^i R_{jkl}^p - \Gamma_{jm}^p R_{pkl}^i - \Gamma_{km}^p R_{jpl}^i - \Gamma_{lm}^p R_{jkp}^i \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m + \\ &+ \sum_p \varepsilon_p \left( \Gamma_{pl}^i R_{jmk}^p - \Gamma_{jl}^p R_{pmk}^i - \Gamma_{ml}^p R_{jpk}^i - \Gamma_{kl}^p R_{jmp}^i \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m + \\ &+ \sum_p \varepsilon_p \left( \Gamma_{pk}^i R_{jlm}^p - \Gamma_{jk}^p R_{plm}^i - \Gamma_{lk}^p R_{jpm}^i - \Gamma_{mk}^p R_{jlp}^i \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m. \end{aligned} \right.$$

Définissons alors la  $m$ -ième dérivée covariante  $(R_{jkl}^i)_m$  de la composante de courbure  $R_{jkl}^i$  comme suit :

$$(7.8) \quad (R_{jkl}^i)_m := \frac{\partial R_{jkl}^i}{\partial \theta^m} + \sum_p \varepsilon_p \left( \Gamma_{pm}^i R_{jkl}^p - \Gamma_{jm}^p R_{pkl}^i - \Gamma_{km}^p R_{jpl}^i - \Gamma_{lm}^p R_{jkp}^i \right).$$

Égalons à zéro les coefficients de la base de 3-formes  $(\theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m)_{1 \leq k < l < m \leq n}$  qui apparaissent dans la dernière relation (7.7) : nous obtenons les *identités de Bianchi* :

$$(7.9) \quad 0 = (R_{jkl}^i)_m + (R_{jlm}^i)_k + (R_{jmk}^i)_l.$$

De plus, en appliquant l'opérateur de différentiation covariante  $(\cdot)_m$  aux relations de symétrie indicielle (3.28) et (3.), nous obtenons aussi d'autres relations de symétrie qui sont satisfaites par ce tenseur à cinq indices :

$$(7.10) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= (R_{jkl}^i)_m + (R_{ljk}^i)_m + (R_{klj}^i)_m, \\ 0 &= (R_{jkl}^i)_m + (R_{jlk}^i)_m, \\ 0 &= (R_{jkl}^i)_m + (R_{ikl}^j)_m, \\ 0 &= (R_{jkl}^i)_m - (R_{lij}^k)_m. \end{aligned} \right.$$

**Lemme 7.11.** *Les dérivés covariants  $(R_{jkl}^i)_m$  ont un comportement tensoriel, i.e. pour tout changement de coordonnée  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  tel que  $\bar{\theta}^i = \theta^i$ , on a :*

$$(7.12) \quad (\bar{R}_{jkl}^i)_m = (R_{jkl}^i)_m.$$

*Démonstration.* Premièrement, d'après l'Assertion (3.32), nous avons une correspondance exacte entre les composantes de la courbure :  $\bar{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i$ . Deuxièmement, la relation  $\bar{\theta}^i = \theta^i$  donne  $\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^i} = \frac{\partial}{\partial \theta^i}$  par dualité. Troisièmement, la relation

$$(7.13) \quad \sum_k \bar{\Gamma}_{jk}^i \cdot \bar{\theta}^k = \bar{\theta}_j^i = \theta_j^i = \sum_k \Gamma_{jk}^i \cdot \theta^k$$

donne  $\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i$ . En insérant ces trois égalités dans la définition (7.8) de la dérivée covariante, nous obtenons immédiatement  $(\bar{R}_{jkl}^i)_m = (R_{jkl}^i)_m$ .  $\square$

**7.14. Dérivées covariantes d'ordre supérieur.** Définissons maintenant les dérivées covariantes d'ordre deux des composantes de la courbure comme suit :

$$(7.15) \quad \left\{ \begin{aligned} \left( \left( R_{jkl}^i \right)_{m_1} \right)_{m_2} &:= \frac{\partial}{\partial \omega^{m_2}} \left( R_{jkl}^i \right)_{m_1} + \sum_p \varepsilon_p \left( \Gamma_{pm_2}^i \left( R_{jkl}^p \right)_{m_1} - \Gamma_{jm_2}^p \left( R_{pkl}^i \right)_{m_1} - \right. \\ &\quad \left. - \Gamma_{km_2}^p \left( R_{jpl}^i \right)_{m_1} - \Gamma_{lm_2}^p \left( R_{jkp}^i \right)_{m_1} - \Gamma_{m_1m_2}^p \left( R_{jkl}^i \right)_p \right). \end{aligned} \right.$$

Cette définition purement formelle est exactement analogue à la définition (1.26) de la dérivée covariante d'un tenseur une fois contravariant et deux fois covariant, due à Ricci et à Levi-Civita. Les dérivées covariantes d'ordre supérieur

$\left( \left( \left( R_{jkl}^i \right)_{m_1} \right)_{m_2} \right)_{m_3}$ , etc., sont définies en imitant (1.26), comme si tous les indices  $m_1, m_2, m_3, \dots$  étaient des indices covariants du calcul tensoriel classique.

**Lemme 7.16.** *Les dérivées covariantes des composantes de courbure  $R_{jkl}^i$  commutent :*

$$(7.17) \quad \left( \left( R_{jkl}^i \right)_{m_1} \right)_{m_2} = \left( \left( R_{jkl}^i \right)_{m_2} \right)_{m_1},$$

pour tous entiers  $m_1, m_2 = 1, \dots, n$ .

Il existe une preuve directe de cette relation à partir des définitions formelles de la dérivée covariante, mais cette preuve est d'une complexité importante, car il est nécessaire de développer toutes les expressions en fonction des coefficients de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$ . De plus, cette relation de commutation pour deux dérivées covariantes ne peut pas être utilisée pour raisonner par récurrence afin d'établir que les dérivées covariantes d'un ordre  $\kappa \geq 2$  quelconque commutent : il faudrait développer tous les termes de la définition formelle de la  $\kappa$ -ième dérivée covariante, ce qui représenterait une tâche calculatoire considérable. Ultérieurement, nous fournirons une preuve indirecte et économique de ce lemme, à partir d'une relation de commutation analogue qui sera satisfaite par les dérivées covariantes des coefficients de courbure  $S_{jkl}^i$ , qui incorporent les variables de rotation.

**7.18. Différentiation des équations de structure avec les variables de rotation.**

Pour obtenir des identités de Bianchi satisfaites par les  $S_{jkl}^i$ , analogues à celles qui sont satisfaites par les  $R_{jkl}^i$ , appliquons l'opérateur de différentiation extérieure aux identités (6.). Cependant, le calcul va présenter des différences importantes, à cause de la présence des formes  $\omega_j^i$ ,  $i < j$ , qui sont indépendantes des formes  $\omega^i$ , alors que les formes  $\theta_j^i$  étaient linéairement dépendantes des formes  $\theta^i$ , dans le calcul précédent. Par conséquent, nous allons indiquer soigneusement toutes les étapes intermédiaires de ce nouveau calcul.

Tout d'abord, réécrivons (6.33) en remplaçant  $\sum_{k < l}$  par  $\frac{1}{2} \sum_{k, l}$ , grâce à l'antisymétrie  $S_{jkl}^i = -S_{jlk}^i$  :

$$(7.19) \quad \omega_j^i = \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \sum_{k, l} \frac{S_{jkl}^i}{2} \cdot \omega^k \wedge \omega^l.$$

Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure, en tenant compte de l'identité de Poincaré :

(7.20)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = dd\omega_j^i = \sum_k \varepsilon_k \cdot d\omega_j^k \wedge \omega_k^i - \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_j^k \wedge d\omega_k^i + \sum_{k,l,m} \frac{1}{2} dS_{jkl}^i \cdot \omega^k \wedge \omega^l + \\ \quad + \sum_{k,l} \frac{S_{jkl}^i}{2} \cdot d\omega^k \wedge \omega^l - \sum_{k,l} \frac{S_{jkl}^i}{2} \cdot \omega^k \wedge d\omega^l. \end{array} \right.$$

Remplaçons les valeurs de  $d\omega_j^k$ , de  $d\omega_k^i$ , appliquons la formule (7.) pour développer la différentielle de  $S_{jkl}^i$ , remplaçons les valeurs de  $d\omega^k$  et de  $d\omega^l$  et réorganisons les indices, ce qui donne :

(7.21)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \underbrace{\sum_{k,l} \varepsilon_k \varepsilon_l \cdot \omega_j^l \wedge \omega_l^k \wedge \omega_k^i}_{\boxed{1}} + \sum_{k,l,m} \varepsilon_k \frac{S_{jlm}^k}{2} \cdot \omega^l \wedge \omega^m \wedge \omega_k^i - \\ \quad - \underbrace{\sum_{k,l} \varepsilon_k \varepsilon_l \cdot \omega_j^k \wedge \omega_l^k \wedge \omega_l^i}_{\boxed{1}} - \sum_{k,l,m} \varepsilon_k \frac{S_{klm}^i}{2} \cdot \omega_j^k \wedge \omega^l \wedge \omega^m + \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_{k,l,m} \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m} \cdot \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^m + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \sum_{p<q} \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega_q^p} \cdot \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p + \\ \quad + \sum_{k,l,m} \varepsilon_k \frac{S_{jkl}^i}{2} \cdot \omega^m \wedge \omega_m^k \wedge \omega^l - \sum_{k,l,m} \varepsilon_l \frac{S_{jkl}^i}{2} \cdot \omega^k \wedge \omega^m \wedge \omega_m^l. \end{array} \right.$$

Dans cette identité, nous avons souligné et numéroté deux termes qui s'annihilent, comme dans (7.4). Ramenons en première position les dérivées covariantes par rapport à  $\omega^m$  qui apparaissent à la troisième ligne et réorganisons-les en appliquant le Lemme 7.5 ; dans la somme qui incorpore les dérivées covariantes par rapport à  $\omega_q^p$ , utilisons l'antisymétrie de  $S_{jkl}^i$  par rapport aux indices  $k$  et  $l$  pour remplacer la somme  $\sum_{k,l}$  par  $\sum_{k<l}$  et utilisons de même l'antisymétrie par rapport aux indices  $p$  et  $q$  pour remplacer  $\sum_{p<q}$  par  $\sum_{p,q}$ , ce qui laisse le facteur  $\frac{1}{2}$  inchangé ; réorganisons les deux premiers termes restants, situés respectivement à la première et à la deuxième ligne, en substituant les indices de manière à faire apparaître  $\sum_{k<l} \sum_{p,q} (\dots) \cdot \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p$  et en utilisant le symbole de Kronecker ; enfin, pour réorganiser les deux tous derniers termes situés à la quatrième ligne, substituons les indices de manière à faire apparaître (attention à la différence)

$\sum_{k,l} \sum_{p,q} (\dots) \cdot \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p$ ; au total, nous obtenons :

$$(7.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{k<l<m} \left( \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m} + \frac{\partial S_{jmk}^i}{\partial \omega^l} + \frac{\partial S_{jlm}^i}{\partial \omega^k} \right) \cdot \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^m + \\ + \sum_{k<l} \sum_{p,q} \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega_q^p} + \varepsilon_q \delta_p^i S_{jkl}^q - \varepsilon_p \delta_j^q S_{pkl}^i \right) + \\ + \sum_{k,l} \sum_{p,q} \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p \cdot \left( -\varepsilon_p \delta_k^q \frac{S_{jpl}^i}{2} - \varepsilon_p \delta_l^q \frac{S_{jkp}^i}{2} \right). \end{array} \right.$$

Afin de transformer encore la deuxième ligne, utilisons l'antisymétrie  $\omega_q^p = -\omega_p^q$ , ce qui permet de remplacer  $\sum_{p,q} A_p^q \cdot \omega_q^p$  par  $\sum_{p<q} (A_p^q - A_q^p) \cdot \omega_q^p$ ; afin de transformer la troisième ligne, utilisons les antisymétries de la 3-forme différentielle  $\omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p$  pour remplacer  $\sum_{k,l} \sum_{p,q} A_{klp}^q \cdot \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p$  par  $\sum_{k<l} \sum_{p<q} (A_{klp}^q - A_{lkp}^q - A_{klq}^p + A_{lkq}^p) \cdot \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p$ ; nous obtenons :

$$(7.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{k<l<m} \left( \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m} + \frac{\partial S_{jmk}^i}{\partial \omega^l} + \frac{\partial S_{jlm}^i}{\partial \omega^k} \right) \cdot \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^m + \\ + \sum_{k<l} \sum_{p<q} \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p \cdot \\ \cdot \left( \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega_q^p} + \varepsilon_q \delta_p^i S_{jkl}^q - \varepsilon_p \delta_q^i S_{jkl}^p - \varepsilon_p \delta_j^q S_{pkl}^i + \varepsilon_q \delta_j^p S_{qkl}^i \right) + \\ + \sum_{k<l} \sum_{p<q} \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p \cdot \\ \cdot \left( \underbrace{-\varepsilon_p \delta_k^q \frac{S_{jpl}^i}{2}}_{\boxed{1}} - \underbrace{\varepsilon_p \delta_l^q \frac{S_{jkp}^i}{2}}_{\boxed{3}} + \underbrace{\varepsilon_p \delta_l^q \frac{S_{jpk}^i}{2}}_{\boxed{3}} + \underbrace{\varepsilon_p \delta_k^q \frac{S_{jlp}^i}{2}}_{\boxed{1}} + \right. \\ \left. + \underbrace{\varepsilon_q \delta_k^p \frac{S_{jqk}^i}{2}}_{\boxed{2}} + \underbrace{\varepsilon_q \delta_l^p \frac{S_{jkq}^i}{2}}_{\boxed{4}} - \underbrace{\varepsilon_q \delta_l^p \frac{S_{jqk}^i}{2}}_{\boxed{4}} - \underbrace{\varepsilon_q \delta_k^p \frac{S_{jlk}^i}{2}}_{\boxed{2}} \right). \end{array} \right.$$

Enfin, pour terminer, utilisons les propriétés d'antisymétrie des  $S_{jkl}^i$  pour collecter par paires les huit termes qui apparaissent dans la dernière somme et rassemblons le tout avec la deuxième somme, qui porte sur les mêmes 3-formes différentielles  $\omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p$ . Nous obtenons l'expression finale suivante, que nous interprétons



ci-après :

$$(7.24) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \sum_{k < l < m} \left( \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m} + \frac{\partial S_{jmk}^i}{\partial \omega^l} + \frac{\partial S_{jlm}^i}{\partial \omega^k} \right) \cdot \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^m + \\ &+ \sum_{k < l} \sum_{p < q} \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p \cdot \\ &\cdot \left( \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega_q^p} + \varepsilon_q \delta_p^i S_{jkl}^q - \varepsilon_p \delta_q^i S_{jkl}^p - \varepsilon_p \delta_j^q S_{pkl}^i + \varepsilon_q \delta_j^p S_{qkl}^i - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_p \delta_k^q S_{jpl}^i + \varepsilon_q \delta_k^p S_{jql}^i - \varepsilon_p \delta_l^q S_{jkp}^i + \varepsilon_q \delta_l^p S_{jkq}^i \right). \end{aligned} \right.$$

Puisque toutes les 3-formes différentielles qui apparaissent dans ces dernières expressions sont linéairement indépendantes, leurs coefficients doivent tous s'annuler. En particulier, nous obtenons les *identités de Bianchi*, satisfaites par les coefficients de courbure  $S_{jkl}^i$  :

$$(7.25) \quad 0 = \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m} + \frac{\partial S_{jmk}^i}{\partial \omega^l} + \frac{\partial S_{jlm}^i}{\partial \omega^k}.$$

De plus, nous de l'annulation des coefficients des 3-formes  $\omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p$ ,  $k < l$ ,  $p < q$ , dans (7.) que les dérivées covariantes des  $S_{jkl}^i$  par rapport aux  $\omega_q^p$  s'expriment en fonction des  $S_{j_1 k_1 l_1}^{i_1}$  :

$$(7.26) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega_q^p} &= -\varepsilon_q \delta_p^i S_{jkl}^q + \varepsilon_p \delta_q^i S_{jkl}^p + \varepsilon_p \delta_j^q S_{pkl}^i - \varepsilon_q \delta_j^p S_{qkl}^i + \\ &+ \varepsilon_p \delta_k^q S_{jpl}^i - \varepsilon_q \delta_k^p S_{jql}^i + \varepsilon_p \delta_l^q S_{jkp}^i - \varepsilon_q \delta_l^p S_{jkq}^i. \end{aligned} \right.$$

Nous allons déduire de ces identités une infinité de nouvelles identités qui sont satisfaites par les dérivées covariantes d'ordre supérieur des  $S_{jkl}^i$ .

**Lemme 7.27.** *Pour tous  $i_1, i_2, p_1, q_1, p_2, q_2 = 1, \dots, n$  et pour toute fonction  $F = F(x^i u_j^i)$  sur  $M \times \mathcal{O}_{p, n-p}$ , on a les trois relations de commutation suivantes :*

$$(7.28) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega^{i_1}} \frac{\partial}{\partial \omega^{i_2}} F &= \frac{\partial}{\partial \omega^{i_2}} \frac{\partial}{\partial \omega^{i_1}} F, \\ \frac{\partial}{\partial \omega^{i_1}} \frac{\partial}{\partial \omega_{q_1}^{p_1}} F &= \frac{\partial}{\partial \omega_{q_1}^{p_1}} \frac{\partial}{\partial \omega^{i_1}} F, \\ \frac{\partial}{\partial \omega_{q_1}^{p_1}} \frac{\partial}{\partial \omega_{q_2}^{p_2}} F &= \frac{\partial}{\partial \omega_{q_2}^{p_2}} \frac{\partial}{\partial \omega_{q_1}^{p_1}} F. \end{aligned} \right.$$

*Démonstration.* Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure à l'identité du Lemme 6., écrite sous la forme :

$$(7.29) \quad dF = \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial F}{\partial \omega^{i_1}} \cdot \omega^{i_1} + \sum_{p_1 < q_1} \frac{\partial F}{\partial \omega_{q_1}^{p_1}} \cdot \omega_{q_1}^{p_1},$$

ce qui donne, après une réorganisation élémentaire :

$$(7.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{i_1 < i_2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \omega^{i_1} \partial \omega^{i_2}} - \frac{\partial^2 F}{\partial \omega^{i_2} \partial \omega^{i_1}} \right) \cdot \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} + \\ + \sum_{i_1} \sum_{p_1 < q_1} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \omega^{i_1} \partial \omega^{p_1}} - \frac{\partial^2 F}{\partial \omega^{p_1} \partial \omega^{i_1}} \right) \cdot \omega^{i_1} \wedge \omega^{p_1} + \\ + \sum_{p_1 < q_1, p_2 < q_2, (p_1, q_1) < (p_2, q_2)} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \omega^{p_1} \partial \omega^{q_2}} - \frac{\partial^2 F}{\partial \omega^{q_2} \partial \omega^{p_1}} \right) \cdot \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_2}. \end{array} \right.$$

Ici, la notation d'ordre  $(p_1, q_1) < (p_2, q_2)$  s'interprète par :  $p_1 < p_2$  ou bien  $p_1 = p_2$  et  $q_1 < q_2$ . Le lemme est démontré.  $\square$

**Lemme 7.31.** *La dérivées covariantes des  $S_{jkl}^i$  par rapport aux formes différentielles  $\omega^m$  s'expriment en fonction des dérivées covariantes des composantes de courbure  $\left( R_{j'k'l'}^{i'} \right)_{m'}$  par des formules de quintuple rotation indicielle :*

$$(7.32) \quad \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m} = \sum_{i', j', k', l', m'} \varepsilon_i \varepsilon_{i'} u_{i'}^i \tilde{u}_j^{j'} \tilde{u}_k^{k'} \tilde{u}_l^{l'} \tilde{u}_m^{m'} \left( R_{j'k'l'}^{i'} \right)_{m'}.$$

Plus généralement, pour tout entier  $\kappa \geq 1$  et pour tous  $m_1, m_2, \dots, m_\kappa = 1, \dots, n$  :

$$(7.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^\kappa S_{jkl}^i}{\partial \omega^{m_1} \partial \omega^{m_2} \dots \partial \omega^{m_\kappa}} = \sum_{i', j', k', l', m'_1, m'_2, \dots, m'_\kappa} \\ \varepsilon_i \varepsilon_{i'} u_{i'}^i \tilde{u}_j^{j'} \tilde{u}_k^{k'} \tilde{u}_l^{l'} \tilde{u}_{m'_1}^{m'_1} \tilde{u}_{m'_2}^{m'_2} \dots \tilde{u}_{m'_\kappa}^{m'_\kappa} \left( \dots \left( \left( R_{j'k'l'}^{i'} \right)_{m'_1} \right)_{m'_2} \dots \right)_{m'_\kappa}. \end{array} \right.$$

Grâce à ce lemme, nous pouvons fournir une preuve indirecte et économique de la relation de commutation (7.) pour les dérivées covariantes de  $R_{jkl}^i$ . En effet, supposons  $\kappa = 2$  dans les relations (7.) et restreignons-les en l'identité du groupe  $U := I_{n \times n}$ , i.e. posons  $u_j^i := \delta_j^i = \tilde{u}_j^i$ , tout en appliquant la première relation de commutation (7.) avec  $F := S_{jkl}^i$ ,  $i_1 := m_1$  et  $i_2 := m_2$ . Nous obtenons immédiatement la relation de commutation désirée :

$$(7.34) \quad \left\{ \left( \left( R_{jkl}^i \right)_{m_1} \right)_{m_2} = \frac{\partial^2 S_{jkl}^i}{\partial \omega^{m_1} \partial \omega^{m_2}} \Big|_{U=I_{n \times n}} = \frac{\partial^2 S_{jkl}^i}{\partial \omega^{m_2} \partial \omega^{m_1}} \Big|_{U=I_{n \times n}} = \left( \left( R_{jkl}^i \right)_{m_2} \right)_{m_1} \right.$$

Plus généralement, soit  $\kappa \geq 2$ . Pour toute permutation

$$(7.35) \quad \sigma : (1, 2, \dots, \kappa) \mapsto (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(\kappa)),$$

la restriction en l'identité de la relation de commutation

$$(7.36) \quad \frac{\partial^\kappa S_{jkl}^i}{\partial \omega^{m_1} \partial \omega^{m_2} \dots \partial \omega^{m_\kappa}} \Big|_{U=I_n \times n} = \frac{\partial^\kappa S_{jkl}^i}{\partial \omega^{m_{\sigma(1)}} \partial \omega^{m_{\sigma(2)}} \dots \partial \omega^{m_{\sigma(\kappa)}}} \Big|_{U=I_n \times n}$$

donne immédiatement en passant par (7.) la relation de commutation désirée :

$$(7.37) \quad \left( \dots \left( (R_{jkl}^i)_{m_1} \right)_{m_2} \dots \right)_{m_\kappa} = \left( \dots \left( (R_{jkl}^i)_{m_{\sigma(1)}} \right)_{m_{\sigma(2)}} \dots \right)_{m_{\sigma(\kappa)}}$$

Nous pouvons donc noter ces dérivées covariantes simplement par :

$$(7.38) \quad (R_{jkl}^i)_{m_1 m_2 \dots m_\kappa}.$$

*Démonstration du Lemme 7.* Commençons par développer la dérivée covariante de  $R_{j'k'l'}^{i'}$  qui apparaît dans le second membre :

$$(7.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m} = \sum_{i', j', k', l', m'} \varepsilon_i \varepsilon_{i'} u_{i'}^i \tilde{u}_j^{j'} \tilde{u}_k^{k'} \tilde{u}_l^{l'} \tilde{u}_m^{m'} \left( \frac{\partial R_{j'k'l'}^{i'}}{\partial \omega^{m'}} + \right. \\ \left. + \sum_p \varepsilon_p \left( \Gamma_{pm'}^{i'} R_{j'k'l'}^p - \Gamma_{j'm'}^p R_{pk'l'}^{i'} - \Gamma_{k'm'}^p R_{j'p'l'}^{i'} - \Gamma_{l'm'}^p R_{j'k'p}^{i'} \right) \right). \end{array} \right.$$

Pour atteindre cet objectif, partons de l'expression de  $\Lambda_{qm}^r$ , tirée de (6.) en tenant compte de la relation  $\varepsilon_i u_j^i = \varepsilon_j \tilde{u}_i^j$  :

$$(7.40) \quad \Lambda_{qm}^r = \sum_{r_1, q_1, m_1} \varepsilon_r \varepsilon_{r_1} u_{r_1}^r \tilde{u}_q^{q_1} \tilde{u}_m^{m_1} \Gamma_{q_1 m_1}^{r_1},$$

remplaçons-là dans l'expression de la dérivée covariante  $\frac{\partial}{\partial \omega^m}$  et simplifions l'expression obtenue en remarquant que  $\sum_q u_p^q \tilde{u}_q^{q_1} = \delta_p^{q_1}$ , ce qui fait disparaître  $\sum_q$ ,  $\sum_p$  et permet de remplacer  $p$  par  $q_1$  :

$$(7.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \omega^m} = \sum_{m'} \tilde{u}_m^{m'} \frac{\partial}{\partial \theta^{m'}} + \sum_{p, q, r} \varepsilon_r u_p^q \Lambda_{qm}^r \frac{\partial}{\partial u_p^r} \\ = \sum_{m'} \tilde{u}_m^{m'} \frac{\partial}{\partial \theta^{m'}} + \sum_{p, q, r} \sum_{r_1, q_1, m_1} \varepsilon_{r_1} u_p^q u_{r_1}^r \tilde{u}_q^{q_1} \tilde{u}_m^{m_1} \Gamma_{q_1 m_1}^{r_1} \frac{\partial}{\partial u_p^r} \\ = \sum_{m'} \tilde{u}_m^{m'} \frac{\partial}{\partial \theta^{m'}} + \sum_r \sum_{r_1, q_1, m_1} \varepsilon_{r_1} u_{r_1}^r \tilde{u}_m^{m_1} \Gamma_{q_1 m_1}^{r_1} \frac{\partial}{\partial u_{q_1}^r}. \end{array} \right.$$

Développons l'expression de  $S_{jkl}^i$  sous la forme :

$$(7.42) \quad S_{jkl}^i = \sum_{i', j', k', l'} \varepsilon_i \varepsilon_{i'} u_{i'}^i \tilde{u}_j^{j'} \tilde{u}_k^{k'} \tilde{u}_l^{l'} R_{j'k'l'}^{i'}.$$

En appliquant à cette expression l'opérateur de dérivation  $\frac{\partial}{\partial u_{q_1}^r}$  situé à la fin du développement de  $\frac{\partial}{\partial \omega^m}$ , il est nécessaire de savoir calculer  $\frac{\partial}{\partial u_{q_1}^r} \tilde{u}_j^{j'}$ . Établissons

donc les relations générales :

$$(7.43) \quad \frac{\partial \tilde{u}_j^i}{\partial u_l^k} = -\tilde{u}_k^i \tilde{u}_j^l,$$

pour tous  $i, j, k, l = 1, \dots, n$ . En effet, la différentiation par rapport à  $u_k^l$  de l'identité matricielle  $I_{n \times n} = U \cdot \tilde{U}$  donne

$$(7.44) \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u_l^k} = -\tilde{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_l^k} \cdot \tilde{U}.$$

Avec des indices, ces identités se développent et fournissent les relations désirées :

$$(7.45) \quad \frac{\partial \tilde{u}_j^i}{\partial u_l^k} = -\sum_{p,q} \tilde{u}_q^i \frac{\partial u_p^q}{\partial u_l^k} \tilde{u}_j^p = -\sum_{p,q} \tilde{u}_q^i \delta_k^q \delta_p^l \tilde{u}_j^p = -\tilde{u}_k^i \tilde{u}_j^l.$$

Ainsi, appliquons la dérivation  $\frac{\partial}{\partial \omega^m}$  à  $S_{jkl}^i$ . L'opérateur de dérivation  $\frac{\partial}{\partial \theta^{m'}}$ , qui ne dépend que des variables  $x^i$ , n'agit que sur  $R_{i'j'k'l'}^{i'}$ . De même, l'opérateur de dérivation  $\frac{\partial}{\partial u_{q_1}^r}$  n'agit que sur les variables  $u_j^i$  et sur les variables  $\tilde{u}_j^i$ . Au total, nous obtenons :

$$(7.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m} = \sum_{i',j',k',l',m'} \varepsilon_i \varepsilon_{i'} u_{i'}^i \tilde{u}_j^{j'} \tilde{u}_k^{k'} \tilde{u}_l^{l'} \tilde{u}_m^{m'} \frac{\partial R_{j'k'l'}^{i'}}{\partial \theta^{m'}} + \\ + \sum_{i',j',k',l'} \sum_r \sum_{r_1,q_1,m_1} \varepsilon_{r_1} u_{r_1}^r \tilde{u}_m^{m_1} \Gamma_{q_1 m_1}^{r_1} \varepsilon_i \varepsilon_{i'} \delta_r^{q_1} \delta_{i'}^{q_1} \tilde{u}_j^{j'} \tilde{u}_k^{k'} \tilde{u}_l^{l'} R_{j'k'l'}^{i'} - \\ - \sum_{i',j',k',l'} \sum_r \sum_{r_1,q_1,m_1} \varepsilon_{r_1} u_{r_1}^r \tilde{u}_m^{m_1} \Gamma_{q_1 m_1}^{r_1} \varepsilon_i \varepsilon_{i'} u_{i'}^i \tilde{u}_r^{j'} \tilde{u}_j^{j'} \tilde{u}_k^{k'} \tilde{u}_l^{l'} R_{j'k'l'}^{i'} - \\ - \sum_{i',j',k',l'} \sum_r \sum_{r_1,q_1,m_1} \varepsilon_{r_1} u_{r_1}^r \tilde{u}_m^{m_1} \Gamma_{q_1 m_1}^{r_1} \varepsilon_i \varepsilon_{i'} u_{i'}^i \tilde{u}_j^{j'} \tilde{u}_r^{k'} \tilde{u}_k^{k'} \tilde{u}_l^{l'} R_{j'k'l'}^{i'} - \\ - \sum_{i',j',k',l'} \sum_r \sum_{r_1,q_1,m_1} \varepsilon_{r_1} u_{r_1}^r \tilde{u}_m^{m_1} \Gamma_{q_1 m_1}^{r_1} \varepsilon_i \varepsilon_{i'} u_{i'}^i \tilde{u}_j^{j'} \tilde{u}_k^{k'} \tilde{u}_r^{l'} \tilde{u}_l^{q_1} R_{j'k'l'}^{i'}. \end{array} \right.$$

Observons que le terme de la première ligne correspond exactement au premier terme de l'identité désirée (7.). Commençons par simplifier la seconde ligne, que nous désignerons par  $\mathcal{L}_2$ . Grâce aux symboles de Kronecker, les sommes par rapport à  $r$  et par rapport à  $q_1$  disparaissent et l'on doit remplacer  $r := i$  ainsi que  $q_1 := i'$ . Ensuite, plaçons la somme  $\sum_{i'}$  à la fin et réorganisons l'ordre d'apparition des facteurs :

$$(7.47) \quad \mathcal{L}_2 = - \sum_{j',k',l',r_1,m_1} \varepsilon_i \varepsilon_{r_1} u_{r_1}^i \tilde{u}_j^{j'} \tilde{u}_k^{k'} \tilde{u}_l^{l'} \tilde{u}_m^{m_1} \left( \sum_{i'} \varepsilon_{i'} \Gamma_{i' m_1}^{r_1} R_{j'k'l'}^{i'} \right).$$

En renommant les indices de la manière suivante :

$$(7.48) \quad (i', j', k', l', r_1, m_1) \longmapsto (p, j', k', l', i', m'),$$

nous obtenons :

$$(7.49) \quad \mathcal{L}_2 = - \sum_{i', j', k', l', m'} \varepsilon_i \varepsilon_{i'} u_{i'}^i \tilde{u}_j^{j'} \tilde{u}_k^{k'} \tilde{u}_l^{l'} \tilde{u}_m^{m'} \left( \sum_p \varepsilon_p \Gamma_{pm'}^{i'} R_{j'k'l'}^p \right).$$

C'est exactement le deuxième terme du membre de droite de l'identité désirée (7.).

Simplifions maintenant la troisième ligne, que nous désignerons par  $\mathcal{L}_3$ . Observons l'apparition de  $\sum_r u_{r_1}^r \tilde{u}_r^{j'} = \delta_{r_1}^{j'}$ . Ainsi,  $\sum_r$  et  $\sum_{r_1}$  disparaissent et l'on doit remplacer  $r_1$  par  $j'$ . Plaçons la somme  $\sum_{j'}$  à la fin et réorganisons l'ordre d'apparition des facteurs :

$$(7.50) \quad \mathcal{L}_3 = - \sum_{i', k', l', q_1, m_1} \varepsilon_i \varepsilon_{i'} u_{i'}^i \tilde{u}_j^{q_1} \tilde{u}_k^{k'} \tilde{u}_l^{l'} \tilde{u}_m^{m_1} \left( \sum_{j'} \varepsilon_{j'} \Gamma_{q_1 m_1}^{j'} R_{j'k'l'}^{i'} \right).$$

En renommant les indices de la manière suivante :

$$(7.51) \quad (i', j', k', l', q_1, m_1) \longmapsto (i', p, k', l', j', m'),$$

nous obtenons :

$$(7.52) \quad \mathcal{L}_3 = \sum_{i', j', k', l', m'} \varepsilon_i \varepsilon_{i'} u_{i'}^i \tilde{u}_j^{j'} \tilde{u}_k^{k'} \tilde{u}_l^{l'} \tilde{u}_m^{m'} \left( \sum_p \varepsilon_p \Gamma_{j'm'}^p R_{pk'l'}^{i'} \right).$$

C'est exactement le troisième terme du membre de droite de l'identité désirée (7.).

On procède de même pour les quatrième et cinquième lignes. Au total, nous avons établi par le calcul la véracité des formules de rotation tensorielles (7.), qui expriment les dérivées covariantes  $\frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m}$  en fonction des dérivées covariantes  $\left( R_{j'k'l'}^{i'} \right)_{m'}$ . Le principe de la vérification des formules générales (7.) étant maintenant évident, il est inutile d'en écrire la démonstration complète.  $\square$

Pour la dérivée covariante  $\frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m}$ , nous utiliserons dorénavant la notation contractée  $\left( S_{jkl}^i \right)_m$ , analogue à celle que nous avons introduite pour les dérivées covariantes des composantes  $R_{jkl}^i$ . Appliquons l'opérateur de différentiation covariante  $\frac{\partial}{\partial \omega^m}$  aux quatre lignes de (6.), et recopions l'identité de Bianchi (7.) :

$$(7.53) \quad \begin{cases} 0 = (S_{jkl}^i)_m + (S_{ikl}^j)_m, \\ 0 = (S_{jkl}^i)_m + (S_{jlk}^i)_m, \\ 0 = (S_{jkl}^i)_m - (S_{lij}^k)_m, \\ 0 = (S_{jkl}^i)_m + (S_{ljk}^i)_m + (S_{klj}^i)_m, \\ 0 = (S_{jkl}^i)_m + (S_{jmk}^i)_l + (S_{jlm}^i)_k. \end{cases}$$

**7.54. Dénombrement des coefficients de courbure indépendants.** Appelons *composantes de courbure dérivée à l'ordre 1* les dérivées covariantes  $(R_{jkl}^i)_m$ . Appelons *normales* celles dont les indices satisfont les inégalités :

$$(7.55) \quad \begin{cases} j > i, & k > l, \\ j \geq k, & i \geq l, & k \geq m. \end{cases}$$

**Lemme 7.56.** *Toute composante de courbure dérivée à l'ordre 1 s'exprime comme combinaison linéaire de composantes normales. Les composantes normales sont linéairement indépendantes et leur nombre est égal à :*

$$(7.57) \quad 2C_n^2 + 9C_n^3 + 12C_n^4 + 5C_n^5 = \frac{n^2(n^2 - 1)(n + 2)}{24}$$

*Démonstration.* Voir [Ca1922]. □

## §8. INVARIANTS RELATIFS ET INVARIANTS ABSOLUS

**8.1. Composantes de Ricci et courbure scalaire.** Relativement au co-repère relevé, définissons les *composantes de Ricci de la courbure*  $S_{ij}$  et vérifions, en appliquant la formule fondamentale (6.54), et en simplifiant  $\sum_k u_{i_1}^k \tilde{u}_k^{k_1} = \delta_{i_1}^{k_1}$ , qu'elles se déduisent des composantes de Ricci  $R_{ij}$  par des formules de rotation tensorielle :

$$(8.2) \quad \left\{ \begin{aligned} S_{ij} &:= \sum_k \varepsilon_k S_{ikj}^k \\ &= \sum_k \sum_{i_1, j_1, k_1, l_1} \varepsilon_{i_1} u_{i_1}^k \tilde{u}_i^{j_1} \tilde{u}_k^{k_1} \tilde{u}_j^{l_1} R_{j_1 k_1 l_1}^{i_1} \\ &= \sum_{j_1, k_1, l_1} \varepsilon_{k_1} \tilde{u}_i^{j_1} \tilde{u}_j^{l_1} R_{j_1 k_1 l_1}^{k_1} \\ &= \sum_{i_1, j_1} \tilde{u}_i^{i_1} \tilde{u}_j^{j_1} \left( \sum_k \varepsilon_k R_{i_1 k j_1}^k \right) \\ &= \sum_{i_1, j_1} \tilde{u}_i^{i_1} \tilde{u}_j^{j_1} R_{i_1 j_1}, \end{aligned} \right.$$

avec

$$(8.3) \quad R_{ij} := \sum_k \varepsilon_k R_{ikj}^k.$$

De même, définissons la *courbure scalaire*  $S$  du co-repère relevé et vérifions qu'elle est indépendante des variables de rotation, grâce aux relations (5.20) et grâce aux

simplifications  $\sum_i u_{i_1}^i \tilde{u}_i^{k_1} = \delta_{i_1}^{k_1}$  et  $\sum_j u_{j_1}^j \tilde{u}_j^{l_1} = \delta_{j_1}^{l_1}$  à la troisième ligne :

$$(8.4) \quad \left\{ \begin{aligned} S &:= \sum_{i < j} \varepsilon_i \varepsilon_j S_{jij}^i = \sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j \sum_{i_1, j_1, k_1, l_1} \tilde{u}_i^{i_1} \tilde{u}_j^{j_1} \tilde{u}_i^{k_1} \tilde{u}_j^{l_1} \frac{R_{j_1 k_1 l_1}^{i_1}}{2} \\ &= \sum_{i,j} \sum_{i_1, j_1, k_1, l_1} \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{j_1} u_{i_1}^i u_{j_1}^j \tilde{u}_i^{k_1} \tilde{u}_j^{l_1} \frac{R_{j_1 k_1 l_1}^{i_1}}{2} = \sum_{i_1, j_1} \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{j_1} \frac{R_{j_1 i_1 j_1}^{i_1}}{2} \\ &= \sum_{i_1 < j_1} \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{j_1} R_{j_1 i_1 j_1}^{i_1} = R, \end{aligned} \right.$$

avec

$$(8.5) \quad R := \sum_{i < j} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{jij}^i.$$

Enfin, rappelons que la forme quadratique différentielle qui définit les rapports métriques infinitésimaux

$$(8.6) \quad \sum_i \varepsilon_i (\omega^i)^2 = \sum_i \varepsilon_i (\theta^i)^2$$

ne dépend pas des variables de rotation  $u_q^p$ , puisque par définition la matrice  $U$  stabilise la forme quadratique  $\sum_i \varepsilon_i (X^i)^2$ . Ces observations préliminaires motivent les définitions qui suivent.

**8.7. Invariants différentiels.** Considérons d'abord le cas des surfaces. La *formula egregia* (1.5) montre que la courbure  $\kappa = \kappa(u, v)$  d'une surface :

$$(8.8) \quad \kappa = \mathcal{K} (J_{u,v}^2 E, J_{u,v}^2 F, J_{u,v}^2 G),$$

s'exprime par une fonction rationnelle universelle  $\mathcal{K}$ , qui dépend des dérivées partielles d'ordre deux des coefficients métriques  $E$ ,  $F$  et  $G$ . Nous dirons que cette fonction est un *invariant différentiel d'ordre 2*. La notion d'invariant différentiel recouvre deux propriétés bien distinctes :

1. **l'universalité** : un invariant différentiel  $I$  est une expression qui dépend fonctionnellement des données initiales (pour le problème d'équivalence considéré), ainsi que des dérivées partielles jusqu'à un certain ordre  $\alpha$  de ces données initiales ; on appelle *ordre* de l'invariant différentiel cet entier  $\alpha$  ; la *fonction  $\mathcal{I}$  de ces dérivées partielles doit être universelle, indépendante du système de coordonnées* ; ainsi, si on note  $H = (h_1, \dots, h_\lambda)$  ces données initiales, où les  $h_i$  sont des fonctions de variables  $x = (x^1, \dots, x^\nu)$ , un invariant différentiel est une fonction du jet d'ordre  $\alpha$  de  $H$  :

$$(8.9) \quad I = \mathcal{I} (J_x^\alpha H),$$

de telle sorte que dans tout autre système de coordonnées  $\bar{x}$ , cet invariant différentiel est donné par la *même fonction  $\mathcal{I}$* , ce que nous écrirons :

$$(8.10) \quad \bar{I} = \mathcal{I} (J_{\bar{x}}^\alpha \bar{H}),$$

où  $\bar{H}$  se déduit de  $H$  par la relation  $\bar{H}(\bar{x}) = H(x)$ .

**2. l'invariance :** pour toute équivalence  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  entre deux structures géométriques (par exemple, une isométrie entre variétés pseudo-riemanniennes), les valeurs des deux invariants différentiels doivent coïncider :

$$(8.11) \quad \bar{I}(\bar{x}(x)) = I(x),$$

pour tout  $x$ . De manière équivalente, on doit avoir :

$$(8.12) \quad \mathcal{I}(J_{\bar{x}}^{\alpha} \bar{H}(\bar{x}(x))) = \mathcal{I}(J_x^{\alpha} H(x)),$$

pour tout  $x$ . Ces équations n'ont de sens que lorsque la même variable  $x$  (ou  $\bar{x}$ ) apparaît dans le membre de droite et dans le membre de gauche.

Dans la plupart des applications, les invariants différentiels sont des fonctions rationnelles d'une taille assez massive. La *formula egregia* (1.5), déjà relativement complexe, est l'un des invariants différentiels dont l'expression est la plus concise.

Évidemment, la courbure de Gauss (1.5) d'une surface satisfait les deux propriétés ci-dessus. Plus généralement, la courbure scalaire de la variété pseudo-riemannienne  $M$  définie par (8.5) est un invariant différentiel d'ordre 2. Dans ce cas, les données initiales sont les composantes de la matrice  $H = (h_j^i(x))$  des coefficients des formes  $\theta^i = \sum_j h_j^i(x) \cdot dx^j$  par lesquelles on diagonalise le  $ds^2 = \sum_i \varepsilon_i (\theta^i)^2$ . Nous noterons donc la courbure scalaire sous la forme :

$$(8.13) \quad R = \mathcal{R}(J_x^2 H),$$

où la fonction  $\mathcal{R}$  est indépendante du système de coordonnées. Ici, les transformations sont des isométries  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  et les coordonnées  $(x^1, \dots, x^{\nu})$  ne sont autres que les coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ .

**8.14. Invariants différentiels absolus et relatifs.** D'après le Théorème 5.24, le problème d'équivalence isométrique entre variétés pseudo-riemanniennes se ramène à l'étude des transformations de la forme :

$$(8.15) \quad \begin{cases} \bar{x}^m = \bar{x}^m(x^{m_1}) \\ \bar{u}_q^p = \bar{u}_q^p(x^{m_1}, u_{q_1}^{p_1}), \end{cases}$$

qui satisfont  $\bar{\omega}^i = \omega^i$ . Ici, les coordonnées  $(x^1, \dots, x^{\nu})$  ne sont autres que les coordonnées  $(x^m, u_q^p)$ , et la dimension  $\nu = \frac{n(n+1)}{2}$  de la variété de base a augmenté. Nous appellerons *invariant différentiel relatif* toute fonction invariante des variables  $x^m$  et  $u_q^p$  qui est conservée par tout changement de coordonnées (8.15) satisfaisant  $\bar{\omega}^i = \omega^i$ .

**Lemme 8.16.** *Les composantes de courbure  $S_{jkl}^i$  sont des invariants différentiels relatifs.*

*Démonstration.* Premièrement, observons que les expressions (6.54) de  $S_{jkl}^i$ , en tenant compte des expressions (3.44) des  $R_{j_1 k_1 l_1}^{i_1}$ , sont universelles, indépendantes du système de coordonnées. Deuxièmement, établissons que ces coefficients sont invariants. Pour cela, raisonnons comme dans la preuve de l'Assertion (3.32). Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure aux identités  $\bar{\omega}^i = \omega^i$ , valables



après remplacement des variables  $\bar{x}^m$  en fonction des  $x^{m_1}$  et des variables  $\bar{u}_q^p$  en fonction des variables  $\bar{u}_q^p(x^{m_1}, u_{q_1}^{p_1})$ , ce qui donne :

$$(8.17) \quad d\bar{\omega}^i = \varepsilon_i \sum_j \bar{\omega}^j \wedge \bar{\omega}_j^i = \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge \omega_j^i = d\omega^i,$$

pour  $i = 1, \dots, n$ . Grâce aux relations  $\bar{\omega}^j = \omega^j$  et grâce à l'unicité des formes  $\bar{\omega}_j^i$ , nous en déduisons que  $\bar{\omega}_j^i = \omega_j^i$ , toujours après remplacement des variables  $\bar{x}^m$  en fonction des  $x^{m_1}$  et des variables  $\bar{u}_q^p$  en fonction des variables  $\bar{u}_q^p(x^{m_1}, u_{q_1}^{p_1})$ . À nouveau, grâce aux identités suivantes :

$$(8.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k<l} S_{jkl}^i \cdot \omega^k \wedge \omega^l = d\omega_j^i - \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_j^k \wedge \omega_k^i \\ = d\bar{\omega}_j^i - \sum_k \varepsilon_k \cdot \bar{\omega}_j^k \wedge \bar{\omega}_k^i \\ = \sum_{k<l} \bar{S}_{jkl}^i \cdot \bar{\omega}^k \wedge \bar{\omega}^l, \end{array} \right.$$

et grâce à l'unicité des coefficients de courbure, nous déduisons les relations :

$$(8.19) \quad \bar{S}_{jkl}^i = S_{jkl}^i,$$

comme annoncé.  $\square$

Nous appellerons *invariant différentiel absolu* tout invariant différentiel relatif qui est indépendant des variables de rotation  $u_q^p$ . Par exemple, le calcul effectué en (8.) ci-dessus montre que la courbure scalaire  $S := \sum_{i<j} \varepsilon_i \varepsilon_j S_{jij}^i$  est un invariant différentiel absolu.

**8.20. Différentiation covariante des invariants différentiels relatifs.** Soit  $I = \mathcal{I}(J_x^\alpha H, U)$  un invariant différentiel relatif. En appliquant l'opérateur de différentiation extérieure, on obtient :

$$(8.21) \quad dI = \sum_i \frac{\partial I}{\partial \omega^i} \cdot \omega^i + \sum_{i<j} \frac{\partial I}{\partial \omega_j^i} \cdot \omega_j^i.$$

Rappelons que le changement de coordonnées (8.15) satisfait non seulement  $\bar{\omega}^i = \omega^i$  mais encore  $\bar{\omega}_j^i = \omega_j^i$ . Par conséquent, la relation  $dI = d\bar{I}$  fournit une collection de  $\frac{n(n+1)}{2}$  invariants différentiels relatifs supplémentaires :

$$(8.22) \quad \frac{\partial I}{\partial \omega^i} = \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{\omega}^i}, \quad \frac{\partial I}{\partial \omega_j^i} = \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{\omega}_j^i}.$$

Par différentiation covariante (jusqu'à un ordre arbitraire) des invariants différentiels relatifs  $S_{jkl}^i$ , nous obtenons alors *une infinité d'invariants différentiels relatifs* :

$$(8.23) \quad \frac{\partial^{\kappa+\tau} S_{jkl}^i}{\partial \omega^{m_1} \dots \partial \omega^{m_\kappa} \partial \omega_{q_1}^{p_1} \dots \partial \omega_{q_\tau}^{p_\tau}}.$$

En particulier, on retrouve les dérivées covariantes du premier ordre  $\frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m}$  et  $\frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega_q^p}$ , que nous avons déjà étudiées dans la Section 7. Rappelons les relations (7.26),

d'après lesquelles les dérivées covariantes des  $S_{jkl}^i$  par rapport aux 1-formes  $\omega_q^p$  s'expriment en fonction des  $S_{j_1 k_1 l_1}^{i_1}$  :

$$(8.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega_q^p} = -\varepsilon_q \delta_p^i S_{jkl}^q + \varepsilon_p \delta_q^i S_{jkl}^p + \varepsilon_p \delta_j^q S_{pkl}^i - \varepsilon_q \delta_j^p S_{qkl}^i + \\ \quad + \varepsilon_p \delta_k^q S_{jpl}^i - \varepsilon_q \delta_k^p S_{jqk}^i + \varepsilon_p \delta_l^q S_{jkp}^i - \varepsilon_q \delta_l^p S_{jkq}^i \\ = \Lambda_{jklp}^{iq} \left( S_{j'k'l'}^{i'} \right), \end{array} \right.$$

avec une fonction  $\Lambda_{jklp}^{iq} \left( S_{j'k'l'}^{i'} \right)$  qui est linéaire par rapport aux  $S_{j'k'l'}^{i'}$ . Autrement dit, les différentiations covariantes par rapport aux 1-formes  $\omega_q^p$  n'apportent aucun invariant différentiel relatif qui soit nouveau par rapport aux  $S_{j_1 k_1 l_1}^{i_1}$ . Ces relations (8.) peuvent être différentiées un nombre arbitraire de fois afin d'établir un énoncé important, d'après lequel les différentiations covariantes par rapport aux variables  $\omega_q^p$  n'apportent essentiellement aucun invariant différentiel relatif qui ne soit déjà connu en différentiant seulement par rapport aux variables  $\omega^m$ . Rappelons la notation contractée :

$$(8.25) \quad (S_{jkl}^i)_{m_1 m_2 \dots m_\kappa} := \frac{\partial^\kappa S_{jkl}^i}{\partial \omega^{m_1} \partial \omega^{m_2} \dots \partial \omega^{m_\kappa}}.$$

**Lemme 8.26.** *Pour tout  $\kappa \in \mathbb{N}$ , pour tous entiers  $m_1, \dots, m_\kappa$  compris entre 1 et  $n$ , pour tout  $\tau \in \mathbb{N}$ , pour tous entiers  $p_1, \dots, p_\tau, q_1, \dots, q_\tau$  compris entre 1 et  $n$ , il existe une fonction linéaire universelle  $\Lambda_{jkl m_1 \dots m_\kappa p_1 \dots p_\tau}^{i q_1 \dots q_\tau}$  telle que :*

$$(8.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^{\kappa+\tau} S_{jkl}^i}{\partial \omega^{m_1} \dots \partial \omega^{m_\kappa} \partial \omega_{q_1}^{p_1} \dots \partial \omega_{q_\tau}^{p_\tau}} = \\ = \Lambda_{jkl m_1 \dots m_\kappa p_1 \dots p_\tau}^{i q_1 \dots q_\tau} \left( S_{j'k'l'}^{i'}, \left( S_{j'k'l'}^{i'} \right)_{m'_1}, \dots, \left( S_{j'k'l'}^{i'} \right)_{m'_1 \dots m'_\kappa} \right). \end{array} \right.$$

*Démonstration.* Nous affirmons qu'il suffit de démontrer cette propriété pour  $\kappa = 0$  et  $\tau$  quelconque. En effet, si nous appliquons les dérivations  $\frac{\partial}{\partial \omega^{m_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \omega^{m_\kappa}}$  aux relations

$$(8.28) \quad \frac{\partial^\tau S_{jkl}^i}{\partial \omega_{q_1}^{p_1} \dots \partial \omega_{q_\tau}^{p_\tau}} = \Lambda_{jkl p_1 \dots p_\tau}^{i q_1 \dots q_\tau} \left( S_{j'k'l'}^{i'} \right),$$

nous obtenons les relations désirées (8.27); notons que le membre de droite dépend de toutes les dérivées covariantes  $\left( S_{j'k'l'}^{i'} \right)_{m'_1 \dots m'_\rho}$ ,  $\rho \leq \kappa$ , jusqu'à l'ordre  $\kappa$  exactement.

Démontrons donc ces relations (8.28) par récurrence sur l'entier  $\tau$ , en les développant – pour plus de clarté – sous la forme de combinaisons linéaires :

$$(8.29) \quad \frac{\partial^\tau S_{jkl}^i}{\partial \omega_{q_1}^{p_1} \dots \partial \omega_{q_\tau}^{p_\tau}} = \sum_{i', j', k', l'} \lambda_{jkl p_1 \dots p_\tau i'}^{i q_1 \dots q_\tau j' k' l'} \cdot S_{j'k'l'}^{i'},$$

avec des constantes  $\lambda_{jkl p_1 \dots p_\tau i'}^{i q_1 \dots q_\tau j' k' l'}$ . Pour  $\tau = 1$ , cette relation s'identifie à la relation (8.24), déjà démontrée. Soient  $p_{\tau+1}$  et  $q_{\tau+1}$  deux nouveaux entiers, compris

entre 1 et  $n$ . Appliquons l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial \omega_{q_{\tau+1}}^{p_{\tau+1}}}$  et utilisons la relation (8.24) :

$$(8.30) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^{\tau+1} S_{jkl}^i}{\partial \omega_{q_1}^{p_1} \dots \partial \omega_{q_\tau}^{p_\tau} \partial \omega_{q_{\tau+1}}^{p_{\tau+1}}} &= \sum_{i', j', k', l'} \lambda_{jkl p_1 \dots p_\tau i'}^{i q_1 \dots q_\tau j' k' l'} \cdot \frac{\partial S_{j' k' l'}^{i'}}{\partial \omega_{q_{\tau+1}}^{p_{\tau+1}}} \\ &= \sum_{i', j', k', l'} \sum_{i'', j'', k'', l''} \lambda_{jkl p_1 \dots p_\tau i'}^{i q_1 \dots q_\tau j' k' l'} \lambda_{j' k' l' p_{\tau+1} i''}^{i' q_{\tau+1} j'' k'' l''} \cdot S_{j'' k'' l''}^{i''} \\ &= \sum_{i', j', k', l'} \lambda_{jkl p_1 \dots p_\tau p_{\tau+1} i'}^{i q_1 \dots q_\tau q_{\tau+1} j' k' l'} \cdot S_{j' k' l'}^{i'}, \end{aligned} \right.$$

ce qui donne une relation du type désiré, si l'on pose :

$$(8.31) \quad \lambda_{jkl p_1 \dots p_\tau p_{\tau+1} i'}^{i q_1 \dots q_\tau q_{\tau+1} j' k' l'} := \sum_{i'', j'', k'', l''} \lambda_{jkl p_1 \dots p_\tau i''}^{i q_1 \dots q_\tau j'' k'' l''} \lambda_{j' k' l' p_{\tau+1} i'}^{i' q_{\tau+1} j'' k'' l''}.$$

La linéarité est préservée. Ceci complète la démonstration.  $\square$

**8.32. Isométries de variétés pseudo-riemanniennes.** Nous pouvons maintenant énoncer le théorème capital de la théorie d'Élie Cartan, qui donne une solution au problème d'équivalence.

D'après le Théorème 5., toute isométrie  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  d'une variété pseudo-riemannienne  $(M, ds^2)$  sur une autre variété pseudo-riemannienne  $(\bar{M}, d\bar{s}^2)$  se relève en une application  $(x^m, u_q^p) \mapsto (\bar{x}^m, \bar{u}_q^p)$  satisfaisant  $\bar{\omega}^i = \omega^i$ . Grâce au Lemme 8., les invariants fondamentaux  $S_{jkl}^i$ , qui dépendent des variables  $x^m$  et  $u_q^p$ , coïncident avec les invariants fondamentaux  $\bar{S}_{jkl}^i$ . En calculant les différentielles  $dS_{jkl}^i$  et  $d\bar{S}_{jkl}^i$  par la formule (6.28), on déduit que  $(S_{jkl}^i)_m = (\bar{S}_{jkl}^i)_m$  et plus généralement

$$(8.33) \quad (S_{jkl}^i)_{m_1 m_2 \dots m_\kappa} = (\bar{S}_{jkl}^i)_{m_1 m_2 \dots m_\kappa},$$

pour tous entiers  $i, j, k, l$  et  $m_1, m_2, \dots, m_\kappa$  compris entre 1 et  $n$ . En résumé, si  $(M, ds^2)$  et  $(\bar{M}, d\bar{s}^2)$  sont isométriques, toutes les dérivées covariantes de leurs coefficients de courbure doivent coïncider. De manière équivalente, si on définit le graphe de toutes les dérivées covariantes des  $S_{jkl}^i$  par rapport aux formes  $\omega^m$  jusqu'à l'ordre  $\kappa$  par

$$(8.34) \quad \mathcal{V}(M) := \left\{ \left( S_{jkl}^i(x^\alpha, u_\gamma^\beta) \right)_{m_1 \dots m_\kappa} : i, j, k, l, m_1, \dots, m_\kappa = 1, \dots, n \right\},$$

l'équivalence de  $(M, ds^2)$  et de  $(\bar{M}, d\bar{s}^2)$  entraîne que

$$(8.35) \quad \mathcal{V}_\kappa(M) = \mathcal{V}_\kappa(\bar{M}).$$

Le théorème d'Élie Cartan établit la réciproque de cette observation, modulo des hypothèses de rang constant qui sont nécessaire pour des raisons techniques. Soit  $(M, ds^2)$  une variété pseudoriemannienne quelconque. Notons  $r_0$  le maximum du

rang l'application analytique

$$(8.36) \quad (x^\alpha, u_\gamma^\beta) \longmapsto \left( S_{jkl}^i(x^\alpha, u_\gamma^\beta) \right)_{1 \leq i, j, k, l \leq n},$$

à valeurs dans  $\mathbb{C}^{n^4}$ . Si l'on ne retenait que les composantes de courbure qui sont normales, cette application serait à valeurs dans  $\mathbb{C}^{\frac{n^2(n^2-1)}{2}}$ . Déplaçons le point central  $(0, I) \in M \times \mathcal{O}_{p, n-p}$  en un point  $(x_0, U_0)$  où le rang de cette application est égal à  $r_0$  et localisons  $M \times \mathcal{O}_{p, n-p}$  dans un petit voisinage de ce point. Puisque le rang ne peut qu'augmenter localement, le rang de l'application (8.36) est constant au voisinage de  $(x_0, U_0)$ .

Définissons ensuite  $r_1$  le maximum du rang de l'application analytique

$$(8.37) \quad (x^\alpha, u_\gamma^\beta) \longmapsto \left( S_{jkl}^i(x^\alpha, u_\gamma^\beta), \left( S_{jkl}^i(x^\alpha, u_\gamma^\beta) \right)_m \right)_{1 \leq i, j, k, l, m \leq n},$$

à valeurs dans  $\mathbb{C}^{n^4+n^5}$  et déplaçons encore le point central  $(x_0, U_0)$  en un point  $(x_1, U_1)$  où le rang de cette application est égal à  $r_1$ . Définissons de même  $r_2, r_3, r_\kappa$  et des nouveaux points centraux  $(x_2, U_2), (x_3, U_3), \dots, (x_\kappa, u_\kappa)$ . On a évidemment

$$(8.38) \quad r_0 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots \leq r_\kappa \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si  $\kappa$  est le premier entier tel que  $r_{\kappa+1} = r_\kappa$ , on démontre que  $r_\kappa = r_{\kappa+1} = r_{\kappa+2} = r_{\kappa+3} = \dots$ .

**Théorème 8.39.** *Soit  $(M, ds^2)$  une variété pseudo-riemannienne localisée en un point  $(x_\kappa, U_\kappa)$  où les rangs  $r_0, r_1, \dots, r_\kappa, r_{\kappa+1} = r_\kappa$  sont maximaux et localement constant. Alors une autre variété pseudo-riemannienne  $(\bar{M}, d\bar{s}^2)$  est isométrique à  $(M, ds^2)$  si et seulement si  $\bar{\kappa} = \kappa, \bar{r}_0 = r_0, \bar{r}_1 = r_1, \dots, \bar{r}_\kappa = r_\kappa$  et les rangs des dérivées covariantes des composantes de courbure  $\left( \bar{S}_{jkl}^i \right)_{m_1 \dots m_\lambda}$  sont localement constants égaux à  $r_\lambda$  pour  $\lambda = 1, \dots, \kappa$ .*

**8.40. Relativisation d'une forme différentielle covariante absolue.** Comme dans l'hypothèse du Théorème (1.85), partons d'une forme différentielle quadratique telle que (1.86) qui est covariante de la métrique infinitésimale et réécrivons-la d'abord en fonction des 1-formes  $\theta^{i_1}$  :

$$(8.41) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i,j} C_{ij}^0 \cdot dx^i dx^j &= \sum_{i,j} C_{ij}^0 (J_x^2 G) \cdot dx^i dx^j \\ &= \sum_{i,j} \sum_{i_1, j_1} C_{ij}^0 (J_x^2 G) \tilde{h}_{i_1}^i \tilde{h}_{j_1}^j \cdot \theta^{i_1} \theta^{j_1} \\ &=: \sum_{i,j} C_{ij} (J_x^2 H) \cdot \theta^i \theta^j, \end{aligned} \right.$$

où nous avons introduit

$$(8.42) \quad \left\{ \begin{aligned} C_{ij} &:= \sum_{i_1, j_1} C_{i_1 j_1}^0 (J_x^2 G) \tilde{h}_{i_1}^{i_1} \tilde{h}_{j_1}^{j_1} \\ &= C_{ij} (J_x^2 H) \end{aligned} \right.$$

pour désigner les nouveaux coefficients de cette forme quadratique différentielle covariante. Puisque la matrice  $G = {}^T H \cdot E \cdot H$  s'exprime en fonction de  $H$  (d'après (2.12)) et puisque  $\tilde{H}$  s'exprime aussi en fonction de  $H$  (via les formules de Cramer que nous n'avons pas explicitées), il est légitime de considérer que  $C_{ij}$  est une fonction universelle du jet d'ordre 2 de  $H$ . Grâce à deux différentiations de la relation  $G = {}^T H \cdot E \cdot H$ , on vérifie alors que cette fonction  $C_{ij}$  est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre 2 des éléments de la matrice  $H$ .

Réécrivons maintenant cette forme quadratique différentielle covariante en fonction des 1-formes  $\omega^i$  :

$$(8.43) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i,j} C_{ij} \cdot \theta^i \theta^j &= \sum_{i,j} C_{ij} (J_x^2 H) \cdot \theta^i \theta^j \\ &= \sum_{i,j} \sum_{i_1, j_1} C_{ij} (J_x^2 H) \tilde{u}_{i_1}^i \tilde{u}_{j_1}^j \cdot \omega^{i_1} \omega^{j_1} \\ &= \sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} (J_x^2 H, U) \cdot \omega^i \omega^j \\ &= \sum_{i,j} D_{ij} \cdot \omega^i \omega^j, \end{aligned} \right.$$

où nous avons introduit les coefficients :

$$(8.44) \quad D_{ij} = \mathcal{D}_{ij} (J_x^2 H, U) := \sum_{i_1, j_1} \tilde{u}_{i_1}^{i_1} \tilde{u}_{j_1}^{j_1} C_{i_1 j_1} (J_x^2 H) = \sum_{i_1, j_1} \tilde{u}_{i_1}^{i_1} \tilde{u}_{j_1}^{j_1} C_{i_1 j_1},$$

qui se déduisent des  $C_{ij}$  par les mêmes formules de rotation tensorielle que celles qui relient les  $S_{ij}$  aux  $R_{ij}$ , i.e.  $S_{ij} = \sum_{i_1, j_1} \tilde{u}_{i_1}^{i_1} \tilde{u}_{j_1}^{j_1} R_{i_1 j_1}$ . Par construction, les fonctions  $\mathcal{D}_{ij}$  sont indépendantes du système de coordonnées.

Rappelons que les composantes de courbure  $S_{jkl}^i$  sont des invariants différentiels relatifs. Il en découle que les composantes «de Ricci»  $S_{ij} := \sum_k S_{ikj}^k$  sont des invariants différentiels relatifs. Au même titre :

**Lemme 8.45.** *Les  $D_{ij} = \mathcal{D}_{ij} (J_x^2 H, U)$  sont des invariants différentiels relatifs.*

*Démonstration.* En effet, s'il existe une transformation isométrique relevée (8.) telle que  $\bar{\omega}^i = \omega^i$ , on a par hypothèse  $\sum_{i,j} \bar{C}_{ij}^0 d\bar{x}^i d\bar{x}^j = \sum_{i,j} C_{ij}^0 dx^i dx^j$  puis  $\sum_{i,j} \bar{C}_{ij} \bar{\theta}^i \bar{\theta}^j = \sum_{i,j} C_{ij} \theta^i \theta^j$  et enfin :

$$(8.46) \quad \sum_{i,j} \bar{D}_{ij} \cdot \bar{\omega}^i \bar{\omega}^j = \sum_{i,j} D_{ij} \cdot \omega^i \omega^j,$$

ce qui donne  $\bar{D}_{ij} = D_{ij}$ . □

**8.47. Théorème d'unicité.** Entamons maintenant la démonstration du Théorème 1.85. Posons  $n = 4$  et  $p = 3$ . Nous venons d'établir que la forme quadratique covariante  $\sum_{i,j=1}^4 C_{ij}^0 \cdot dx^i dx^j$  donnait naissance à une forme quadratique  $\sum_{i,j=1}^4 D_{ij} \cdot \omega^i \omega^j$  dont les coefficients  $D_{ij}$  sont des invariants relatifs.

D'après le Théorème 8.39, les composantes de courbure  $S_{jkl}^i$  et leurs dérivées covariantes forment un système complet d'invariants différentiels relatifs, qui permet de résoudre le problème d'équivalence. Il en découle que les  $D_{ij}$  sont nécessairement des fonctions de ces dérivées covariantes  $\left(S_{jkl}^i\right)_{m_1 m_2 \dots m_\kappa}$ . On peut démontrer que toute combinaison linéaire non triviale des dérivées covariantes  $\left(S_{jkl}^i\right)_{m_1 m_2 \dots m_\kappa}$  fait intervenir des dérivées de la matrice fondamentale  $H$  d'ordre strictement supérieur à 2. Pour cela, il faut considérer les dérivées covariantes normales  $\left(S_{jkl}^i\right)_{m_1 m_2 \dots m_\kappa}$ , c'est-à-dire dont les indices satisfont les inégalités :

$$(7.55) \quad \begin{cases} j > i, & k > l, \\ j \geq k, & i \geq l, & k \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_\kappa. \end{cases}$$

En généralisant le Lemme 7.56, on établirait que toute dérivée covariante s'exprime en fonction des dérivées covariante normale et que les dérivées covariantes normales sont linéairement indépendantes. Il suffit alors d'observer que les dérivées covariantes normales incorporent des dérivées de la matrice  $H$  jusqu'à l'ordre  $\kappa + 2$ .

Par un raisonnement que nous ne sommes pas encore parvenus à déchiffrer et qui fait appel à sa théorie des systèmes de Pfaff en involution, Élie Cartan semble établir un énoncé plus général : *toute fonction (linéaire ou non-linéaire) des dérivées covariantes  $\left(S_{jkl}^i\right)_{m_1 m_2 \dots m_\kappa}$  qui ne fait intervenir que des dérivées de la matrice*

*$H$  est nécessairement une fonction des seuls invariants relatifs fondamentaux  $S_{jkl}^i$ .* Puisque les  $D_{ij}$  doivent être linéaires par rapport aux dérivées partielles d'ordre exactement égal à 2 des coefficients métriques  $g_{ij}$ , il en découle alors immédiatement que les  $D_{ij}$  sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des  $S_{jkl}^i$ .

Nous admettrons cet énoncé sans démonstration. De manière équivalente, nous ajouterons au Théorème 1.85 l'hypothèse «simplificatrice» d'après laquelle les  $C_{ij}^0$  sont des fonctions des seuls composantes de courbure  $A_{ijk}^l$ .

En résumé, supposons dorénavant que chaque invariant relatif  $D_{ij}$  est une combinaison linéaire à coefficients constants des composantes de courbure  $S_{pqr}^m$ . La suite de la démonstration nécessite d'analyser plus finement la géométrie des transformations qui stabilisent le  $ds^2$  diagonalisé.

## §9. FORME QUADRATIQUE DE RIEMANN-CHRISTOFFEL

Considérons maintenant la forme quadratique

$$(9.1) \quad \Phi := \sum_{i < j} \sum_{k < l} S_{jkl}^i \cdot \omega^i \wedge \omega^j \cdot \omega^k \wedge \omega^l,$$

définie sur l'espace des  $\frac{n(n-1)}{2}$  deux formes  $(\omega^i \wedge \omega^j)_{1 \leq i < j \leq n}$ .

**Lemme 9.2.** *La forme quadratique de Riemann-Christoffel est un invariant absolu : elle s'exprime en fonction des 2-formes  $(\theta^i \wedge \theta^j)_{1 \leq i < j \leq n}$  et des composantes de*

courbure  $R_{jkl}^i$  comme suit :

$$(9.3) \quad \Phi = \sum_{i < j} \sum_{k < l} R_{jkl}^i \cdot \theta^i \wedge \theta^j \cdot \theta^k \wedge \theta^l.$$

*Démonstration.* Utilisons tout d'abord l'antisymétrie de  $S_{jkl}^i$  par rapport aux deux couples  $(i, j)$  et  $(k, l)$  pour écrire  $\Phi = \frac{1}{4} \sum_{i, j, k, l} S_{jkl}^i \cdot \omega^i \wedge \omega^j \cdot \omega^k \wedge \omega^l$ . Insérons les cinq formules de rotation  $S_{jkl}^i = \sum_{i_1, j_1, k_1, l_1} \tilde{u}_i^{i_1} \tilde{u}_j^{j_1} \tilde{u}_k^{k_1} \tilde{u}_l^{l_1} \cdot R_{j_1 k_1 l_1}^{i_1}$ ,  $\omega^i = \sum_{i_2} u_{i_2}^i \cdot \theta^{i_2}$ ,  $\omega^j = \sum_{j_2} u_{j_2}^j \cdot \theta^{j_2}$ ,  $\omega^k = \sum_{k_2} u_{k_2}^k \cdot \theta^{k_2}$  et  $\omega^l = \sum_{l_2} u_{l_2}^l \cdot \theta^{l_2}$  et simplifions, ce qui donne :

$$(9.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \frac{1}{4} \sum_{i, j, k, l} S_{jkl}^i \cdot \omega^i \wedge \omega^j \cdot \omega^k \wedge \omega^l \\ = \frac{1}{4} \sum_{i, j, k, l} \sum_{i_1, j_1, k_1, l_1} \sum_{i_2, j_2, k_2, l_2} \tilde{u}_i^{i_1} \tilde{u}_j^{j_1} \tilde{u}_k^{k_1} \tilde{u}_l^{l_1} u_{i_2}^i u_{j_2}^j u_{k_2}^k u_{l_2}^l R_{j_1 k_1 l_1}^{i_1} \\ \quad \cdot \theta^{i_2} \wedge \theta^{j_2} \cdot \theta^{k_2} \wedge \theta^{l_2} \\ = \frac{1}{4} \sum_{i_1, j_1, k_1, l_1} R_{j_1 k_1 l_1}^{i_1} \cdot \theta^{i_1} \wedge \theta^{j_1} \cdot \theta^{k_1} \wedge \theta^{l_1}. \end{array} \right.$$

□

Cette forme quadratique possède une signification géométrique importante. Soit  $P$  un 2-plan contenu dans l'espace tangent  $T_p M$  à un point  $p$  de la variété pseudo-riemannienne  $M$ . Supposons ce plan  $P$  engendré par deux vecteurs  $v, w \in T_p M$  linéairement indépendants. Alors la *courbure sectionnelle* de  $M$  dans la direction de  $P$  est définie par

$$(9.5) \quad \text{Courbure}(P) := \frac{\Phi(v \wedge w)}{(\text{aire } v \wedge w)^2}.$$

On vérifie que cette quantité est indépendante de la base  $(v, w)$  choisie pour engendrer le 2-plan  $P$ .

**9.6. Représentations du groupe pseudo-orthogonal.** En suivant Élie Cartan, nous allons étudier les invariants de la forme quadratique de Riemann-Christoffel lorsque l'on effectue des transformations qui conservent la forme quadratique de Minkowski sur l'espace tangent. Cette étude est naturelle, puisqu'on démontre sans difficulté que la donnée des composantes de courbure  $S_{jkl}^i$  est équivalente à la donnée des courbures sectionnelles dans toutes les directions, c'est-à-dire à la donnée de la forme quadratique de Riemann-Christoffel.

#### §10. PARAMÉTRISATION DES 2-PLANS DANS $\mathbb{C}^4$

Afin d'analyser plus profondément la signification géométrique de la forme quadratique de Riemann-Christoffel et de la courbure sectionnelle, il est nécessaire d'étudier la structure géométrique de l'ensemble des 2-plans contenus dans l'espace tangent à une variété pseudo-riemannienne de dimension quatre. En travaillant

dans  $\mathbb{C}^4$  (et dans l'espace projectif  $P_3(\mathbb{C})$ ) au lieu de  $\mathbb{R}^4$ , la complexification fait apparaître deux familles de droites complexes à un paramètre qui remplissent la quadrique de Minkowski.

**10.1. Vecteurs et bivecteurs dans  $\mathbb{C}^4$ .** Tout point de  $\mathbb{C}^4$  sera représenté par un quadruplet  $(z^1, z^2, z^3, z^4)$  de nombres complexes. Dans  $\mathbb{C}^4$  vu comme espace vectoriel, introduisons la base canonique constituée des quatre vecteurs  $e_1 := (1, 0, 0, 0)$ ,  $e_2 := (0, 1, 0, 0)$ ,  $e_3 := (0, 0, 1, 0)$  et  $e_4 := (0, 0, 0, 1)$ . Tout vecteur  $v \in \mathbb{C}^4$  s'écrit alors de manière unique sous la forme d'une combinaison linéaire :

$$(10.2) \quad v = v^1 \cdot e_1 + v^2 \cdot e_2 + v^3 \cdot e_3 + v^4 \cdot e_4,$$

où les nombres complexes  $v^1, v^2, v^3$  et  $v^4$  sont appelés *coordonnées* de  $v$ . Nous pouvons identifier abstraitement les quantités  $z^i, i = 1, 2, 3, 4$ , avec des *formes linéaires* sur  $\mathbb{C}^4$  en définissant :

$$(10.3) \quad z^1(v) := v^1, \quad z^2(v) := v^2, \quad z^3(v) := v^3, \quad z^4(v) := v^4.$$

Géométriquement, un vecteur  $\overrightarrow{0P}$  dans  $\mathbb{C}^4$  est un *segment orienté*, ayant l'origine 0 à sa base et un point  $P \in \mathbb{C}^4$  quelconque à son extrémité. C'est une quantité unidimensionnelle. Les *bivecteurs* fournissent l'analogie bidimensionnelle des vecteurs ; ils sont définis comme suit. Soient  $v$  et  $w$  deux vecteurs de  $\mathbb{C}^4$ . Considérons que le parallélogramme délimité par les deux vecteurs  $v$  et  $w$  dans le 2-plan  $P(v, w)$  qu'ils engendrent est une quantité nouvelle, appelée *bivecteur* et noté  $v \wedge w$ , étant entendu que le vecteur  $w$  glisse dans le sens de  $v$  pour déployer l'aire du parallélogramme contenu dans le 2-plan  $P(v, w)$ . Il est nécessaire d'envisager le bivecteur  $v \wedge v$  engendré par un même vecteur comme dégénéré (le parallélogramme se réduit à un segment) et d'orienter tout bivecteur en tenant compte de l'ordre d'apparition des termes dans  $v \wedge w$ . Autrement dit, on demande que  $v \wedge v = 0$  et que  $v \wedge w = -w \wedge v$  (ces deux conditions sont équivalentes entre elles). On appelle l'opération  $\wedge$  *produit extérieur*. Pour respecter les règles d'addition des aires orientées, il est nécessaire de demander que le produit extérieur soit linéaire par rapport à ses deux facteurs. Ainsi, en développant le produit extérieur de deux vecteurs quelconques :

$$(10.4) \quad \begin{cases} v \wedge w = (v^1 \cdot e_1 + v^2 \cdot e_2 + v^3 \cdot e_3 + v^4 \cdot e_4) \wedge (w^1 \cdot e_1 + w^2 \cdot e_2 + w^3 \cdot e_3 + w^4 \cdot e_4) \\ = [v^2 w^3 - w^2 v^3] \cdot e_2 \wedge e_3 + [v^3 w^1 - w^3 v^1] \cdot e_3 \wedge e_1 + [v^1 w^2 - w^1 v^2] \cdot e_1 \wedge e_2 + \\ + [v^1 w^4 - w^1 v^4] \cdot e_1 \wedge e_4 + [v^2 w^4 - w^2 v^4] \cdot e_2 \wedge e_4 + [v^3 w^4 - w^3 v^4] \cdot e_3 \wedge e_4, \end{cases}$$

on observe que tout bivecteur est combinaison linéaire des six bivecteurs de base

$$(10.5) \quad e_2 \wedge e_3, \quad e_3 \wedge e_1, \quad e_1 \wedge e_2, \quad e_1 \wedge e_4, \quad e_2 \wedge e_4, \quad e_3 \wedge e_4.$$

Mémorisons l'ordre exact dans lequel nous avons fait apparaître les indices de ces bivecteurs :

$$(10.6) \quad 23 \quad 31 \quad 12 \quad 14 \quad 24 \quad 34.$$



Observons aussi que les six déterminants  $2 \times 2$

$$(10.7) \quad \begin{vmatrix} v^2 & v^3 \\ w^2 & w^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v^3 & v^1 \\ w^3 & w^1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v^1 & v^4 \\ w^1 & w^4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v^2 & v^4 \\ w^2 & w^4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v^3 & v^4 \\ w^3 & w^4 \end{vmatrix},$$

qui apparaissent dans la formule (10.4) se calculent grâce au produit extérieur des formes linéaires  $z^i$ . En effet, par définition du produit extérieur de formes linéaires agissant sur un bivecteur, nous avons :

$$(10.8) \quad z^i \wedge z^j (v \wedge w) := z^i(v) z^j(w) - z^i(w) z^j(v) = v^i w^j - w^i v^j,$$

pour  $1 \leq i < j \leq 4$ . Notons enfin que grâce à l'antisymétrie du produit extérieur, nous avons  $[v^3 w^1 - w^3 v^1] \cdot e_3 \wedge e_1 = [v^1 w^3 - w^1 v^3] \cdot e_1 \wedge e_3$ , et par conséquent nous pouvons réécrire (10.4) sous la forme compacte :

$$(10.9) \quad v \wedge w = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} [v^i w^j - w^i v^j] \cdot e_i \wedge e_j.$$

Mais nous utiliserons le plus souvent l'écriture complète du type (10.4), en respectant soigneusement la numérologie (10.6).

Formellement, nous venons de redéfinir l'algèbre extérieure  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ , sans employer le langage de l'algèbre abstraite.

#### 10.10. Bivecteurs généraux versus bivecteurs décomposables. Notons

$$(10.11) \quad e_{23}, \quad e_{31}, \quad e_{12}, \quad e_{14}, \quad e_{24}, \quad e_{34},$$

les six bivecteurs canoniques (10.5). Un *bivecteur général* sera défini comme une combinaison linéaire arbitraire de ces bivecteurs de base :

$$(10.12) \quad z^{23} \cdot e_{23} + z^{31} \cdot e_{31} + z^{12} \cdot e_{12} + z^{14} \cdot e_{14} + z^{24} \cdot e_{24} + z^{34} \cdot e_{34}.$$

Ici, les six quantités  $z^{ij} \in \mathbb{C}$  sont appelées *coordonnées* du bivecteur. On peut supposer qu'elles sont définies pour tous indices  $i$  et  $j$ , à condition qu'elles satisfassent la relation d'antisymétrie  $z^{ij} = -z^{ji}$ .

Les bivecteurs généraux ainsi définis ne proviennent pas forcément d'un produit extérieur  $v \wedge w$  de deux vecteurs  $v$  et  $w$ . Pour bien les différencier, on appelle *décomposables* les bivecteurs de la forme  $v \wedge w$ , tels que nous les avons introduits initialement. Par exemple, on peut vérifier ([Hi2003]) que le bivecteur  $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$  n'est pas décomposable. Afin de paramétriser l'espace des 2-plans complexes dans  $\mathbb{C}^4$ , il est nécessaire de caractériser d'abord les bivecteurs qui sont décomposables. C'est Julius Plücker qui formula la réponse suivante.

**Théorème 10.13.** *Un bivecteur général est décomposable si et seulement si ses six coordonnées satisfont l'équation dite de Plücker :*

$$(10.14) \quad 0 = z^{23} z^{14} + z^{31} z^{24} + z^{12} z^{34}.$$

Pour la démonstration (élémentaire), nous renvoyons à [Hi2003].

**10.15. Espace des 2-plans dans  $\mathbb{C}^4$  et quadrique de Plücker.** Un 2-plan  $P$  dans  $\mathbb{C}^4$  qui passe par l'origine peut être engendré par une infinité de couples de vecteurs linéairement indépendants. Pour paramétriser l'ensemble des 2-plans, il est nécessaire d'éliminer une telle surdétermination. Procédons comme suit.

Soient  $v, w$  deux vecteurs de  $\mathbb{C}^4$  qui engendrent un 2-plan  $P$  fixé et soient  $(v', w')$  deux autres générateurs. Il existe donc une matrice  $2 \times 2$  inversible de déterminant  $ad - bc$  non nul telle que  $v' = av + bw$  et  $w' = cv + dw$ . Grâce à la linéarité et à l'antisymétrie du produit extérieur, on calcule :

$$(10.16) \quad v' \wedge w' = (av + bw) \wedge (cv + dw) = [ad - bc] \cdot v \wedge w.$$

Autrement dit, tous les bivecteurs décomposables qui engendrent le 2-plan  $P$  sont multiples (dilatés non nuls) l'un de l'autre. De manière équivalente :

**Lemme 10.17.** *L'ensemble des bivecteurs décomposables de  $\mathbb{C}^4$  modulo dilatation est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des 2-plans complexes de  $\mathbb{C}^4$  passant par l'origine.*

Soit  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $\nu \geq 2$  et considérons l'espace  $\mathbb{C}^\nu$ , équipé des coordonnées  $(z^1, z^2, \dots, z^\nu)$ . On appelle *espace projectif de dimension  $(\nu - 1)$*  et on note  $P_{\nu-1}(\mathbb{C})$  l'espace vectoriel épointé  $\mathbb{C}^\nu \setminus \{0\}$  modulo la relation d'équivalence

$$(10.18) \quad (z^1, z^2, \dots, z^\nu) \sim (\lambda z^1, \lambda z^2, \dots, \lambda z^\nu),$$

pour  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Géométriquement,  $P_{\nu-1}(\mathbb{C})$  s'identifie à l'ensemble des droites passant par l'origine dans  $\mathbb{C}^\nu$ . Analytiquement, cet espace est équipé de *coordonnées homogènes*  $[z^1 : z^2 : \dots : z^\nu]$  : dans cette écriture, on suppose que l'une (au moins) des variables  $z^i$  est non nulle et on a les identités  $[\lambda z^1 : \lambda z^2 : \dots : \lambda z^\nu] = [z^1 : z^2 : \dots : z^\nu]$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . On vérifie que  $P_{\nu-1}(\mathbb{C})$  est une variété complexe connexe de dimension  $\nu - 1$ .

Dans notre cas,  $\nu = 6$  et l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^6$  est muni des six coordonnées complexes

$$(10.19) \quad (z^{23}, z^{31}, z^{12}, z^{14}, z^{24}, z^{34}).$$

L'ensemble des bivecteurs généraux modulo dilatation s'identifie donc à l'espace projectif  $P_5(\mathbb{C})$  équipé des coordonnées homogènes  $[z^{23} : z^{31} : z^{12} : z^{14} : z^{24} : z^{34}]$ . De plus, les bivecteurs décomposables modulo dilatations s'identifient aux points de la *quadrique de Plücker*  $Q_{\mathcal{P}}$ , d'équation (10.14). La différentielle

$$(10.20) \quad z^{14} \cdot dz^{23} + z^{23} \cdot dz^{14} + z^{24} \cdot dz^{31} + z^{31} \cdot dz^{24} + z^{34} \cdot dz^{12} + z^{12} \cdot dz^{34} +$$

de cette équation est non nulle en tout point de  $P_5(\mathbb{C})$ , puisque l'une au moins des quantités  $z^{23}, z^{31}, z^{12}, z^{14}, z^{24}, z^{34}$  est non nulle. Il en découle que la quadrique  $Q_{\mathcal{P}}$  est une hypersurface complexe sans singularité (lisse) de  $P_5(\mathbb{C})$ , dont la dimension complexe est égale à 4. En résumé :

**Théorème 10.21.** *Les 2-plans complexes dans  $\mathbb{C}^4$  sont en correspondance biunivoque avec les points de l'espace projectif  $P_5(\mathbb{C})$  appartenant à la quadrique lisse de Plücker  $Q_{\mathcal{P}}$ .*

**10.22. Quadrique de Minkowski complexifiée et transformations de Lorentz complexes.** Dans l'espace projectif  $P_3(\mathbb{C})$  muni des quatre coordonnées homogènes  $[z^1 : z^2 : z^3 : z^4]$ , considérons la *quadrique de Minkowski*  $Q_{\mathcal{M}}$  d'équation

$$(10.23) \quad 0 = -(z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2 + (z^4)^2.$$

Puisque la différentielle

$$(10.24) \quad -2z^1 \cdot dz^1 - 2z^2 \cdot dz^2 - 2z^3 \cdot dz^3 + 2z^4 \cdot dz^4$$

de cette équation est non nulle en tout point de  $P_3(\mathbb{C})$ , la quadrique  $Q_{\mathcal{M}}$  est une hypersurface complexe de  $P_3(\mathbb{C})$  qui est lisse en tout point.

Les *transformations de Lorentz* (complexes) sont les transformations linéaires à coefficients complexes de la forme

$$(10.25) \quad \bar{z}^i = \sum_{j=1}^4 u_j^i z^j,$$

$i = 1, 2, 3, 4$ , qui stabilisent la forme quadratique de Minkowski, c'est-à-dire qui satisfont :

$$(10.26) \quad \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i (\bar{z}^i)^2 = \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i (z^i)^2.$$

Notons  $E$  la matrice  $4 \times 4$

$$(10.27) \quad E := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

réécrivons l'équation précédente sous la forme d'une équation matricielle valable pour tout  $z \in \mathbb{C}^4$  :

$$(10.28) \quad {}^T \bar{z} \cdot E \cdot \bar{z} = {}^T z \cdot {}^T U \cdot E \cdot U \cdot z = {}^T z \cdot U \cdot z.$$

Nous en déduisons que la transformation linéaire  $\bar{z} = U \cdot z$  est de Lorentz si et seulement si la matrice  $U$  satisfait l'équation

$$(10.29) \quad E = {}^T U \cdot E \cdot U.$$

**10.30. Géométrie de la quadrique de Minkowski complexe.** Soit  $\lambda = [\lambda_1 : \lambda_2]$  un point de l'espace projectif  $P_1(\mathbb{C})$  (sphère de Riemann) et considérons les deux familles de 2-plans complexes  $D_\lambda^1$  et  $D_\lambda^2$  définis par les équations cartésiennes :

$$(10.31) \quad \begin{cases} D_\lambda^1 : & 0 = \lambda_1 [z^1 + iz^2] + \lambda_2 [z^3 + z^4], \\ & 0 = \lambda_2 [z^1 - iz^2] + \lambda_1 [-z^3 + z^4], \\ D_\lambda^2 : & 0 = \lambda_1 [z^1 + iz^2] + \lambda_2 [-z^3 + z^4], \\ & 0 = \lambda_2 [z^1 - iz^2] + \lambda_1 [z^3 + z^4]. \end{cases}$$

En déplaçant les premiers termes dans le membre de gauche et en multipliant membre à membre les couple d'équations obtenues, on vérifie immédiatement que ces 2-plans sont contenus dans la quadrique (singulière) de  $\mathbb{C}^4$  d'équation

$0 = -(z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2 + (z^4)^2$ . Notons encore  $D_\lambda^i$  les ensembles de  $P_3(\mathbb{C})$  définis par les équations homogènes (10.31). Ce sont deux familles à un paramètre  $\lambda \in P_1(\mathbb{C})$  de droites de  $P_3(\mathbb{C})$ .

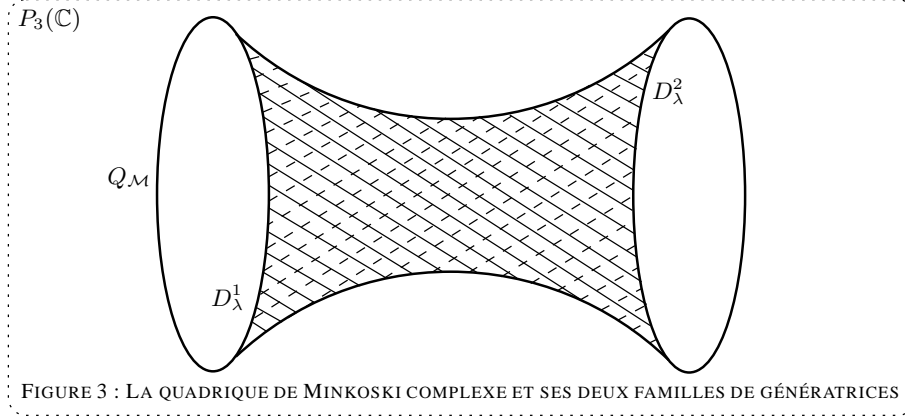


FIGURE 3 : LA QUADRIQUE DE MINKOSKI COMPLEXE ET SES DEUX FAMILLES DE GÉNÉRATRICES

On vérifie aisément que chacune de ces deux familles de droites remplit la quadrique de Minkowski complexe  $Q_{\mathcal{M}}$  et qu'un point de coordonnées homogènes  $[z^1 : z^2 : z^3 : z^4]$  appartient à  $D_\lambda^1$  si et seulement si le point conjugué  $[{}^c z^1 : {}^c z^2 : {}^c z^3 : {}^c z^4]$  appartient à  $D_\lambda^2$ . Ici, nous sommes contraints d'employer la notation  ${}^c z = x - iy$  pour désigner le *conjugué* d'un nombre complexe  $z = x + iy$ , parce que les notations  $\bar{x}, \bar{z}, \bar{u}_j^i$ , etc. ont déjà été employées pour désigner un changement de coordonnées.

**10.32. Coordonnées de Plücker des deux familles de génératrices.** Ainsi, la quadrique de Minkowski est-elle réunion de deux familles de droites projectives complexes conjuguées l'une de l'autre. D'après le théorème de Plücker, à chaque droite complexe  $D_\lambda^i$ ,  $i = 1, 2$ , correspond un point de l'espace projectif  $P_5(\mathbb{C})$ . Lorsque  $\lambda$  varie, on obtient deux courbes complexes (variétés de dimension un) dans  $P_5(\mathbb{C})$  qui sont conjuguées l'une de l'autre. Substituer l'équation de ces courbes à l'équation initiale (10.23) de la quadrique de Minkowski va nous permettre de normaliser l'action d'une transformation de Lorentz (10.25) sur le tenseur de Riemann-Christoffel.

Pour calculer les équations de ces deux courbes dans  $P_5(\mathbb{C})$ , appliquons le lemme suivant.

**Lemme 10.33.** *Les coordonnées de Plücker d'un 2-plan complexe représenté par deux équations cartésiennes indépendantes*

$$(10.34) \quad \begin{cases} 0 = a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 \\ 0 = b_1 z^1 + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 \end{cases}$$

dans  $P_5(\mathbb{C})$  équipé des coordonnées homogènes  $[z^{23} : z^{31} : z^{12} : z^{14} : z^{24} : z^{34}]$  sont les six déterminants  $2 \times 2$  suivants :

$$(10.35) \quad \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| \end{array} \right].$$

Notons ici que la coordonnée de Plücker  $z^{23}$  du 2-plan (10.34) est le déterminant  $a_1 b_4 - b_1 a_4$ , avec les indices 14. Ainsi, il faut considérer que les six indices doubles (10.6) se regroupent par *paires complémentaires* :

$$(10.36) \quad \begin{cases} 23 & 31 & 12 \\ 14 & 24 & 34. \end{cases}$$

*Démonstration.* Quitte à effectuer une permutation sur les coordonnées, on peut supposer que le déterminant  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$  ne s'annule pas. Alors le système linéaire

$$(10.37) \quad \begin{cases} 0 = a_1 z^1 + a_2 z^2 + a \\ 0 = b_1 z^1 + b_2 z^2 + b \end{cases}$$

d'inconnues  $z^1$  et  $z^2$  se résout simplement grâce aux formules

$$(10.38) \quad z^1 = -\frac{\begin{vmatrix} a & a_2 \\ b & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad z^2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a \\ b_1 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Appliquons ces formules aux deux systèmes particuliers extraits de (10.34) dans lesquels on pose premièrement  $(z^3, z^4) := (1, 0)$ , d'où  $(a, b) = (a_3, b_3)$  et deuxièmement  $(z^3, z^4) := (0, 1)$ , d'où  $(a, b) = (a_4, b_4)$ . Nous en déduisons que le 2-plan d'équations cartésiennes (10.34) est engendré par deux vecteurs linéairement indépendants  $\tilde{v}_1 \in \mathbb{C}^4$  et  $\tilde{v}_2 \in \mathbb{C}^4$  de coordonnées :

$$(10.39) \quad \begin{cases} \tilde{v}_1 := \left( -\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, 1, 0 \right) \\ \tilde{v}_2 := \left( -\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, 0, 1 \right). \end{cases}$$

Rappelons que les quatre vecteurs  $e_1, e_2, e_3$  et  $e_4$  forment la base canonique de  $\mathbb{C}^4$ . En multipliant  $\tilde{v}^1$  et  $\tilde{v}^2$  par le déterminant non nul  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ , on trouve que le

2-plan d'équations cartésiennes (10.34) est engendré par les deux vecteurs

$$(10.40) \quad \begin{cases} v_1 := - \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} \cdot e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot e_3, \\ v_2 := - \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{vmatrix} \cdot e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \cdot e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot e_4. \end{cases}$$

Ainsi, à une dilatation près, le 2-plan (10.34) est défini par le bivecteur :

$$(10.41) \quad \left\{ \begin{aligned} v_1 \wedge v_2 = & e_2 \wedge e_3 \left( \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) + \\ & + e_3 \wedge e_1 \left( - \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) + \\ & + e_1 \wedge e_2 \left( \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \right) + \\ & + e_1 \wedge e_4 \left( - \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ & + e_2 \wedge e_4 \left( - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) + \\ & + e_3 \wedge e_4 \left( \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right). \end{aligned} \right.$$

Pour simplifier la soustraction entre deux produits de déterminants qui apparaît à la troisième ligne, appliquons l'identité suivante, dite *de Plücker*, que l'on peut vérifier directement en développant les déterminants :

$$(10.42) \quad \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Grâce à cette identité, l'expression du bivecteur  $v_1 \wedge v_2$

$$(10.43) \quad \left\{ \begin{aligned} v_1 \wedge v_2 = & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \left( e_2 \wedge e_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} + e_2 \wedge e_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} + \right. \\ & + e_1 \wedge e_2 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} + e_1 \wedge e_4 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \\ & \left. + e_2 \wedge e_4 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + e_3 \wedge e_4 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned} \right.$$

se factorise par le déterminant non nul  $a_1 b_2 - b_1 a_2$ , d'où le résultat.  $\square$

Appliquons ce lemme aux équations cartésiennes de la première famille  $D_\lambda^1$  : ses coordonnées de Plücker sont données par les six déterminants  $2 \times 2$  :

$$(10.44) \quad \begin{cases} z^{23} := \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{vmatrix}, & z^{31} := \begin{vmatrix} i\lambda_1 & \lambda_2 \\ -i\lambda_2 & \lambda_1 \end{vmatrix}, & z^{12} := \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & \lambda_1 \end{vmatrix}, \\ z^{14} := \begin{vmatrix} i\lambda_1 & \lambda_2 \\ -i\lambda_2 & -\lambda_1 \end{vmatrix}, & z^{24} := \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}, & z^{34} := \begin{vmatrix} \lambda_1 & i\lambda_1 \\ \lambda_2 & -i\lambda_2 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

On vérifie immédiatement qu'elles satisfont les trois équations  $0 = z^{23} - iz^{14}$ ,  $0 = z^{31} - iz^{24}$  et  $0 = z^{12} - iz^{34}$ . Cependant, puisque la famille  $D_\lambda^1$  ne dépend que d'un paramètre complexe  $\lambda \in P_1(\mathbb{C})$ , elle définit une courbe (ensemble codimension 4) dans l'espace de dimension cinq  $P_5(\mathbb{C})$  et par conséquent, il existe au moins une équation supplémentaire qui est satisfaite par les six déterminants (10.44) ci-dessus. Cette équation n'étant pas immédiatement visible, nous l'introduisons ci-dessous.

De même, en calculant les coordonnées de Plücker de la deuxième famille  $D_\lambda^2$ , on vérifie que ses six coordonnées satisfont les trois équations (conjuguées)  $0 = z^{23} + iz^{14}$ ,  $0 = z^{31} + iz^{24}$  et  $0 = z^{12} + iz^{34}$ . Pour ces raisons, si nous introduisons le changement linéaire de coordonnées sur  $P_5(\mathbb{C})$  défini par

$$(10.45) \quad \begin{cases} \xi^1 := z^{23} - iz^{14}, & \eta^1 := z^{23} + iz^{14}, \\ \xi^2 := z^{31} - iz^{24}, & \eta^2 := z^{31} + iz^{24}, \\ \xi^3 := z^{12} - iz^{34}, & \eta^3 := z^{12} + iz^{34}, \end{cases}$$

les deux couples de trois équations précédentes se simplifient et prennent la forme  $0 = \xi^1 = \xi^2 = \xi^3$  (pour  $D_\lambda^1$ ) et  $0 = \eta^1 = \eta^2 = \eta^3$  (pour  $D_\lambda^2$ ). Utilisons alors les formules de transformation inverse

$$(10.46) \quad \begin{cases} z^{23} := \frac{\eta^1 + \xi^1}{2} & z^{14} := \frac{\eta^1 - \xi^1}{2i}, \\ z^{31} := \frac{\eta^2 + \xi^2}{2} & z^{24} := \frac{\eta^2 - \xi^2}{2i}, \\ z^{12} := \frac{\eta^3 + \xi^3}{2} & z^{34} := \frac{\eta^3 - \xi^3}{2i}, \end{cases}$$

pour remplacer l'équation de Plücker (10.14) par l'équation

$$(10.47) \quad 0 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 - (\eta^1)^2 - (\eta^2)^2 - (\eta^3)^2.$$

L'équation de Plücker originale (10.14) étant évidemment satisfaite par les six coordonnées (10.44) (et de même pour celles associées à  $D_\lambda^2$  que nous n'avons pas écrites), nous déduisons, en posant  $\xi^i = 0$  ou  $\eta^i = 0$  dans (10.47) que les deux familles  $D_\lambda^1$  et  $D_\lambda^2$  sont représentées par les deux couples de quatre équations :

$$(10.48) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D_\lambda^1 : & 0 = \xi^1 \\ & 0 = \xi^2 \\ & 0 = \xi^3 \\ & 0 = (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 \\ D_\lambda^2 : & 0 = \eta^1 \\ & 0 = \eta^2 \\ & 0 = \eta^3 \\ & 0 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2. \end{array} \right.$$

Par un raisonnement élémentaire, on vérifie que toute solution de ces deux familles d'équation fournit une droite du type  $D_\lambda^1$  ou  $D_\lambda^2$ .

**10.49. Transformation lorentzienne induite sur l'espace des 2-plans.** Analysons maintenant l'action d'une transformation de Lorentz (10.) sur l'espace des 2-plans de  $\mathbb{C}^4$ . Pour  $i = 1, 2, 3, 4$ , le vecteur  $e_i$  se transforme en le vecteur

$$(10.50) \quad \bar{e}_i = \sum_{j=1}^4 u_i^j \cdot e_j.$$

Ainsi, les six bivecteurs décomposables  $e_i \wedge e_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , se transforment en les bivecteurs décomposables

$$(10.51) \quad \bar{e}_i \wedge \bar{e}_j := \left( \sum_{k=1}^4 u_i^k \cdot e_k \right) \wedge \left( \sum_{l=1}^4 u_j^l \cdot e_l \right) = \sum_{1 \leq k < l \leq 4} \Delta_{ij}^{kl} \cdot e_k \wedge e_l,$$

où la notation  $\Delta_{kl}^{ij}$  désigne le déterminant  $2 \times 2$  extrait de la matrice

$$(10.52) \quad U = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & u_4^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_4^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 & u_4^3 \\ u_1^4 & u_2^4 & u_3^4 & u_4^4 \end{pmatrix}$$

que l'on obtient en sélectionnant les deux lignes  $i$  et  $j$  ainsi que les deux colonnes  $k$  et  $l$  :

$$(10.53) \quad \Delta_{kl}^{ij} := \begin{vmatrix} u_k^i & u_l^i \\ u_k^j & u_l^j \end{vmatrix}.$$

Observons les relations d'antisymétrie

$$(10.54) \quad \Delta_{kl}^{ij} = -\Delta_{kl}^{ji} = -\Delta_{lk}^{ij} = \Delta_{lk}^{ji}.$$

Ainsi, la transformation lorentzienne  $\bar{z}^i = \sum_{j=1}^4 u_j^i \cdot z^j$  induit la transformation linéaire suivante sur l'espace  $P_5(\mathbb{C})$  des 2-plans :

$$(10.55) \quad \begin{pmatrix} \bar{z}^{23} \\ \bar{z}^{31} \\ \bar{z}^{12} \\ \bar{z}^{14} \\ \bar{z}^{24} \\ \bar{z}^{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{23}^{23} & \Delta_{31}^{23} & \Delta_{12}^{23} & \Delta_{14}^{23} & \Delta_{24}^{23} & \Delta_{34}^{23} \\ \Delta_{31}^{31} & \Delta_{23}^{31} & \Delta_{12}^{31} & \Delta_{14}^{31} & \Delta_{24}^{31} & \Delta_{34}^{31} \\ \Delta_{12}^{12} & \Delta_{23}^{12} & \Delta_{31}^{12} & \Delta_{14}^{12} & \Delta_{24}^{12} & \Delta_{34}^{12} \\ \Delta_{14}^{14} & \Delta_{23}^{14} & \Delta_{31}^{14} & \Delta_{12}^{14} & \Delta_{24}^{14} & \Delta_{34}^{14} \\ \Delta_{24}^{24} & \Delta_{31}^{24} & \Delta_{12}^{24} & \Delta_{14}^{24} & \Delta_{23}^{24} & \Delta_{34}^{24} \\ \Delta_{34}^{34} & \Delta_{23}^{34} & \Delta_{31}^{34} & \Delta_{12}^{34} & \Delta_{14}^{34} & \Delta_{24}^{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{23} \\ z^{31} \\ z^{12} \\ z^{14} \\ z^{24} \\ z^{34} \end{pmatrix}$$

Puisque les six bivecteurs décomposables  $e_i \wedge e_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , sont transformés en des bivecteurs décomposables  $\bar{e}_i \wedge \bar{e}_j$ , l'équation de Plücker  $0 = \bar{z}^{23} \bar{z}^{14} + \bar{z}^{31} \bar{z}^{24} + \bar{z}^{12} \bar{z}^{34}$  est nécessairement satisfaite par les six coordonnées images  $\bar{z}^{ij}$ . Le lemme suivant précise cette relation.

**Lemme 10.56.** *Si les coordonnées  $\bar{z}^{ij}$  sont les transformées des coordonnées  $z^{ij}$  par la transformation de Lorentz induite (10.25), on a :*

$$(10.57) \quad \bar{z}^{23} \bar{z}^{14} + \bar{z}^{31} \bar{z}^{24} + \bar{z}^{12} \bar{z}^{34} = \det U (z^{23} z^{14} + z^{31} z^{24} + z^{12} z^{34}).$$



En appliquant la fonction déterminant à la relation  $E = {}^T U \cdot E \cdot U$ , on obtient  $(\det U)^2 = 1$ . En se restreignant la variation des matrices  $U$  dans la composante connexe de l'identité du groupe  $\mathcal{O}_{p, n-p}$ , on peut supposer que  $\det U = 1$ . Dans ces conditions :

$$(10.58) \quad \bar{z}^{23} \bar{z}^{14} + \bar{z}^{31} \bar{z}^{24} + \bar{z}^{12} \bar{z}^{34} = z^{23} z^{14} + z^{31} z^{24} + z^{12} z^{34}.$$

*Démonstration.* Pour  $i, j, k$  et  $l$  compris entre 1 et 4, introduisons la notation suivante :

$$(10.59) \quad \square_{ij,kl} := \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} u_i^1 & u_j^1 & u_k^1 & u_l^1 \\ u_i^2 & u_j^2 & u_k^2 & u_l^2 \\ u_i^3 & u_j^3 & u_k^3 & u_l^3 \\ u_i^4 & u_j^4 & u_k^4 & u_l^4 \end{pmatrix}.$$

Lorsque les quatre indices  $i, j, k$  et  $l$  ne sont pas tous distincts deux à deux, le déterminant  $\square_{ij,kl}$  s'annule évidemment, puisqu'il possède deux colonnes identiques.

**Lemme 10.60.** *Le déterminant d'une matrice  $4 \times 4$  arbitraire*

$$(10.61) \quad A := \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{pmatrix}$$

*se développe comme une somme de six produits de déterminants  $2 \times 2$  :*

$$(10.62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \det A = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3^3 & a_4^3 \\ a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3^2 & a_4^2 \\ a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3^2 & a_4^2 \\ a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3^1 & a_4^1 \\ a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix} - \\ - \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3^1 & a_4^1 \\ a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 \\ a_1^4 & a_2^4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3^1 & a_4^1 \\ a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

Pour établir ce lemme, il suffit de développer le déterminant de  $A$  le long de la première colonne, ce qui donne une combinaison linéaire de quatre déterminants  $3 \times 3$ , de redévelopper chacun de ces déterminants le long de leur première colonne, ce qui fait apparaître une combinaison linéaire de douze déterminants  $2 \times 2$ , et enfin de réorganiser cette combinaison linéaire en reconstituant six déterminants  $2 \times 2$  «cachés» dans les douze coefficients de cette combinaison linéaire.

Grâce à ce lemme, en tenant compte de la définition des déterminants  $\Delta_{kl}^{ij}$  et de leurs (anti)symétries, nous pouvons développer l'expression de  $2\square_{ij,kl}$  sous la forme

$$(10.63) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\square_{ij,kl} = \Delta_{ij}^{12} \Delta_{kl}^{34} - \Delta_{ij}^{13} \Delta_{kl}^{24} + \Delta_{ij}^{14} \Delta_{kl}^{23} + \Delta_{ij}^{23} \Delta_{kl}^{14} - \Delta_{ij}^{24} \Delta_{kl}^{13} + \Delta_{ij}^{34} \Delta_{kl}^{12} \\ = \Delta_{ij}^{23} \Delta_{kl}^{14} + \Delta_{ij}^{14} \Delta_{kl}^{23} + \Delta_{ij}^{31} \Delta_{kl}^{24} + \Delta_{ij}^{24} \Delta_{kl}^{31} + \Delta_{ij}^{12} \Delta_{kl}^{34} + \Delta_{ij}^{34} \Delta_{kl}^{12}. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, grâce à la relation d'antisymétrie  $z^{ij} = -z^{ji}$  qui nous permet de remplacer  $z^{31}$  par  $-z^{13}$ , nous pouvons réécrire avec des indices les lois de transformation (10.55) sous la forme :

$$(10.64) \quad \bar{z}^{ij} = \sum_{1 \leq k < l \leq 4} \Delta_{kl}^{ij} \cdot z^{kl},$$

pour  $1 \leq i < j \leq 4$ . Remplaçons ces valeurs dans le membre de gauche de (10.57), ce qui donne :

$$(10.65) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{z}^{23} \bar{z}^{14} + \bar{z}^{31} \bar{z}^{24} + \bar{z}^{12} \bar{z}^{34} &= \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \Delta_{ij}^{23} \cdot z^{ij} \right) \left( \sum_{1 \leq k < l \leq 4} \Delta_{kl}^{14} \cdot z^{kl} \right) + \\ &+ \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \Delta_{ij}^{31} \cdot z^{ij} \right) \left( \sum_{1 \leq k < l \leq 4} \Delta_{kl}^{24} \cdot z^{kl} \right) + \\ &+ \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \Delta_{ij}^{12} \cdot z^{ij} \right) \left( \sum_{1 \leq k < l \leq 4} \Delta_{kl}^{34} \cdot z^{kl} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \sum_{1 \leq k < l \leq 4} z^{ij} z^{kl} [\Delta_{ij}^{23} \Delta_{kl}^{14} + \Delta_{ij}^{31} \Delta_{kl}^{24} + \Delta_{ij}^{12} \Delta_{kl}^{34}] \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \square_{ij, ij} \cdot (z^{ij})^2 + \sum_{i < j, k < l, (i, j) < (k, l)} (2\square_{ij, kl}) \cdot z^{ij} z^{kl}. \end{aligned} \right.$$

À la dernière ligne, nous avons introduit la relation d'ordre  $(i, j) < (k, l)$  entre couples d'indices compris entre 1 et 4 qui est définie par

$$(10.66) \quad i < j \quad \text{ou} \quad i = k \text{ et } j < l.$$

Remarquons que les déterminants  $\square_{ij, ij}$  s'annulent, puisqu'ils possèdent deux colonnes identiques. Dans la somme  $\sum_{i < j, k < l, (i, j) < (k, l)}$ , seuls trois termes comprennent des indices  $i, j, k$  et  $l$  qui sont deux à deux distincts : il s'agit de  $(1, 4) < (2, 3)$ , de  $(2, 4) < (3, 1)$  et de  $(1, 2) < (3, 4)$ . Puisque les déterminants  $2\square_{ij, kl}$  pour lesquels les quatre indices  $i, j, k$  et  $l$  ne sont pas deux à deux distincts s'annulent, il ne reste que trois termes dans la deuxième somme de la dernière ligne de (10.65) :

$$(10.67) \quad \bar{z}^{23} \bar{z}^{14} + \bar{z}^{31} \bar{z}^{24} + \bar{z}^{12} \bar{z}^{34} = (2\square_{23, 14}) \cdot z^{23} z^{14} + (2\square_{31, 24}) \cdot z^{31} z^{24} + (2\square_{12, 34}) \cdot z^{12} z^{34}$$

Pour conclure, il suffit d'observer que

$$(10.68) \quad \det U = 2\square_{23, 14} = 2\square_{31, 24} = 2\square_{12, 34},$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

**10.69. Homomorphisme de groupe.** Complexifions les transformations de Lorentz  $\bar{\omega}^i = \sum_{j=1}^4 u_j^i z^j$  en supposant que la matrice  $U$  satisfaisant  $E = {}^T U \cdot E \cdot U$

a des coefficients complexes. Notons  $\text{SO}_{3,1}(\mathbb{C})$  le groupe de telles matrices satisfaisant la condition supplémentaire  $\det U = 1$ . Ce groupe est connexe. La relation (10.57) se spécialise :

$$(10.70) \quad \bar{z}^{23} \bar{z}^{14} + \bar{z}^{31} \bar{z}^{24} + \bar{z}^{12} \bar{z}^{34} = z^{23} z^{14} + z^{31} z^{24} + z^{12} z^{34}.$$

La matrice  $\Delta = \Delta(U)$  de taille  $6 \times 6$  apparaissant dans (10.55) dépend de  $U$  et satisfait la relation de groupe  $\Delta(U^1 \cdot U^2) = \Delta(U^1) \cdot \Delta(U^2)$ .

Notons  $(\xi, \eta) = L(z^{ij})$  le changement de coordonnées linéaire qui apparaît dans le membre de droite de (10.45), où  $L$  est une matrice  $6 \times 6$  à coefficients complexes. Notons  $\tilde{L}$  son inverse. La transformation linéaire  $\bar{z}^{ij} = \Delta(U) \cdot z^{i_1 j_1}$  est conjuguée à la transformation linéaire  $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = L \cdot \Delta(U) \cdot \tilde{L}(\xi, \eta)$ . Notons  $W = W(U)$  la matrice  $L \cdot \Delta(U) \cdot \tilde{L}$ , qui dépend de  $U$ . Voici son expression en fonction des éléments  $\Delta_{kl}^{ij}$  :

$$(10.71) \quad \begin{pmatrix} \Delta_{23}^{23} - i\Delta_{23}^{14} + i\Delta_{14}^{23} + \Delta_{14}^{14} & \Delta_{31}^{23} - i\Delta_{31}^{14} + i\Delta_{24}^{23} + \Delta_{24}^{14} & \Delta_{12}^{23} - i\Delta_{12}^{14} + i\Delta_{34}^{23} + \Delta_{34}^{14} \\ \Delta_{23}^{31} - i\Delta_{23}^{24} + i\Delta_{14}^{31} + \Delta_{14}^{24} & \Delta_{31}^{31} - i\Delta_{31}^{24} + i\Delta_{24}^{31} + \Delta_{24}^{24} & \Delta_{12}^{31} - i\Delta_{12}^{24} + i\Delta_{34}^{31} + \Delta_{34}^{24} \\ \Delta_{23}^{12} - i\Delta_{23}^{34} + i\Delta_{14}^{12} + \Delta_{14}^{34} & \Delta_{31}^{12} - i\Delta_{31}^{34} + i\Delta_{24}^{12} + \Delta_{24}^{34} & \Delta_{12}^{12} - i\Delta_{12}^{34} + i\Delta_{34}^{12} + \Delta_{34}^{34} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $W = W(U)$  de taille  $6 \times 6$  associée à  $U$  satisfait aussi la loi de groupe  $W(U^1 \cdot U^2) = W(U^1) \cdot W(U^2)$ . En remplaçant  $\bar{z}^{ij}$  et  $z^{i_1 j_1}$  par leurs valeurs en fonction de  $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  et de  $(\xi, \eta)$  dans la relation (10.), nous obtenons :

$$(10.72) \quad (\bar{\xi}^1)^2 + (\bar{\xi}^2)^2 + (\bar{\xi}^3)^2 - (\bar{\eta}^1)^2 - (\bar{\eta}^2)^2 - (\bar{\eta}^3)^2 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 - (\eta^1)^2 - (\eta^2)^2 - (\eta^3)^2.$$

Soit  $\text{SO}_3(\mathbb{C})$  le groupe des matrices de tailles  $3 \times 3$  satisfaisant  ${}^T V \cdot V = I_{3 \times 3}$  et  $\det V = 1$ . Ce groupe est aussi connexe.

**Lemme 10.73.** *Pour tout  $U \in \text{SO}_{3,1}(\mathbb{C})$ , la transformation associée  $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = W(U)(\xi, \eta)$  est de la forme*

$$(10.74) \quad \begin{pmatrix} \bar{\xi}^1 \\ \bar{\xi}^2 \\ \bar{\xi}^3 \\ \bar{\eta}^1 \\ \bar{\eta}^2 \\ \bar{\eta}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c v_1^1 & c v_2^1 & c v_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & c v_1^2 & c v_2^2 & c v_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & c v_1^3 & c v_2^3 & c v_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \\ \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix},$$

où la matrice  $3 \times 3$

$$(10.75) \quad V := \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 \end{pmatrix}$$

appartient à  $\text{SO}_3(\mathbb{C})$ .

*Démonstration.* Une transformation lorentzienne  $U$  arbitraire stabilise la quadrique de Minkowski  $Q_{\mathcal{M}} = \bigcup_{\lambda} D_{\lambda}^1 = \bigcup_{\lambda} D_{\lambda}^2$  et transforme toute droite projective une droite projective. Observons que les droites projectives  $D_{\lambda}^1$  et  $D_{\lambda}^2$  ne sont pas tangentes entre elles. Nous en déduisons que si  $U$  est proche de l'identité dans  $\text{SO}_{3,1}(\mathbb{C})$ , les  $D_{\lambda}^1$  sont transformées en elles-mêmes et les  $D_{\lambda}^2$  sont transformées en elles-mêmes. Grâce au principe du prolongement analytique, cette propriété est

satisfaite pour toute transformation  $U$ , puisque  $SO_{3,1}(\mathbb{C})$  est connexe. De manière équivalente,  $\bar{\xi} = 0$  si  $\xi = 0$  et  $\bar{\eta} = 0$  si  $\eta = 0$ . Nous en déduisons que la transformation  $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = W(U)(\xi, \eta)$  est effectivement diagonale par blocs (10.74). Enfin, l'identité de Plücker modifiée (10.72) donne

$$(10.76) \quad \begin{cases} (\bar{\xi}^1)^2 + (\bar{\xi}^2)^2 + (\bar{\xi}^3)^2 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2, \\ (\bar{\eta}^1)^2 + (\bar{\eta}^2)^2 + (\bar{\eta}^3)^2 = (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2, \end{cases}$$

ce qui montre que la matrice  $V$  est une matrice orthogonale complexe de taille  $3 \times 3$ .  $\square$

**Lemme 10.77.** *L'application*

$$(10.78) \quad SO_{3,1}(\mathbb{C}) \ni U \longmapsto V(U) \in SO_3(\mathbb{C})$$

*est un homomorphisme surjectif de groupe.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que la différentielle de cette application est surjective au point  $U = I_{4 \times 4}$ . En effet, il en découlera que l'image de cette application contient un voisinage de l'identité dans le groupe connexe  $SO_3(\mathbb{C})$ , et tout voisinage de l'identité engendre alors ce groupe par multiplication.

Pour calculer la différentielle en l'identité, commençons par différentier l'identité  $E = {}^T U \cdot E \cdot U$  en  $U = I_{4 \times 4}$ , ce qui donne  $0 = d^T U \cdot E + E \cdot dU$ , c'est-à-dire en notation développée :

$$(10.79) \quad 0 = \begin{pmatrix} -2du_1^1 & -du_1^2 - du_2^1 & -du_1^3 - du_3^1 & du_1^4 - du_4^1 \\ -du_2^1 - du_1^2 & -2du_2^2 - du_2^3 & -du_2^3 - du_3^2 & du_2^4 - du_4^2 \\ -du_3^1 - du_1^3 & -du_2^3 - du_3^2 & -2du_3^3 & du_3^4 - du_4^3 \\ -du_4^1 + du_1^4 & -du_2^4 + du_4^2 & -du_3^4 + du_4^3 & 2du_4^4 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons ainsi 10 relations linéaires indépendantes sur les 16 différentielles  $du_j^i$  en l'identité : le groupe  $SO_{3,1}(\mathbb{C})$  est effectivement de dimension  $16 - 10 = 6$ . Prenons alors pour base sur l'espace cotangent à l'identité les six formes différentielles  $du_2^3, du_3^1, du_1^2, du_1^4, du_2^4$  et  $du_3^4$ . Calculons maintenant la différentielle en l'identité de  $\Delta_{kl}^{ij} = u_k^i u_l^j - u_l^i u_k^j$  :

$$(10.80) \quad \begin{cases} d\Delta_{kl}^{ij} \Big|_{I_{4 \times 4}} = \left( u_l^j du_k^i + u_k^i du_l^j - u_k^j du_l^i - u_l^i du_k^j \right) \Big|_{I_{4 \times 4}} \\ \qquad \qquad \qquad = \delta_l^j du_k^i + \delta_k^i du_l^j - \delta_k^j du_l^i - \delta_l^i du_k^j. \end{cases}$$

Grâce à cette formule générale, nous pouvons calculer la différentielle en l'identité de la matrice  $V(U)$  écrite en (10.71), ce qui donne :

$$(10.81) \quad \begin{pmatrix} 0 & -du_1^2 + idu_3^4 + idu_4^3 + du_2^1 & -du_1^3 - idu_2^4 - idu_4^2 + du_3^1 \\ -du_2^1 - idu_3^4 - idu_4^3 + du_1^2 & 0 & -du_2^3 + idu_1^4 + idu_4^1 + du_3^2 \\ -du_3^1 + idu_2^4 + idu_4^3 + du_1^3 & -du_3^2 - idu_1^4 - idu_4^1 + du_2^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Simplifions en utilisant la base constituée des six formes différentielles  $du_2^3, du_3^1, du_1^2, du_1^4, du_2^4$  et  $du_3^4$  :

$$(10.82) \quad \begin{pmatrix} 0 & 2du_2^1 + 2idu_4^3 & -2du_1^3 - 2idu_4^2 \\ -2du_2^1 - 2idu_4^3 & 0 & 2du_2^3 + 2idu_4^1 \\ 2du_3^1 + 2idu_2^4 & -2du_3^2 - 2idu_4^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, la différentiation en l'identité de la relation  ${}^T V \cdot V = I_{3 \times 3}$  qui définit une matrice  $3 \times 3$  orthogonale montre que l'espace cotangent en l'identité de  $SO_3(\mathbb{C})$  est engendrée par les matrices de la forme

$$(10.83) \quad \begin{pmatrix} 0 & dv_2^1 & -dv_1^3 \\ -dv_1^2 & 0 & dv_2^3 \\ dv_1^3 & -dv_2^3 & 0 \end{pmatrix},$$

où les trois formes  $dv_2^3$ ,  $dv_3^1$  et  $dv_2^1$  sont indépendantes. Il est clair que toute matrice  $3 \times 3$  telle que (10.83) peut s'écrire sous la forme d'une matrice (10.82), ce qui achève la preuve.  $\square$

### §11. DÉCOMPOSITION DU TENSEUR DE COURBURE EN COMPOSANTES IRRÉDUCTIBLES

Réécrivons la forme quadratique de Riemann-Christoffel en identifiant les 2-formes  $\omega^i \wedge \omega^j$  à des coordonnées plückeriennes  $\omega^{ij}$  indépendantes, ce qui donne :

$$(11.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \sum_{1 \leq k < l \leq 4} S_{ijkl}^i \cdot \omega^{ij} \omega^{kl} \\ = S_{323}^2 \cdot (\omega^{23})^2 + S_{131}^3 \cdot (\omega^{31})^2 + S_{212}^1 \cdot (\omega^{12})^2 + \\ + S_{414}^1 \cdot (\omega^{14})^2 + S_{424}^1 \cdot (\omega^{24})^2 + S_{434}^1 \cdot (\omega^{34})^2 + \\ + 2S_{331}^2 \cdot \omega^{23} \omega^{31} + 2S_{312}^2 \cdot \omega^{23} \omega^{12} + 2S_{314}^2 \cdot \omega^{23} \omega^{14} + \\ + 2S_{324}^2 \cdot \omega^{23} \omega^{24} + 2S_{334}^2 \cdot \omega^{23} \omega^{34} + 2S_{112}^3 \cdot \omega^{31} \omega^{12} + \\ + 2S_{114}^3 \cdot \omega^{31} \omega^{14} + 2S_{124}^3 \cdot \omega^{31} \omega^{24} + 2S_{134}^3 \cdot \omega^{31} \omega^{34} + \\ + 2S_{214}^1 \cdot \omega^{12} \omega^{14} + 2S_{224}^1 \cdot \omega^{12} \omega^{24} + 2S_{234}^1 \cdot \omega^{12} \omega^{34} + \\ + 2S_{424}^1 \cdot \omega^{14} \omega^{24} + 2S_{434}^1 \cdot \omega^{14} \omega^{34} + 2S_{434}^2 \cdot \omega^{24} \omega^{34}. \end{array} \right.$$

$\square$  Signification géométrique ? Fibré ?

Remplaçons les variables  $\omega^{ij}$  en fonction des variables  $\xi^i$  et  $\eta^j$  via les formules (10.46). Après un calcul direct, nous obtenons une représentation de  $\Phi$  comme somme de trois termes : une forme quadratique  $\varphi(\xi)$ , une forme bilinéaire  $\psi(\xi; \eta)$  et la forme quadratique  ${}^c\varphi(\eta)$  dont les coefficients sont conjugués de ceux de  $\varphi(\xi)$  :

$$(11.2) \quad \Phi = \varphi(\xi) + \psi(\xi; \eta) + {}^c\varphi(\eta),$$

où

$$(11.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\varphi(\xi) := (\xi^1)^2 [S_{323}^2 - S_{414}^1 + 2iS_{314}^2] + (\xi^2)^2 [S_{131}^3 - S_{424}^1 + 2iS_{124}^3] + \\ + (\xi^3)^2 [S_{212}^1 - S_{434}^1 + 2iS_{234}^1] + 2\xi^2 \xi^3 [S_{112}^3 + iS_{134}^3 + iS_{224}^1 - S_{434}^2] + \\ + 2\xi^3 \xi^1 [S_{312}^2 + iS_{214}^1 + iS_{334}^2 - S_{434}^1] + 2\xi^1 \xi^2 [S_{331}^2 + iS_{324}^2 + iS_{114}^3 - S_{424}^1], \end{array} \right.$$

où

$$(11.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\psi(\xi; \eta) := \xi^1 \eta^1 [S_{323}^2 + S_{414}^1] + \xi^1 \eta^2 [S_{331}^2 - iS_{324}^2 + iS_{114}^3 + S_{424}^1] + \\ \quad + \xi^1 \eta^3 [S_{312}^2 - iS_{334}^2 + iS_{214}^1 + S_{434}^1] + \\ \quad + \xi^2 \eta^1 [S_{331}^2 + iS_{324}^2 - iS_{114}^3 + S_{424}^1] + \xi^2 \eta^2 [S_{131}^3 + S_{424}^2] + \\ \quad + \xi^2 \eta^3 [S_{112}^3 - iS_{134}^3 + iS_{224}^1 + S_{434}^2] + \\ \quad + \xi^3 \eta^1 [S_{312}^2 + iS_{334}^2 - iS_{214}^1 + S_{434}^1] + \\ \quad + \xi^3 \eta^2 [S_{112}^3 + iS_{134}^3 - iS_{224}^1 + S_{434}^2] + \xi^3 \eta^3 [S_{212}^1 + S_{434}^3], \end{array} \right.$$

et où la forme  ${}^c\varphi(\eta)$  est conjuguée de  $\varphi(\xi)$

$$(11.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4{}^c\varphi(\eta) := (\eta^1)^2 [S_{323}^2 - S_{414}^1 - 2iS_{314}^2] + (\eta^2)^2 [S_{131}^3 - S_{424}^2 - 2iS_{124}^3] + \\ \quad + (\eta^3)^2 [S_{212}^1 - S_{434}^3 - 2iS_{234}^1] + 2\eta^2 \eta^3 [S_{112}^3 - iS_{134}^3 - iS_{224}^1 - S_{434}^2] + \\ \quad + 2\eta^3 \eta^1 [S_{312}^2 - iS_{214}^1 - iS_{334}^2 - S_{434}^1] + 2\eta^1 \eta^2 [S_{331}^2 - iS_{324}^2 - iS_{114}^3 - S_{424}^1]. \end{array} \right.$$

**11.6. Action d'une transformation de Lorentz sur la forme de Riemann-Christoffel.** Rappelons que la matrice de rotation  $U = (u_j^i)$  intervient dans la définition des 1-formes  $\omega^i$ . Introduisons une autre matrice de rotation  $U' = (u_j'^i)$  satisfaisant  $E = {}^T U' \cdot E \cdot U'$  et définissons la transformation

$$(11.7) \quad \omega'^i := \sum_{j=1}^4 u_j'^i \omega^j.$$

Elle induit la transformation suivante sur les 2-formes :

$$(11.8) \quad \omega'^i \wedge \omega'^j =: \omega'^{ij} = \sum_{1 \leq k < l \leq 4} \Delta_{kl}^{ij}(U') \omega'^{kl} =: \sum_{1 \leq k < l \leq 4} u_{kl}^{ij} \omega'^{kl},$$

où  $1 \leq i < j \leq 4$  et  $u_{kl}^{ij}$  est une abréviation de  $\Delta_{kl}^{ij}(U')$ . D'après le Lemme 10.73, une telle transformation lorentzienne complexe induit une transformation orthogonale complexe par blocs

$$(11.9) \quad \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & {}^cV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

où  $V \in \text{SO}_3(\mathbb{C})$  dépend de  $U'$ . D'après le Lemme 10.77, toutes les matrices  $V \in \text{SO}_3(\mathbb{C})$  sont obtenues par ce procédé. La forme quadratique  $\Phi = \varphi(\xi) + \psi(\xi; \eta) + {}^c\varphi(\eta)$  va se transformer en une forme  $\Phi' = \varphi'(\xi') + \psi'(\xi'; \eta') + {}^c\varphi'(\eta')$ . Avant d'expliciter cette transformation, quelques préliminaires algébriques sont nécessaires.

**11.10. Action d'un changement de base sur une forme quadratique.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , soit  $z = (z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n$  et soit  $g(z) := \sum_{i,j=1}^n g_{ij} z^i z^j$  une forme quadratique à coefficients complexes satisfaisant  $g_{ij} = g_{ji}$ . En introduisant la matrice  $G = (g_{ij})$  et en considérant que  $z$  est un vecteur colonne, nous pouvons utiliser l'écriture matricielle  $g(z) = {}^T z \cdot G \cdot z$ . Notons  $G_n$  l'espace vectoriel de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$  constitué de ces formes quadratiques.

Soit  $p \in \mathbb{N}$  avec  $0 \leq p \leq n$  et soit  $E$  la matrice diagonale (2.9). Notons  $SO_{p, n-p}$  le groupe des matrices  $U$  de taille  $n \times n$  à coefficients complexes satisfaisant  $E = {}^T U \cdot E \cdot U$  et  $\det U = 1$ . Ce groupe agit sur les formes quadratiques par changement de base : si  $\bar{z} = U \cdot z$ , d'où  ${}^T \bar{z} = {}^T z \cdot {}^T U$ , l'identification des coefficients de  $z^i z^j$  dans

$$(11.11) \quad {}^T z^T \cdot U \cdot \bar{G} \cdot U \cdot z = {}^T \bar{z} \cdot \bar{G} \cdot \bar{z} = \bar{g}(\bar{z}) = g(z) = {}^T z \cdot G \cdot z$$

fournit l'identité matricielle

$$(11.12) \quad {}^T U \cdot \bar{G} \cdot U = G$$

qui exprime l'action du changement de base  $\bar{z} = U \cdot z$  sur la forme quadratique  $g(z)$ . Définissons la *trace modifiée* de  $G$  par

$$(11.13) \quad -g_{11} - \cdots - g_{pp} + g_{p+1 p+1} + \cdots + g_{nn} = \text{Tr}(E \cdot G).$$

Nous affirmons que la trace modifiée est un invariant de l'action par changement de base, c'est-à-dire que nous avons  $\text{Tr}(E \cdot G) = \text{Tr}(E \cdot \bar{G})$ . En effet, dans le calcul suivant, insérons  ${}^T U = E \cdot \tilde{U} \cdot E$  dans le membre de droite de la première ligne et utilisons la relation  $\text{Tr}(ABCD) = \text{Tr}(DABC)$  pour le passage de la troisième ligne à la quatrième :

$$(11.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Tr}(E \cdot G) = \text{Tr}(E \cdot {}^T U \cdot \bar{G} \cdot U) \\ = \text{Tr}(E \cdot E \cdot \tilde{U} \cdot E \cdot \bar{G} \cdot U) \\ = \text{Tr}(\tilde{U} \cdot E \cdot \bar{G} \cdot U) \\ = \text{Tr}(E \cdot \bar{G} \cdot U \cdot \tilde{U}) \\ = \text{Tr}(E \cdot \bar{G}). \end{array} \right.$$

Pour cette raison, introduisons l'hyperplan de l'espace des formes quadratiques  $G_n$  défini par

$$(11.15) \quad G'_n := \{G = (g_{ij}) \in G_n : \text{Tr}(E \cdot G) = 0\}.$$

Cet hyperplan est stable par le changement de base (11.12). Notons  $\rho(U)$  l'endomorphisme linéaire  $G \mapsto \bar{G} = {}^T \tilde{U} \cdot G \cdot \tilde{U}$  de l'espace vectoriel  $G'_n$ . On vérifie que  $\rho(U^1 \cdot U^2) = \rho(U^1) \cdot \rho(U^2)$ . L'application  $\rho$  constitue donc un homomorphisme du groupe  $SO_{p, n-p}(\mathbb{C})$  dans le groupe des automorphismes linéaires de  $G'_n$ . On dit que  $\rho$  est une *représentation* du groupe  $SO_{p, n-p}(\mathbb{C})$  sur l'espace vectoriel  $G'_n$ . Cette représentation est *irréductible* au sens suivant.

**Lemme 11.16.** *Il n'existe pas de sous-espace linéaire  $G''$  contenu strictement dans  $G'_n$  et non réduit à 0 tel que  $\rho(U)G'' \subset G''$  pour tout  $U \in SO_{p, n-p}(\mathbb{C})$ .*

*Démonstration.* Dans le cas défini positif, on utilise le théorème de diagonalisation simultanée de formes quadratiques. La démonstration est à compléter.  $\square$

$\square$  Prudence avec le cas non défini positif.

**11.17. Soustraction de la trace modifiée.** Le Lemme précédent suggère de réécrire la forme de Riemann-Christoffel  $\Phi$  en soustrayant la trace de  $\varphi(\xi)$  et la trace de  ${}^c\varphi(\eta)$ . D'après (11.3), d'après les relations de symétrie de la dernière ligne de (6.39) et d'après la définition (8.4) de la courbure totale, la somme des coefficients diagonaux de  $\varphi(\xi)$  est égale à  $\frac{1}{4}S$ , où l'expression développée de  $S$  est donnée par :

$$(11.18) \quad S = S_{323}^2 + S_{131}^3 + S_{212}^1 - S_{414}^1 - S_{424}^2 - S_{434}^3.$$

Ainsi, nous pouvons réécrire :

$$(11.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \overline{\varphi}(\xi) + \psi(\xi; \eta) + {}^c\overline{\varphi}(\eta) + \\ \quad + \frac{1}{12}S [(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 + (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2], \end{array} \right.$$

avec

$$(11.20) \quad \overline{\varphi}(\xi) := \varphi(\xi) - \frac{1}{12}S [(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2].$$

Maintenant, la trace de la forme quadratique  $\overline{\varphi}(\xi)$  est nulle. Les six coefficients indépendants de  $\varphi(\xi)$  se réduisent à cinq coefficients pour  $\overline{\varphi}(\xi)$ .

L'action de la rotation lorentzienne (11.7) transforme  $(\xi, \eta)$  en  $(V \cdot \xi, {}^cV \cdot {}^c\eta)$ , où la matrice  $V \in \text{SO}_3(\mathbb{C})$  peut être supposée arbitraire, grâce au Lemme 10.77. Par une telle rotation complexe, la forme quadratique de Riemann-Christoffel se transforme en la forme

$$(11.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi' = \overline{\varphi}'(\xi') + \psi'(\xi'; \eta') + {}^c\overline{\varphi}'(\eta') + \\ \quad + \frac{1}{12}S [(\xi'^1)^2 + (\xi'^2)^2 + (\xi'^3)^2 + (\eta'^1)^2 + (\eta'^2)^2 + (\eta'^3)^2], \end{array} \right.$$

où les deux formes quadratiques  $\overline{\varphi}'$  et conjuguée  ${}^c\overline{\varphi}'$  ainsi que la forme bilinéaire  $\psi'$  se transforment comme suit :

$$(11.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\varphi}' = {}^T\tilde{V} \cdot \overline{\varphi} \cdot \tilde{V}, \\ \psi' = {}^Tc\tilde{V} \cdot \overline{\varphi} \cdot \tilde{V}, \\ {}^c\overline{\varphi}' = {}^Tc\tilde{V} \cdot {}^c\overline{\varphi} \cdot {}^c\tilde{V}. \end{array} \right.$$

Grâce au Lemme 11.16 ci-dessus, l'action de  $V$  sur ces trois formes est irréductible. Nous en déduisons le théorème fondamental de décomposition du tenseur de courbure en composantes irréductibles.

**Théorème 11.23.** *Les 20 invariants relatifs  $S_{jkl}^i$  normaux se distribuent en quatre groupes :*

- 1° *l'invariant absolu  $S$  ;*
- 2° *les cinq coefficients complexes de la forme  $\overline{\varphi}(\xi)$  ;*
- 3° *les neuf coefficients (réels ou deux à deux imaginaires conjugués) de la forme  $\psi(\xi; \eta)$  ;*
- 4° *les cinq coefficients complexes conjugués de  ${}^c\overline{\varphi}(\eta)$ .*



Toute transformation lorentzienne (11.7) sur les formes différentielles  $\omega^i$  échange entre eux les invariants relatifs de chaque groupe et ces quatre groupes sont indécomposables en d'autres groupes dont les éléments soient séparément échangés entre eux.

## §12. THÉORÈME D'UNICITÉ

**12.1. Forme quadratique de Ricci.** Définissons la forme quadratique de Ricci

$$(12.2) \quad \Theta := \sum_{1 \leq i, j \leq 4} S_{ij} \cdot \omega^i \omega^j,$$

dont les coefficients  $S_{ij} = \sum_{k=1}^4 \varepsilon_k S_{ikj}^k$  sont les composantes de la courbure de Ricci. La trace modifiée de cette forme satisfait  $\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i S_{ii} = \sum_{i,k=1}^4 \varepsilon_i \varepsilon_k S_{iki}^i = 2S$ . Par conséquent, si nous définissons

$$(12.3) \quad \bar{\Theta} := \Theta - \frac{1}{2} S \sum_{1 \leq i \leq 4} \varepsilon_i (\omega^i)^2,$$

la trace modifiée de  $\bar{\Theta} =: \sum_{i,j=1}^4 \bar{S}_{ij} \cdot \omega^i \omega^j$  s'annule :

$$(12.4) \quad 0 = -\bar{S}_{11} - \bar{S}_{22} - \bar{S}_{33} + \bar{S}_{44}.$$

Il reste 9 coefficients linéairement indépendants  $\bar{\Theta}_{ij}$ . On appellera *forme quadratique de Ricci sans trace* la forme  $\bar{\Theta}$ . Par un calcul direct, nous obtenons l'expression développée de la forme  $\bar{\Theta}$  :

$$(12.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Theta} = (\omega^1)^2 \left[ \frac{1}{2} (S_{323}^2 - S_{131}^3 - S_{212}^1 + S_{414}^1 - S_{424}^2 - S_{434}^3) \right] + \\ \quad + (\omega^2)^2 \left[ \frac{1}{2} (-S_{323}^2 + S_{131}^3 - S_{212}^1 - S_{414}^1 + S_{424}^2 - S_{434}^3) \right] + \\ \quad + (\omega^3)^2 \left[ \frac{1}{2} (-S_{323}^2 - S_{131}^3 + S_{212}^1 - S_{414}^1 - S_{424}^2 + S_{434}^3) \right] + \\ \quad + 2\omega^2 \omega^3 [-S_{213}^1 + S_{243}^4] + 2\omega^3 \omega^1 [-S_{321}^2 + S_{341}^4] + \\ \quad + 2\omega^1 \omega^2 [-S_{132}^3 + S_{142}^4] + 2\omega^1 \omega^4 [-S_{124}^2 - S_{134}^3] + \\ \quad + 2\omega^2 \omega^4 [-S_{214}^1 - S_{234}^3] + 2\omega^3 \omega^4 [-S_{314}^1 + S_{324}^2]. \end{array} \right.$$

On peut observer que ces 9 coefficients sont des combinaisons linéaires des coefficients de la forme bilinéaire  $\psi(\xi; \eta)$ . Citons sans démonstration un énoncé qui explique la relation géométrique entre la forme quadratique de Ricci sans trace  $\bar{\Theta}$  et la forme bilinéaire  $\psi$  (cf. [Ca1922], pp. 51–52).

**Théorème 12.6.** *Le complexe quadratique de droites obtenu en annulant la forme  $\psi$  est celui des droites qui découpent sur la quadrique de Minkowski complexe  $Q_{\mathcal{M}}$  et sur la quadrique  $\Theta = 0$  deux segments formant une division harmonique.*

**12.7. Démonstration du théorème d'unicité.** Grâce aux considérations de la fin du §8.47, le Théorème d'unicité 1.85 se ramène à l'énoncé suivant.

**Théorème 12.8.** *Toute forme quadratique covariante*

$$(12.9) \quad \Psi := \sum_{i,j=1}^4 D_{ij} \cdot \omega^i \omega^j$$

dont les coefficients sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des composantes de courbure  $S_{jkl}^i$  est nécessairement de la forme :

$$(12.10) \quad D_{ij} = \lambda \bar{S}_{ij} + (\alpha S + \beta) [-(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2].$$

*Démonstration.* Pour soustraire à  $\Psi$  sa trace modifiée, posons

$$(12.11) \quad \begin{cases} D := -D_{11} - D_{22} - D_{33} + D_{44} \\ \bar{D}_{ij} := D_{ij} - \frac{1}{4} \varepsilon_i \delta_i^j, \end{cases}$$

de telle sorte que

$$(12.12) \quad \Psi = \sum_{i,j=1}^4 \bar{D}_{ij} \cdot \omega^i \omega^j + \frac{1}{4} D [-(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2],$$

avec

$$(12.13) \quad 0 = -\bar{D}_{11} - \bar{D}_{22} - \bar{D}_{33} + \bar{D}_{44}.$$

La quantité  $D$  est un invariant absolu, comme on le vérifie par un calcul analogue à (8.4) :

$$(12.14) \quad \begin{cases} D = \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i D_{ii} = \sum_{i,i_1,j_1=1}^4 \varepsilon_i \tilde{u}_i^{i_1} \tilde{u}_j^{j_1} C_{i_1 j_1} = \sum_{i,i_1,j_1} \varepsilon_{i_1} u_{i_1}^i \tilde{u}_i^{j_1} C_{i_1 j_1} \\ = \sum_{i_1} \varepsilon_{i_1} C_{i_1 i_1} = C, \end{cases}$$

indépendant des variables de rotation  $u_j^i$ . D'après le Théorème 11.23, seule la quantité  $S = R$  est un invariant absolu. Par conséquent, puisque  $D$  est une combinaison linéaire des  $S_{jkl}^i$ , il existe des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  telles que :

$$(12.15) \quad D = \alpha S + \beta.$$

Quant aux quantités  $\bar{D}_{ij}$ , elles dépendent linéairement de 9 d'entre elles que nous pourrons, sans préciser davantage, désigner par

$$(12.16) \quad \bar{D}_1, \bar{D}_2, \dots, \bar{D}_9.$$

Lorsqu'on effectue une transformation lorentzienne  $\omega'^i = \sum_{1 \leq j \leq 4} u_j^i \omega^j$  quelconque, les quantités  $\bar{D}_k$  subissent une substitution linéaire  $\bar{D}'_k = \sum_{1 \leq m \leq 9} \lambda_k^m \bar{D}_m$ . Plus précisément, si nous revenons aux notations  $\bar{D}_{ij}$ , et si nous remplaçons  $\omega^i = \sum_{1 \leq j \leq 4} \tilde{u}_j^i \omega^j$ , nous obtenons

$\overline{D}'_{ij} = \sum_{1 \leq i_1, j_1 \leq 4} \tilde{u}'_i{}^{i_1} \tilde{u}'_j{}^{j_1} \overline{D}_{i_1 j_1}$ . D'après le Lemme 11.16, il est impossible de trouver  $h < 9$  combinaisons linéaires indépendantes des  $\overline{D}_k$  qui sont transformées entre elles.

Introduisons les cinq coefficients indépendants  $\overline{\Phi}_l$ ,  $l = 1, \dots, 5$ , de la forme quadratique  $\overline{\varphi}(\xi)$ , les neuf coefficients indépendants  $\overline{\Psi}_m$ ,  $m = 1, \dots, 9$ , de la forme bilinéaire  $\psi(\xi; \eta)$  et les cinq coefficients indépendants conjugués  ${}^c\overline{\Phi}_l$ ,  $l = 1, \dots, 5$ , de la forme quadratique  ${}^c\overline{\varphi}(\xi)$ . Pour  $k = 1, \dots, 9$ , chaque quantité  $\overline{D}_k$  étant combinaison linéaire des coefficients de courbure  $S^i_{jkl}$ , elle se décompose sous la forme

$$(12.17) \quad \overline{D}_k = H_k + K_k + L_k + \alpha_k S + \beta_k,$$

où  $H_k$  est une combinaison linéaire des 5 coefficients de  $\overline{\varphi}(\xi)$ , où  $K_k$  est une combinaison linéaire des 9 coefficients de  $\psi(\xi; \eta)$  et où  $L_k$  est une combinaison linéaire des 5 coefficients complexes conjugués de  ${}^c\overline{\varphi}(\eta)$ , *i.e.*

$$(12.18) \quad \begin{cases} H_k = \sum_{1 \leq l \leq 5} H_k^l \cdot \overline{\Phi}_l, \\ K_k = \sum_{1 \leq m \leq 9} K_k^m \cdot \overline{\Psi}_m, \\ L_k = \sum_{1 \leq l \leq 5} L_k^l \cdot {}^c\overline{\Phi}_l. \end{cases}$$

Quand on effectue sur les  $\omega^i$  une transformation linéaire  $\omega'^i = \sum_{j=1}^4 u'^i_j \omega^j$  conservant la forme  $\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i (\omega^i)^2$  (la matrice  $U'$  appartient à  $\text{SO}_{3,1}(\mathbb{C})$ ), les quantités  $\overline{D}_k$  subissent entre elles une substitution linéaire. D'après le Théorème 11.23, à travers une telle transformation linéaire, les 5 coefficients  $H_k^l$ , les 9 coefficients  $K_k^m$  et les 5 coefficients  $L_k^l$  subissent aussi entre eux une substitution linéaire.

**Lemme 12.19.** *Pour  $k = 1, \dots, 9$ , les quantités  $H_k$  sont nulles.*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que les  $H_k$  ne sont pas tous nuls. Soit  $r$  le rang de la matrice  $(H_k^l)_{\substack{1 \leq l \leq 5 \\ 1 \leq k \leq 9}}$  de taille  $9 \times 5$ . On a  $1 \leq r \leq 5$ . En renumérotant les  $\overline{D}_k$  si nécessaire, nous pouvons supposer que la sous-matrice  $(H_k^l)_{\substack{1 \leq l \leq 5 \\ 9-r+1 \leq k \leq 9}}$  constituée des  $r$  dernières lignes est de rang  $r$ .

L'entier  $h := 9 - r$  satisfait  $4 \leq h \leq 8$ . En effectuant des combinaisons linéaires (pivot de Gauss) sur les 9 équations (12.17), et en notant à nouveau  $\overline{D}_k$ ,  $k = 1, \dots, 9$ , les membres de gauche obtenus, on peut supposer que  $H_1 = \dots = H_h = 0$  et que les quantités  $\overline{D}_{h+1}, \dots, \overline{D}_9$  font intervenir les  $r = 9 - h$  quantités  $H_k$  indépendantes. Quand on effectue sur les  $\omega^i$  une transformation linéaire  $\omega'^i = \sum_{j=1}^4 u'^i_j \omega^j$  conservant la forme fondamentale  $\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i (\omega^i)^2$ ,

on a

$$(12.20) \quad \begin{cases} S' = S \\ K'_k = \sum_{1 \leq m \leq 9} \mu_k^m K_m \\ L'_k = \sum_{1 \leq l \leq 5} \nu_k^l L_l \\ \overline{D}'_k = K'_k + L'_k + \alpha_k S' + \beta_k, \quad \text{pour } k = 1, \dots, h, \\ \overline{D}'_k = \lambda_k^1 \overline{D}_1 + \dots + \lambda_k^h \overline{D}_h + \lambda_k^{h+1} \overline{D}_{h+1} + \dots + \lambda_k^9 \overline{D}_9, \quad 1 \leq k \leq 9. \end{cases}$$

Puisque les quantités  $\overline{D}_{h+1}, \dots, \overline{D}_9$  font intervenir les  $r$  quantités  $H_k$  indépendantes, en comparant la dernière ligne à l'avant-dernière ligne, nous déduisons que  $0 = \lambda_k^{h+1} = \dots = \lambda_k^9$  pour  $k = 1, \dots, 9$ , ce qui complète la preuve.  $\square$

Le raisonnement précédent permet de montrer que toutes les quantités  $L_k$ , et toutes les constantes  $\alpha_k, \beta_k$  sont aussi nulles. Ainsi :

**Lemme 12.21.** *Les quantités  $\overline{D}_k$  sont des combinaisons linéaires des coefficients de la forme bilinéaire  $\psi(\xi; \eta)$ .*

Rappelons que ces derniers coefficients sont combinaisons linéaires des coefficients  $\overline{S}_{ij}$  de la forme quadratique de Ricci sans trace, qui sont au nombre de 9. Notons, sans préciser davantage,

$$(12.22) \quad \overline{S}_1, \overline{S}_2, \dots, \overline{S}_9$$

ces 9 composantes. Ainsi, il existe des constantes  $\nu_{ij}^m \in \mathbb{C}$  telles que

$$(12.23) \quad \overline{D}_{ij} = \sum_{1 \leq m \leq 9} \nu_{ij}^m \overline{S}_m.$$

Considérons alors la forme quadratique

$$(12.24) \quad \sum_{i,j=1}^4 (\overline{D}_{ij} - \lambda \overline{S}_{ij}) \cdot \omega^i \omega^j = \sum_{i,j=1}^4 \left( \sum_{1 \leq m \leq 9} \nu_{ij}^m \overline{S}_m - \lambda \overline{S}_{ij} \right) \cdot \omega^i \omega^j.$$

En formant le déterminant  $9 \times 9$  de la matrice qui apparaît entre parenthèses et en choisissant pour  $\lambda$  une racine du polynôme caractéristique obtenu, nous pouvons supposer que les 9 coefficients

$$(12.25) \quad \overline{E}_k := \overline{D}_k - \lambda \overline{S}_k$$

sont linéairement dépendants.

**Lemme 12..** *Avec une telle racine  $\lambda$ , on a  $\overline{D}_{ij} = \lambda \overline{S}_{ij}$  pour tous  $i, j = 1, \dots, 4$ .*

*Démonstration.* Raisonnons comme dans la preuve du Lemme 12.19. Par hypothèse, les quantités  $\overline{E}_k$  sont combinaisons linéaires des coefficients de la forme bilinéaire  $\psi(\xi; \eta)$ , i.e.

$$(12.26) \quad \overline{E}_k = \sum_{1 \leq m \leq 9} K_k^m \cdot \Psi_m.$$

Notons  $r$  le rang de la matrice  $(K_k^m)_{\substack{1 \leq m \leq 9 \\ 1 \leq k \leq 9}}$  et supposons par l'absurde que  $1 \leq r \leq 8$ . L'entier  $h := 9 - r$  satisfait alors  $1 \leq h \leq 8$ . En effectuant des combinaisons linéaires, nous pouvons supposer que

$$(12.27) \quad 0 = \overline{E}_1 = \dots = \overline{E}_h,$$

et que les quantités  $\overline{E}_{h+1}, \dots, \overline{E}_9$  sont linéairement indépendantes.

□ Vérifier!

Quand on effectue sur les  $\omega^i$  une transformation linéaire  $\omega'^i = \sum_{j=1}^4 u'^i_j \omega^j$  conservant la forme  $\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i (\omega^i)^2$ , les quantités  $\overline{E}'_k$  subissent une substitution linéaire :

$$(12.28) \quad \begin{cases} \overline{E}'_k = \lambda_k^1 \overline{E}_1 + \dots + \lambda_k^h \overline{E}_h + \lambda_k^{h+1} \overline{E}_{h+1} + \dots + \lambda_k^9 \overline{E}_9 \\ \quad = \lambda_k^{h+1} \overline{E}_{h+1} + \dots + \lambda_k^9 \overline{E}_9. \end{cases}$$

Ces transformations montrent que l'espace engendré par les quantités  $\overline{E}_1, \dots, \overline{E}_h$  est invariant par toutes les transformations lorentziennes induites, en contradiction avec le Lemme 11.16. □

Nous pouvons enfin achever la preuve du Théorème 12.8. En effet, nous avons

$$(12.29) \quad \sum_{1 \leq i, j \leq 4} \overline{D}_{ij} \cdot \omega^i \omega^j = \lambda \sum_{1 \leq i, j \leq 4} \overline{S}_{ij} \cdot \omega^i \omega^j$$

ce qui démontre (12.10) en tenant compte de (12.12) et de (12.15). □

En conclusion, sous l'hypothèse provisoire du §8.47, la démonstration du Théorème 1.85 est terminée. □

#### RÉFÉRENCES

- [Bo1993] BOURGUIGNON, J.-P. : *Transport parallèle et connexions en géométrie et en physique*, dans : *1830–1930 : a century of geometry. Epistemology, history and mathematics*, L. Boi and J.-M. Salanskis Ed., Springer, Berlin, 1993, pp. 150–164.
- [Ca1902] CARTAN, É. : *Sur l'équivalence des systèmes différentiels*, C. R. Acad. Sc. **135** (1902), 781–783.
- [Ca1922] CARTAN, É. : *Sur les équations de la gravitation d'Einstein*, J. Math. pures et appl. **1** (1922), 141–203.
- [Ca1951] CARTAN, É. : *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, Gauthier-Villars, deuxième édition revue et augmentée, 1951.
- [Ca1952] CARTAN, É. : *Notice sur les travaux scientifiques*, Œuvres, Tome 1, Vol. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1952.
- [Ch1963] CHARON, J.E. : *15 Leçons sur la relativité générale, avec une introduction au calcul tensoriel*, Genève, Kister, 1963.
- [Da1887-96] DARBOUX, G. : *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 4 vol., Gauthier-Villars, Paris, 1887–1896.
- [DC1976] DO CARMO, M.P. : *Differential geometry of curves and surfaces*, Translated from the Portuguese, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976, viii+503 pp.
- [DC1992] DO CARMO, M.P. : *Riemannian geometry*, Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty. Mathematics : Theory & Applications, Birkhäuser, Boston, 1992, xiv+300 pp.

- [Do1994] DOMBROWSKI, P. : *150 years after Gauss' «disquisitiones generales circa superficies curvas»*, Astérisque **62**, Société mathématique de France, 1979.
- [Ei1915] EINSTEIN, B. : *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin 1915 (1915), 778–786.
- [Ei1916] EINSTEIN, B. : *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik **49** (1916), 769–822. Traduction française dans Œuvres choisies, Relativités I, Paris, Seuil, 1993, pp. 179–227.
- [Ga1966] GANTMACHER, F. : *Théorie des matrices*, traduit du russe par C. SARTHOU, 2 Vol., Paris, Dunod, 1966.
- [Ga1989] GARDNER, R.B. : *The method of equivalence and its applications*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics **58** (SIAM, Philadelphia, 1989), 127 pp.
- [Ga1827] GAUSS, C.F. : *Anzeige : Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Gött. Gel. Anz. (1827), 1761–68. Werke IV, 341–47.
- [Ga1828] GAUSS, C.F. : *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Comment. soc. Gött. **6** (1828), 99–146. Werke IV, 217–58.
- [HT1990] HUGHSTON, L.P. ; TOD, K.P. : *An introduction to general relativity*, London Mathematical Society Student Texts, No. 5, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Ko1972] KOBAYASHI, S. : *Transformation groups in differential geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 70, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1972.
- [Kr1994] KREYSZIG, E. : *On surface theory in  $E^3$  and generalizations*, Expo. Math. **12** (1994), 97–123.
- [Hi2003] HITCHIN, N. : *Projective geometry*, unpublished lecture notes, b3 course 2003 ; downloadable at : [www.??](http://www.??).
- [Le1900] LEVI-CIVITA, T. : *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana*, Rend. Circ. Mat. Palermo **42** (1917), 173–204.
- [LR1901] LEVI-CIVITA, T. ; RICCI, G. : *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Math. Ann. **54** (1901), 125–201.
- [Li1978] LIBERMANN, P. : Article *Géométrie différentielle* dans J. Dieudonné (Ed.), *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700–1900*, Paris, Hermann, 1978.
- [Li1996] LIBERMANN, P. : *Élie. Cartan (1869–1951)*, Travaux mathématiques, Fasc. VIII, 115–158. Sémin. Math. Luxembourg, Centre Univ. Luxembourg, 1996.
- [Me2004] MERKER, J. : *Commentaire philosophique du Theorema Egregium*, en préparation.
- [OL1995] OLVER, P.J. : *Equivalence, Invariance and Symmetries*. Cambridge, Cambridge University Press, 1995, xvi+525 pp.
- [Ri1854] RIEMANN, B. : *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Habilitationvortrag, 10 juni 1854. Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **13** (1868). *Œuvres complètes*, pp. 280–299, trad. J. HOÛEL, Paris, Gauthier-Villars, 1898.
- [Ri1898] RIEMANN, B. : *Œuvres mathématiques*, traduites en français par L. LAUGEL, avec une préface de C. HERMITE et un discours de F. KLEIN, Paris, Gauthier-Villars, 1898.
- [Sc1954] SCHOUTEN, J.A. : *Ricci calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1954.
- [Sp1970] SPIVAK, M. : *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol 2, ix+425 pp., Brandeis University, Publish or perish, Waltham, Mass., 1970.
- [St1983] STERNBERG, S. : *Lectures on differential geometry*, Chelsea, 1983.
- [St1889] STÄCKEL, P. : *Gauß als Geometer*, G.W. **10**, 2, Abhandlung 4, 1–123.

- [We1972] WEINBERG, S. : *Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity*, Wiley, New York, 1972.

**Systèmes en involution  
et parallélisme absolu :  
contribution d'Élie Cartan  
aux essais de théorie unifiant  
gravitation et électromagnétisme  
conduits par Einstein entre 1928 et 1931**

Joël Merker

Table des matières

1. Élie Cartan et la relativité générale .....	112.
2. Die GAUSSsche Strengung .....	117.
3. Impératifs hypothétiques d'exposition scientifique .....	120.
4. Repère mobile et connexions affines .....	122.
5. Géométrie du covariant bilinéaire de Darboux-Frobenius .....	127.
6. Géométrie du tenseur de torsion .....	141.
7. Le Fernparallelismus d'Einstein .....	143.
8. Tenseur de torsion et équivalence .....	150.
9. Historique initial de la correspondance entre Cartan et Einstein .....	150.
10. Les 22 équations d'Einstein .....	154.

[8 illustrations]

§1. ÉLIE CARTAN ET LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

**1.1. Unicité du tenseur d'Einstein, d'après Élie Cartan.** Bien que souvent référencée dans les traités de physique, la contribution d'Élie Cartan aux fondements théoriques de la relativité générale est essentiellement méconnue. Dès 1921, un an avant la publication de ses cinq célèbres notes aux *Comptes Rendus* qui annonçaient le grand mémoire divisé en trois parties [Ca1923b, Ca1924, Ca1925a] sur la théorie générale des connexions affines, Cartan s'attaquait aux équations d'Einstein dans un article ([Ca1922]) dense et difficile d'accès, publié seulement<sup>1</sup> en 1922. Il y démontrait que le tenseur  $E_{ij}$ , introduit par Einstein en 1916 ([Ei1916]) et apparaissant dans le membre dit « géométrique » des équations covariantes de la relativité générale :

$$E_{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

---

<sup>1</sup> « Ce Mémoire a été rédigé il y a plus d'un an. Depuis, j'ai publié en février et mars derniers, dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (t. 174, p. 437, 593, 734, 857, 1104), des Notes relatives à une conception géométrique nouvelle des espaces non euclidiens. L'idée fondamentale de ces Notes est en germe, sous une forme mi-abstraite, mi-géométrique, dans les premiers et les derniers numéros de ce Mémoire (1-6, 35-40). »



(où  $T_{ij}$  désigne le *tenseur énergie-impulsion* de la matière, où  $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  est la constante gravitationnelle et où  $c \approx 299 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$  est la vitesse de la lumière) était essentiellement **unique**, ce qui dévoilait un caractère remarquable de nécessité mathématique *a posteriori* de la théorie d'Einstein, déjà confirmée sur le plan physique par l'avance du périhélie de Mercure (1915)<sup>2</sup> et par l'incurvation des rayons lumineux au voisinage du soleil (Éclipse totale de 1919).

Ce résultat d'unicité, Cartan l'obtenait en effectuant la synthèse entre trois théories géométriques profondes :

- la fameuse «méthode d'équivalence» qu'il avait inventée dans les années 1904–1908 pour classifier les groupes de transformation de dimension infinie (problème difficile laissé en chantier par Lie), et qu'il appliquait ici pour la première fois aux variétés (pseudo)riemanniennes ;
- le calcul tensoriel, développé par Ricci, Schouten, Levi-Civita, Weyl, Bompiani, Bortolotti, Carpanese et d'autres géomètres européens, dont Einstein et Grossmann s'étaient inspirés ;
- la géométrie projective complexe, considérablement développée à la fin du dix-neuvième siècle par l'école allemande, notamment Plücker, Clebsch, Lipschitz, Klein, Mayer, Lie, Engel, Voss.

C'est des années 1917–1923 aussi que date la tentative par Hermann Weyl de synthétiser relativité générale et électromagnétisme grâce à une théorie à connexion métrique et à torsion nulle qui prolonge le cadre riemannien en autorisant l'étalon de longueur à subir lui aussi une déformation par transport parallèle le long des courbes. Sans s'en douter, les fondateurs du concept géométrique de connexion linéaire que sont Schouten, Levi-Civita et Weyl avaient déjà inspiré le géomètre français en 1921, car dans ce premier mémoire [Ca1922] antérieur aux grandes synthèses [Ca1923b, Ca1924, Ca1925a], les connexions riemanniennes sans torsion apparaissaient repensées et élevées à un caractère intrinsèque supérieur<sup>3</sup>, grâce aux techniques d'algèbre différentielle que Cartan avait élaborées dès les années 1900.

<sup>2</sup> Dès novembre 1915, dans une annonce aux *Sitzungsberichte* de la *Priussische Akademie der Wissenschaften*, Einstein résolut ce problème ouvert depuis près de cent-cinquante ans en mécanique céleste : expliquer la lente précession de la trajectoire elliptique de Mercure, planète la plus proche du Soleil, située à environ 55 millions de km (415 révolutions par siècle). L'écart entre la valeur expérimentale de l'avance du périhélie  $\Delta_{\text{exp}} \approx 5600$  secondes d'arc par siècle et celle  $\Delta_{\text{N}} \approx 5557''$  / siècle prédite par la théorie newtonienne fine des perturbations (Leverrier 1859 ; Newcomb 1882) était de  $43'' \pm 0,45$ , valeur qui coïncidait (à la précision des mesures près) avec le terme correctif obtenu par Einstein en calculant le champ de gravitation sphérique créé par le Soleil  $\Delta_{\text{E}} = \frac{6 \pi G M_{\text{SOL}}}{c^2 a (1-e^2)} \approx 43,03''$ .

<sup>3</sup> « Je n'utilise pas du tout le calcul différentiel absolu de Ricci ; ce n'est pas que j'en méconnaisse l'importance ; mais il n'est pas mauvais je crois de montrer que des méthodes absolument générales sont applicables à la théorie des invariants d'une forme différentielle quadratique » Cartan mentionne à plusieurs reprises la puissance englobante dans ses travaux ultérieurs sur les connexions affines, métriques, euclidiennes, riemanniennes, projectives, conformes, ou associées à des géométries de Klein quelconques.

**1.2. Courbure de Ricci et divergence covariante.** Présentons succinctement ce résultat d'unicité<sup>4</sup>. Considérons une variété pseudo-riemannienne de dimension quatre saisie dans des coordonnées locales  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  et équipée d'une pseudo-métrique infinitésimale  $ds^2 = \sum_{1 \leq k, l \leq 4} g_{kl}(x) dx^k dx^l$  de signature  $(-, -, -, +)$ , où les 10 fonctions  $g_{kl} = g_{lk}$  sont appelées « *potentiels de gravitation* » par les physiciens. Rappelons qu'en toute dimension  $n \geq 3$ , le *tenseur de Ricci* :

$$R_{ij} := \sum_{k=1}^n R_{ikj}{}^k$$

s'obtient en contractant le *tenseur de courbure de Riemann* :

$$R_{ijk}{}^l := \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^l + \sum_{p=1}^n \left( \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l - \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l \right).$$

( $1 \leq i, j, k, l \leq n$ ), lequel s'exprime classiquement en termes des dérivées d'ordre un et zéro des *coefficients de Christoffel*  $\Gamma_{ij}^k$  de la connexion dite *de Levi-Civita*

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n g^{pk} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{pj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{pi} - \frac{\partial}{\partial x^p} g_{ij} \right),$$

qui est l'unique connexion sans torsion compatible avec la (pseudo)métrique riemannienne, où  $g^{pq}$  désigne la matrice inverse de  $g_{kl}$ ; la *courbure scalaire* enfin s'exprime quant à elle en contractant le tenseur de Ricci

$$R := \sum_{1 \leq i, j \leq n} g^{ij} R_{ij}.$$

Le théorème d'unicité de Cartan énonce alors précisément que tout tenseur covariant à deux indices  $C_{ij}$  qui se transforme comme le tenseur métrique  $g_{kl}$  lors d'un changement arbitraire de coordonnées<sup>5</sup> et qui s'exprime comme une fonction des potentiels  $g_{kl}$  et de toutes leurs dérivées d'ordre un et deux :

$$C_{ij} = \text{Fonction}_{ij} \left( g_{\alpha\beta}, \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}, \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^m \partial x^n} \right),$$

où l'on suppose pour des raisons physiques que la dépendance en les dérivées d'ordre deux  $\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^m \partial x^n}(x)$  est *linéaire*, tout tenseur  $C_{ij}$  qui satisfait ces conditions est alors

<sup>4</sup> Le lecteur est renvoyé à [ADM2004] pour une exposition détaillée.

<sup>5</sup> Si  $x \mapsto \bar{x} = (\bar{x}^1(x), \dots, \bar{x}^n(x))$  désigne ce difféomorphisme local, en remplaçant les différentielles  $dx^k = \sum_{1 \leq k_1 \leq 4} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{k_1}} d\bar{x}^{k_1}$  dans la relation

$$ds^2 = \sum_{1 \leq k, l \leq 4} g_{kl}(x) dx^k dx^l = \sum_{1 \leq k_1, l_1 \leq 4} \bar{g}_{k_1 l_1}(\bar{x}) d\bar{x}^{k_1} d\bar{x}^{l_1} = d\bar{s}^2,$$

on voit que le tenseur métrique se transforme comme  $\bar{g}_{k_1 l_1}(\bar{x}) = \sum_{1 \leq k \leq 4} \sum_{1 \leq l \leq 4} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{k_1}} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^{l_1}} g_{kl}(x)$ , et donc la condition sur le tenseur  $C_{ij}$  requiert  $\bar{C}_{i_1 j_1} = \sum_{1 \leq i \leq 4} \sum_{1 \leq j \leq 4} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^{i_1}} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^{j_1}} C_{i, j}$ .

nécessairement une combinaison linéaire incorporant le tenseur de Ricci, la courbure scalaire que multiplie le tenseur pseudométrique et le tenseur pseudométrique lui-même :

$$C_{ij} = a R_{ij} + b R g_{ij} + c g_{ij},$$

avec des constantes réelles  $a$ ,  $b$  et  $c$  arbitraires. On vérifie de plus par le calcul que les tenseurs une fois covariant et une fois contravariant<sup>6</sup> de la forme :

$$E_i^j := a \left( R_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j R \right) + b \delta_i^j,$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes réelles, sont les seuls qui satisfont les quatre identités « géométriques »<sup>7</sup> :

$$0 = E_i^j{}_{;j} =: \frac{\partial}{\partial x^j} E_i^j - \Gamma_{ij}^l E_l^j + \Gamma_{lj}^i E_i^l$$

(on sous-entend maintenant les sommations sur les paires d'indices répétés en haut et en bas) qui découlent nécessairement du fait que le tenseur énergie-impulsion  $T_{ij}$  doit satisfaire la loi « physique » de conservation (annulation de la divergence covariante) :

$$T_i^j{}_{;j} = 0.$$

C'est donc bien le tenseur d'Einstein  $R_i^j - \frac{1}{2} \delta_i^j R$  que l'on retrouve, avec le terme supplémentaire  $\delta_i^j$  dans  $E_i^j$  correspondant à la troisième composante  $g_{ij}$  de  $C_{ij}$ , que l'on pouvait d'ailleurs ajouter gratuitement à l'avance, puisque, d'après un théorème classique dû à Ricci — que Levi-Civita réinterpréta en disant que le transport parallèle conserve les longueurs —, toutes les dérivées covariantes des  $g_{ij}$  :

$$g_{ij;k} = \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \Gamma_{kj}^l g_{li} \equiv 0$$

s'annulent identiquement. Ici, le coefficient  $b$  (en général supposé nul dans les applications physiques) s'identifie à la fameuse *constante cosmologique*  $\Lambda$  qu'Einstein avait ajoutée en 1917 aux équations de la relativité générale :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} - \Lambda g_{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ij},$$

dans le but de rendre sa théorie compatible avec l'idée (contredite par la découverte par Hubble en 1929 de l'expansion intergalactique) d'un univers statique (*voir* [Ei1993b], pp. 85–129).

**1.3. Heuristique einsteinienne.** Pour se convaincre de la plausibilité du théorème d'unicité de Cartan, il est facile de vérifier qu'à cause des symétries indicelles dont jouit le tenseur de Riemann :

$$\begin{cases} 0 = R_{ijk}{}^l + R_{kij}{}^l + R_{jki}{}^l, \\ 0 = R_{ijk}{}^l + R_{jik}{}^l, \end{cases}$$

<sup>6</sup> L'élévation de l'indice  $j$  grâce à l'inverse  $g^{pq}$  du tenseur métrique définit  $C_i^j := g^{jp} C_{ip}$  et de même  $E_i^j := g^{jp} E_{ip}$ .

<sup>7</sup> Les dérivées covariantes d'un tenseur  $A_i^j$  une fois covariant et une fois contravariant sont définies par :  $A_i^j{}_{;k} := \frac{\partial}{\partial x^k} A_i^j - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l A_l^j + \sum_{l=1}^n \Gamma_{lk}^j A_i^l$ .

on ne peut obtenir par contraction de deux indices que le tenseur de Ricci  $R_{ij}$ , son opposé  $-R_{ij}$  ou le tenseur nul, et c'est essentiellement ainsi qu'Einstein, dans sa synthèse finale de 1916, argumentait en faveur du choix naturel de ce tenseur pour intervenir dans les équations de la gravitation relativiste :

[...] pour le champ de gravitation en l'absence de matière, il est naturel de chercher à annuler le tenseur symétrique  $B_{\mu\nu}$  déduit du tenseur  $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$ . [...] avec le choix du système de coordonnées que nous avons fait\*, ces équations s'écrivent dans le cas du champ libre de matière :

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = 0 \\ \sqrt{-g} = 1. \end{cases}$$

Il faut remarquer que le choix de ces équations comporte un minimum d'arbitraire. Car, en dehors de  $B_{\mu\nu}$ , il n'existe pas de tenseur de rang 2 formé des  $g_{\mu\nu}$  et de leurs dérivées qui ne comporte aucune dérivée d'ordre supérieur à deux et qui soit linéaire en fonction de ces dernières (à proprement parler, cela ne peut être affirmé que du tenseur  $B_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta})$  où  $\lambda$  est une constante. Mais si on écrit que ce tenseur est égal à 0, on aboutit de nouveau aux équations  $B_{\mu\nu} = 0$ )\*\*. [Ei1993a], p. 209.

Treize ans plus tard, Einstein développait ce qui allait devenir la tentative la plus connue en direction d'une théorie unitaire des champs<sup>8</sup>, à savoir : le *Fernparallelismus* (« parallélisme éloigné »), alias *parallélisme absolu*. Dans ce contexte, on dispose de **16** = **4** × **4** quantités fondamentales : les composantes des « *tétrades* », qui sont constituées par définition d'un système de **4** champs de vecteurs linéairement indépendants en tout point d'un espace à **4** dimensions. Ce nombre **16** est supérieur de **6** unités à celui — égal à **10** — des potentiels de gravitation  $g_{ij}$ , et — hasard numérique ou coïncidence profonde ? —, le nombre additionnel **6** est justement égal au nombre des composantes des champs électrique **E** et magnétique **B** de la théorie de Maxwell. Bien que le tenseur de courbure de Riemann s'annule identiquement à cause de l'absoluité du parallélisme, il existe un autre tenseur fondamental — en général non nul — le *tenseur de torsion* (qui s'annule en relativité

\* Dans le mémoire d'Einstein, la normalisation de l'élément de (pseudo)volume  $\sqrt{-g} = 1$  fait disparaître un terme sur deux dans l'expression du tenseur de Riemann.

† « [...] für das materiefreie Gravitationsfeld das Verschwinden des aus dem Tensor  $B_{\mu\sigma\tau}^\rho$  abgeleiteten symmetrischen Tensors  $B_{\mu\nu}$  zu verlangen. Diese Gleichungen lauten [...] bei der von uns getroffenen Wahl des Koordinatensystem für das materiefreie Feld

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = 0 \\ \sqrt{-g} = 1. \end{cases}$$

Es muß darauf hingewiesen werden, daß der Wahl dieser Gleichungen ein Minimum von Willkür anhaftet. Denn es gibt außer  $B_{\mu\nu}$  keinen Tensor zweiten Ranges, der aus den  $g_{\mu\nu}$  und deren Ableitungen gebildet ist, keine höheren als zweite Ableitungen enthält und in letzteren linear ist (eigentlich läßt sich dies nur von dem Tensor  $B_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta})$  behaupten, wobei  $\lambda$  eine Konstante ist. Setz man jedoch diesen = 0, so kommt man wieder zu den Gleichungen  $B_{\mu\nu} = 0$ .) ([Ei1916], 803–804.)

<sup>8</sup> C'est le Saint-Graal de la physique du vingtième siècle !

générale par définition de la connexion de Levi-Civita), et ce tenseur se substitue au tenseur de Riemann pour occuper la place du tenseur fondamental dont découlent toutes les informations physico-géométriques. On verra dans la Section ?? comment Einstein répètera à cette occasion, au sujet du tenseur de torsion, les analyses heuristiques concernant les symétries indicielles et les contractions tensorielles qui lui avaient ouvert la voie vers les équations de la relativité générale.

Auparavant, nous devons introduire le concept de connexion (Section ??), re-définir le covariant bilinéaire de Frobenius-Darboux dont Cartan fit un usage systématique parce qu'il est doté d'un caractère invariant (Section ??), et exposer la géométrie du tenseur de torsion. En guise de prologue, nous commencerons par une courte réflexion épistémologique inspirée par Gauss.

## §2. DIE GAUSSSCHE STRENGE

**2.1. Le levier symbolique.** À cause de la grande difficulté qu'il y a à exposer pleinement la signification des notions géométriques, on se contente généralement de présenter seulement de manière formelle ou axiomatique les concepts de connexion, de dérivée covariante, de courbure, de torsion, ainsi que les identités de type Bianchi auxquelles satisfont les dérivées covariantes des tenseurs fondamentaux. La brève présentation des quantités  $g_{kl}$ ,  $g^{pq}$ ,  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $R_{ijk}^l$ ,  $R_{ij}$ ,  $R$  et  $E_{ij}$  que nous nous sommes autorisée plus haut souffre aussi de cette imperfection. À vrai dire, par l'effet d'un penchant au calcul auquel la pensée est entraînée dès que le langage symbolique s'introduit dans les raisonnements, l'« essence du tensoriel » incite à l'« algébrisation des contenus ».

Il est dans la nature des mathématiques des temps modernes (en contraste avec celles de l'Antiquité) que nous possédons un levier sous la forme de notre langage symbolique et de notre terminologie, grâce à quoi les raisonnements les plus complexes sont réduits à un certain mécanisme. De cette manière, la science a gagné infiniment en richesse, mais elle a autant perdu en beauté et en caractère, comme on le fait ordinairement dans la pratique. Combien ce levier est-il fréquemment appliqué de manière purement mécanique ! bien que l'autorisation de l'employer implique, dans la plupart des cas, certaines hypothèses passées sous silence\*.

Gauß, Werke, **10**, 1, p. 434.

**2.2. Die Gaussche Strenge.** Cependant, comme l'exigeait Gauss lui-même dans cette lettre du 1<sup>er</sup> septembre 1850 adressée à son fidèle interlocuteur Schumacher (où il critiquait le peu de souci de rigueur que Prehn manifestait dans un mémoire sur les séries divergentes paru la même année dans le *Journal de Crelle*) :

---

\* « Est ist der Character der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Alterthum), dass durch unsere Zeichensprache und Namengebungen wir eine Hebel besitzen, wodurch die verwickelsten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reducirt werden. An Reichthum hat dadurch die Wissenschaft unendlich gewonnen, an Schönheit und Solidität aber, wie das Geschäft gewöhnlich betrieben wird, eben so sehr verloren. Wie oft wird jener Hebel eben nur mecanisch angewandt, obgleich die Befugniss dazu in den meisten Fällen gewisse stillschweigende Voraussetzungen implicirt. »

Chaque fois que l'on utilise le calcul et chaque fois qu'on emploie des concepts, j'exige que l'on reste toujours conscient des stipulations originelles [ursprünglichen Bedingungen], et que tous les résultats du mécanisme ne soient jamais considérés comme des propriétés en dehors d'une autorisation claire \*\*. *Ibidem.*

Ainsi s'exprime la rigoureuse et austère sévérité mathématique de Gauss (die *GAUSSsche Strenge*) : jamais acte de calcul ne doit être engagé qui ne soit encadré au préalable par des conditions précises quant à l'extension de ses significations. Par exemple, quel que soit le sens qu'on donne aux séries divergentes en choisissant un procédé de sommation déterminé, de type Césaro, Fejér ou Toeplitz, il faut impérativement justifier par des propositions dûment établies à partir des définitions initiales que l'on peut effectuer toutes les opérations algébriques élémentaires sur les séries ainsi « apprivoisées », et notamment la multiplication ; on ne pourrait certainement pas se contenter d'exécuter ces opérations au prétexte qu'elles sont justifiées pour les séries convergentes. Tout calcul que l'on transfère graduellement à des objets qui s'élèvent en généralité expose en effet à des non-sens éventuels. Ainsi l'addition, la soustraction et la multiplication entre séries divergentes doit-elle conserver la mémoire des processus sommatoires qui ont été choisis pour leur donner un sens. C'est donc la première interprétation immédiate de cette citation de Gauss : nécessité de se conformer au sens interne ; nécessité de respecter les bornes définitionnelles ; sous peine d'incohérence.

**2.3. Science et conscience coprésente.** Mais au-delà, Gauss évoque sans la développer une pensée plus profonde qui nous est suggérée par le membre de phrase « j'exige que l'on reste toujours conscient des stipulations originelles ». On sait combien il est délicat et malaisé de répondre à cet impératif de « conscientisation continue du sens », surtout lorsqu'il s'agit de calculs de type tensoriel qui sont assez longs ou considérables pour égarer l'intuition géométrique ou noyer l'esprit de synthèse, un peu comme si les « masses-pensées » chères à Riemann devaient se réserver à tout instant l'énergie de « se rendre présentes les totalités conceptuelles » ; toutefois, l'austérité ou la rigueur gaussienne (die *GAUSSsche Strenge*) sont là pour nous rappeler les *impératifs catégoriques de la pensée mathématique*, similaires aux impératifs que Kant théorisa dans sa *Critique de la raison pratique*, c'est-à-dire des règles qui sont constituées par des principes scientifiques abstraits et qui sont désignées par des devoirs.

**2.4. L'impératif catégorique de la morale kantienne.** D'après Kant, l'impératif moral est un *impératif catégorique* : il commande absolument la poursuite d'une fin morale, en elle-même et pour elle-même, et il détermine la volonté en indiquant une loi objective de la raison : la *loi morale*, valable universellement pour tout être raisonnable en tant que tel. D'une portée inférieure, les *impératifs hypothétiques* ne se rapportent qu'à la nécessité pratique d'une action considérée comme *moyen* de parvenir à quelque chose, la *fin* visée incitant à recourir à la technique, à l'habileté,

---

† « Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Calculs, bei allen Begriffsverwendungen sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewusst bleiben, und alle Producte des Mechanismus niemals über die klare Befugniss hinaus als Eigenthum betrachten. »

à la prudence, à la méthode et au pragmatisme. Quant à lui, l'impératif catégorique représente une action comme nécessaire pour elle-même, cette action n'étant subordonnée en tant que moyen à aucune fin déterminante étrangère à son principe. Il commande de se conformer aux actions qui sont bonnes en elles-mêmes, et par l'effet d'une nécessité inconditionnée et véritablement objective, il soumet la volonté à une *loi morale* interne et autonome que Kant énonce comme suit : « *Agis uniquement d'après la maxime qui fait que tu peux vouloir en même temps qu'elle devienne une loi universelle parmi les hommes* ». Est donc *immorale* toute action qui, si on la supposait perpétrée par tous les hommes universellement en même temps, conduirait à une perte dommageable d'équilibre de la communauté des hommes, à un chaos des mœurs, aux conflits, au crime, à la mort. L'impératif catégorique kantien énonce donc une règle absolue et universelle propre à déterminer l'action morale en toutes circonstances : il suffit de tester la moralité d'une action en s'imaginant les conséquences d'une universalisation pour se décider en conséquence. Ainsi, le catégorique domine et se ramifie dans l'hypothétique.

**2.5. Impératifs catégoriques de la pensée mathématique.** En mathématiques, l'impératif catégorique — si tant est qu'on puisse lui donner un sens tout analogue au sens kantien — doit nécessairement s'exprimer dans une pure abstraction immanente, parce que la matière même des mathématiques transcende les conditions biologiques ou neuronales de son exploration effective<sup>9</sup>. De plus les impératifs se démultiplient et se pluralisent pour se disposer en un tripôle fondamental abstrait qui n'influe pas aussi directement la volonté que dans le champ de la raison pratique.

□ D'abord l'exigence absolue de **cohérence** : non-contradiction, vigilance architecturale, et vérité des raisonnements.

□ Ensuite, le devoir pérenne et indéfectible de **recherche** : indéfini potentiel, ouverture dynamique, et *in situ* de l'Inconnu.

□ Enfin, l'admission de la **nouveauté** comme critère et règle de participation : absorption effective, progrès (im)perceptibles, et enrichissement croissant des arborescences.

Trois impératifs, donc, inscrits dans une relation triangulaire où les hiérarchies sont interchangeableables et où les connexions sont cycliques. Au centre du cercle circonscrit, l'exigence gaussienne de présence permanente de la pensée conceptuelle comme conscience : liée à chacun des trois pôles, elle exerce sa capacité d'activation en mesurant sa force au champ opaque de l'ouverture.

□ Vérification constante de rigueur.

□ Maintien absolu des questions indécidées.

---

<sup>9</sup> D'autres langages imprévisibles ou approches dont la teneur reste insoupçonnée se révéleront probablement plus adéquats pour le traitement et la compréhension de problèmes encore ouverts à ce jour : tel est le *credo* fondamental en l'être-disponible de la chose mathématique que partagent tous les mathématiciens.

- Évaluation conceptuelle des apports.

### §3. IMPÉRATIFS HYPOTHÉTIQUES D'EXPOSITION SCIENTIFIQUE

**3.1. Incompressibilité des actes de pensée.** Les actes que requiert l'appropriation individuelle par la pensée sont innombrables et complexes — c'est un fait — et pour cette raison, il n'y a pas d'autre « méthode » universelle pour entrer dans un domaine mathématique ou pour comprendre un théorème que de méditer un très grand nombre de fois les concepts et les arguments, aussi bien dans un ordre hypothético-déductif structuré que dans le libre chaos de contemplations décousues et inconsistantes<sup>10</sup>. Comme le notifie l'exigence gaussienne, il faut constamment redéployer dans sa conscience la trame métaphysique et motivationnelle d'une théorie, interroger ce qui demeure mystérieux dans l'intention centrale et chercher à dominer les interprétations hésitantes qui se nichent dans les calculs. L'économie tout apparente qu'apporte le levier symbolique doit être contrebalancée par un réveil conscient des questions et des obstacles qui perdurent au sein des architectures achevées. *La rigueur est une pensée qui questionne, y compris quand tout n'est que réponse.*

**3.2. Compressions de l'écriture.** En raison de ces complexités, il n'est pas aisé de transmettre par écrit la pensée mathématique, d'autant plus que pour l'auteur qui a édifié un ouvrage, la compréhension est parvenue à un stade organique, survolant, synthétique et global. Les textes publiés n'enregistrent ni les gestes, ni les revirements intuitifs, ni les actes d'entendement, ni les interrogations effaçables, ni les réflexes intuitifs, ni les diverses bouées de sauvetage cérébrales que chaque individu élabore face à des mathématiques souvent abstruses. On le sait : les textes sélectionnent, ordonnent, complimentent, lyophilisent et syncopent.

**3.3. Difficulté légendaire du style de Cartan.** Cartan par exemple manifeste rarement le besoin dans ses articles de recherche de définir ou de redéfinir soigneusement les concepts qu'il utilise : ils sont considérés comme clairs ou connus. Aussi le lecteur est-il souvent contraint de reconstituer pour lui-même, sur des feuilles séparées, les notions, les arguments et les illustrations nécessaires à une compréhension achevée.

Mais comme en témoigne son style ferme et charpenté, il est absolument hors de doute que Cartan est conscient de toutes les *stipulations originelles* des concepts qu'il utilise ou introduit. Dans ses correspondances avec Weyl et avec Einstein, il est capable à tout moment d'explicitier les points élémentaires qui échappent à ses interlocuteurs. Cartan n'écrit de manière dense et elliptique que parce que ses résultats sont riches, multiples, amples. Pour les saisir, le lecteur doit explicitier les sous-entendus qui déroutent la compréhension.

**3.4. Cartan géomètre conceptuel.** Parfois, dans certains articles et dans les ouvrages rédigés à partir de ses notes de cours, Cartan expose de manière accessible les significations géométriques des objets qu'il introduit, par exemple dans les trois mémoires historiques [Ca1923a, Ca1924, Ca1925a] sur la théorie des connexions,

<sup>10</sup> D'après Peter Pflug, chaque mathématicien se constitue quelques béquilles intuitives jetables pour progresser avec ses congénères en boitant dans un monde mathématique disproportionné.



et dans les deux ouvrages de synthèse [Ca1925b, Ca1928] en géométrie riemannienne qu'il a rédigés lorsqu'il enseignait à la Faculté des Sciences de Paris.

Le fascicule IX du *Mémorial des sciences mathématiques* et surtout les *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* contiennent un exposé de la géométrie riemannienne classique, où je me suis efforcé, avec le minimum d'appareil analytique, de dégager les réalités géométriques trop souvent masquées par de savantes formules. [Ca1953], I, 1, pp. 73–74.

Effectivement, dans ses ouvrages didactiques (dont certains furent rédigés par ses étudiants directement à partir de ses enseignements), Cartan réserve une place de choix aux paragraphes qu'il consacre à décrire clairement le géométral.

**3.5. Géométrie littérale et figures mentales.** Cependant, le lecteur contemporain ne trouve pratiquement aucune figure imprimée qui l'aiderait à conformer son intuition au concept, et puisqu'il en va de même dans les œuvres de Lie, et dans la grande majorité des articles de recherche en géométrie qui furent publiés à ces époques ou qui paraissent actuellement, le lecteur presque désarmé doit se contenter de ce que ces textes offrent au moins *le littéral de la géométrie*, c'est à dire un langage précis se rapportant à des illustrations raffinées mais cependant virtuelles, que ces grands géomètres parviennent vraisemblablement à tracer dans leur esprit avec rigueur, sans néanmoins éprouver le devoir de les inscrire sur le papier imprimé, parce qu'ils bénéficient de formations complètes aux géométries euclidienne, projective, conforme, et qu'ils ont médité un très grand nombre de fois le lien qui unit la pensée abstraite au réservoir physique du monde figural.

**3.6. Impossible codification des illustrations ?** C'est un fait singulier du développement historique de la géométrie, un trou béant et presque inexplicable dans la pratique mathématique : nulle mise au point n'a jamais été décidée en commun pour codifier rigoureusement l'insertion du diagrammatique dans le texte formel. Trop grande richesse des intuitions créatrices, trop grande variabilité des tracés, trop grande puissance d'appréciation esthétique du système visuel, ou trop grande pauvreté du croquis mathématique exécuté à la sauvette, ou même encore : volonté systématique de bannir toute illustration comme susceptible de détourner l'attention vigilante de la rigueur par une séduction intempestive de l'appareil perceptif, quelles qu'en soient les causes, rien ne s'est jamais présenté dans l'histoire des mathématiques, en tant que nécessité ressentie de manière purement interne, comme un devoir de codifier spécifiquement le géométral, au même titre et avec la même dignité que l'on a graduellement donné de l'ampleur à la méthode axiomatique comme le fit Bourbaki. Visiblement, la complexité objective de l'appropriation subjective des concepts n'est pas encore suffisamment comprise ou étudiée, tant sur le plan biologique que sur un plan purement spéculatif.

**3.7. Impératifs hypothétiques d'exposition scientifique.** Ainsi, les impératifs catégoriques de la pensée mathématique doivent se diviser et se ramifier en tant qu'impératifs hypothétiques, parce que l'activité mathématique humaine soumet volonté, décision et orientation à des circonstances aléatoires. On se limitera ici à énoncer quelques principes concernant le problème de l'écriture, de l'exposition et de la

mise en forme de la pensée mathématique, l'« hypothèse » de l'impératif en question, autrement dit l'orientation en vue d'une fin déterminée n'étant autre que la volonté de parvenir à un style mathématique limpide pour la pensée du lecteur.

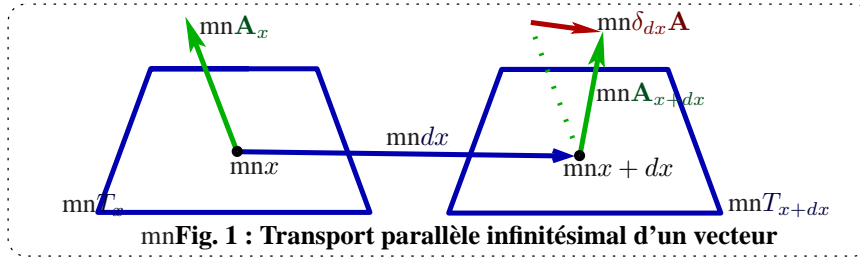
- Respecter rigoureusement la successivité, la progressivité et la continuité des raisonnements.
- Illustrer les constructions par des figures.
- Piloter au mieux l'intuition du lecteur.
- Écrire l'ignorance.
- Formuler de la pensée littérale au sein même des paragraphes les plus techniques.
- Détailler scrupuleusement les calculs.
- Virtualiser et anticiper.
- Expliquer, commenter et interpréter les énoncés de théorèmes.
- Charpenter la clarté rhétorique.
- Rappeler et redéfinir les notions qui interviennent dans un énoncé.
- Formuler des questions ouvertes.
- Expliciter des motivations.
- Articuler soigneusement les moments d'opposition dialectique.
- Décrire l'architecture des démonstrations en langage ordinaire.
- Temporaliser le cours des démonstrations en utilisant les temps des verbes.

**3. Transition.** Ce texte étant destiné aussi bien à des historiens et philosophes des sciences qu'à des géomètres, nous nous efforcerons dans la suite de présenter fidèlement les concepts centraux du parallélisme absolu, et tout particulièrement la notion de *torsion* que nous diagrammatiserons, avant d'entamer une *microlecture spéculative* des échanges épistolaires entre Einstein et Cartan qui les ont conduits, l'un avec un tempérament de physicien, l'autre avec une expérience de géomètre, à rechercher tous les systèmes possibles d'équations aux dérivées partielles d'ordre deux que l'on peut former avec le tenseur de torsion et qui seraient susceptibles d'unifier gravitation et électromagnétisme. Commençons par un rappel de la théorie des connexions affines que Cartan a élaborée en utilisant le concept crucial, invariant par changement de coordonnées, de forme différentielle.

#### §4. REPÈRE MOBILE ET CONNEXIONS AFFINES

**4. Concept géométrique initial de connexion.** Dans un espace géométrique à  $n$  dimensions équipé de coordonnées numériques locales  $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ , définir une *connexion affine*, c'est choisir une loi qui permet de transférer tous les vecteurs  $\mathbf{A}_x$  basés en un point  $x$  vers des vecteurs  $\mathbf{A}_{x+dx}$  basés en un point  $x + dx$  infiniment proche de  $x$ , la loi de transport dépendant *en toute généralité* de la *vection infinitésimale*  $dx = (dx^1, \dots, dx^n)$  :

$$\mathbf{A}_{x+dx} - \mathbf{A}_x = \text{linéaire en } \mathbf{A}_x \text{ et d'ordre 1 en } dx.$$



L'expression analytique de la différence (infinitésimale)  $A^\mu|_{x+dx} - A^\mu|_x$  entre la  $\mu$ -ième composante de  $\mathbf{A}$  doit donc faire apparaître à la fois les composantes de  $\mathbf{A}_x$  et celles de  $dx$  :

$$\begin{aligned} A^\mu|_{x+dx} - A^\mu|_x &= \delta_{dx}(A^\mu) \\ &= \Delta_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta, \end{aligned}$$

dans une double somme où les  $n^3$  symboles  $\Delta_{\alpha\beta}^\mu = \Delta_{\alpha\beta}^\mu(x)$  sont des fonctions appelées *coefficients de Christoffel* de la connexion<sup>11</sup>, et qui la caractérisent de manière univoque. On dit alors que le vecteur  $A^\mu + \Delta_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta$  est le résultat du *transport parallèle* du vecteur  $A^\mu$  dans la direction  $dx$ , le terme perturbateur infinitésimal  $\Delta_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta$  indiquant comment doit être modifié  $A^\mu$  d'un point de vue quantitatif.

<sup>11</sup> Dans l'introduction de [Ca1923a], Cartan montre par un argument heuristique élémentaire que si l'on souhaite transporter des vecteurs au moyen d'une loi qui soit *invariante par changement de coordonnées*, une telle expression est nécessaire. En effet, si dans un système donné de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ , on convient — comme pour le parallélisme affine standard — que deux vecteurs basés en deux points infiniment proches  $x$  et en  $x + dx$  sont « parallèles » s'ils ont exactement les mêmes coordonnées  $(A^1, \dots, A^n)$ , une telle convention cesse de valoir dès lors que l'on effectue une transformation ponctuelle quelconque  $\bar{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$ , puisque les deux vecteurs égaux  $A^\mu|_x$  et  $A^\mu|_{x+dx}$  basés en  $x$  et en  $x + dx$  sont alors transformés en les deux vecteurs :

$$\begin{aligned} \bar{A}^\mu|_{\bar{x}} &:= \sum_{1 \leq \mu \leq n} \frac{\partial f^i}{\partial x^\mu}(x) A^\mu|_x \\ \bar{A}^\mu|_{\bar{x}+d\bar{x}} &:= \sum_{1 \leq \mu \leq n} \frac{\partial f^i}{\partial x^\mu}(x + dx) A^\mu|_{x+dx} \\ &= \sum_{1 \leq \mu \leq n} \left( \frac{\partial f^i}{\partial x^\mu}(x) + \sum_{1 \leq \nu \leq n} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^\mu \partial x^\nu}(x) dx^\nu \right) A^\mu|_x \end{aligned}$$

qui sont en général distincts, leur *différence* étant effectivement de la forme générale :

$$\bar{A}^\mu|_{\bar{x}+d\bar{x}} - \bar{A}^\mu|_{\bar{x}} = \sum_{1 \leq \mu \leq n} \sum_{1 \leq \nu \leq n} \Delta_{\mu\nu}^i dx^\nu A^\mu|_x.$$

Mais on vérifie ensuite par un calcul similaire que ce type d'expression est préservé lorsqu'on réapplique un changement quelconque de coordonnées  $\bar{\bar{x}} = \bar{g}(\bar{x})$ , ce qui montre alors que le concept de connexion est adéquat. Autrement dit, l'acte d'*invariantisation conceptuelle* qui a été nécessaire pour se libérer de l'arbitraire d'une convention inadéquate a le mérite de converger ici dès sa première mise en œuvre, bien que dans d'autres contextes mathématiques, les invariants structuraux ne se révèlent pas forcément dès le premier test que l'on effectue « en recherche de cohérence ». Mais ici, l'invariance complète de la formule donnant le transport se révèle dès premier acte d'invariantisation parce que le changement de coordonnées est arbitraire.

Ici, ce concept classique de connexion linéaire — dû à Levi-Civita dans un cadre riemannien et prolongé ensuite par Weyl — n'a trait qu'à la seule structure infinitésimale de l'espace de base qui soit intrinsèquement linéaire, celle qu'on appelle en géométrie différentielle moderne la *structure d'espace tangent*, et qui n'implique que des différentiations partielles et des approximations d'ordre 1. En effet, la linéarité imposée par rapport à  $A$  de la formule donnant  $\delta_{dx}(A^\mu) = \Delta_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta$  permet immédiatement de définir une application de « *transport orienté par  $dx$*  » entre deux espaces tangents infiniment voisins :

$$\text{Transport}_{dx} : T_x \longrightarrow T_{x+dx},$$

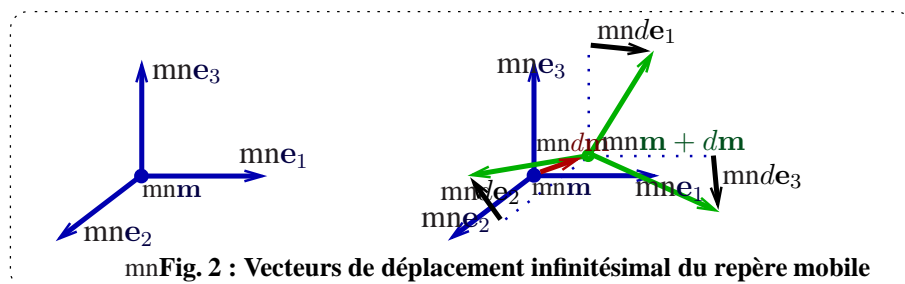
lesquels sont ainsi « connectés » entre eux par la *connexion*. Ensuite, si l'on compose l'un à la suite de l'autre tous les petits transports associés à tous les éléments infinitésimaux d'une courbe continue allant d'un point  $p$  à un point  $q$ , on obtient des isomorphismes linéaires macroscopiques :

$$\text{Transport}_{p,q}^\gamma : T_p \longrightarrow T_q,$$

qui dépendent *a priori* de la courbe que l'on choisit pour aller de  $p$  à  $q$ .

Au-delà de ce concept, l'exigence de généralité pousse, lorsqu'on passe des structures vectorielles aux structures affines, à ériger une théorie permettant de connecter entre elles les structures affines infinitésimales qui existent naturellement sur les espaces rectilignes de points à  $n$  dimensions. Dans la théorie générale du repère mobile érigée par Cartan, le déplacement parallèle portera ainsi non seulement sur un système de  $n$  vecteurs linéairement indépendants qui constitueront une base mobile grâce à laquelle on pourra représenter tout vecteur quelconque, mais aussi sur un point spécial, l'*origine* du repère, qui pourra lui aussi être connecté à un point unique dans un espace affine voisin — comme tout autre point d'ailleurs — lorsque sera décidée une vexion infinitésimale orientée quelconque.

**4. Théorie générale des connexions via le repère mobile.** Considérons donc un *champ de repères affines* sur  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire une famille de  $n$  vecteurs  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  toujours linéairement indépendants centrés en un point  $\mathbf{m}$  qui décrit  $\mathbb{R}^n$  ; l'orientation et les angles relatifs des vecteurs varient, comme les doigts mobiles de la main emportés dans l'espace.



mnFig. 2 : Vecteurs de déplacement infinitésimal du repère mobile

L'origine  $\mathbf{m}$  et le repère dépendent de  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ , tandis que les vecteurs  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  dépendent éventuellement aussi<sup>12</sup> d'un certain nombre  $r$  de paramètres auxiliaires  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ; le nombre  $r$  ne peut excéder  $n^2 =$  la dimension du groupe linéaire général  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  transformant les systèmes de vecteurs.

En mathématiques, le principe général de la philosophie infinitésimale postule que toute l'information locale concernant une structure géométrique donnée, lisse et finie doit pouvoir résider dans la connaissance de ses différentielles, ici égales à :

$$\begin{aligned} \delta_{dx} \mathbf{m} &:= \mathbf{m}_{x+dx} - \mathbf{m}_x \\ \delta_{dx} \mathbf{e}_i &:= (\mathbf{e}_i)_{x+dx} - (\mathbf{e}_i)_x, \end{aligned}$$

et qui expriment la *différenciation élémentaire de l'être géométrique du repère mobile par rapport à lui-même*, lorsqu'il est entraîné dans son mouvement par  $x$ . Mais grâce à la présence déjà donnée d'un repère au point  $\mathbf{m}$ , une *auto-expression par soi de la différence à soi* est immédiatement possible : les  $1 + n$  vecteurs de différentiations  $\delta_{dx} \mathbf{m}$  et  $\delta_{dx} \mathbf{e}_1, \dots, \delta_{dx} \mathbf{e}_n$  peuvent (et doivent<sup>13</sup>) être décomposés dans le système de référence d'origine  $\mathbf{m}$ , comme le suggère la partie droite de la figure tridimensionnelle ci-dessus, dans laquelle le repère ambiant (dessiné en bleu) encadre les quatre petits déplacements infinitésimaux. Ainsi, en décomposant  $\delta_{dx} \mathbf{m}$  et  $\delta_{dx} \mathbf{e}_i$  (qui sont des vecteurs tangents à  $\mathbb{R}^n$  au point  $\mathbf{m}$ ) suivant la base existante  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ , il apparaît certains coefficients

$$\omega^i = \omega^i(x, \lambda; dx), \quad \omega_i^j = \omega_i^j(x, \lambda; dx)$$

en nombre  $n + n^2$  qui sont tous du type

$$\omega(x, \lambda; dx) = \varpi_1(x, \lambda) dx^1 + \dots + \varpi_n(x, \lambda) dx^n,$$

tels qu'on peut écrire (dans le cas  $n = 3$  pour être concret) :

$$\delta_{dx} \mathbf{m} = \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3,$$

<sup>12</sup> Par souci de contraction symbolique, Cartan ne spécifie jamais dans ses mémoires les arguments dont dépendent les symboles  $\omega, \varpi, A_{ijk}^l, \dots$  qu'il introduit au cours de ses calculs, se réservant le droit d'insérer divers arguments en fonction des raisonnements géométriques, ce qui revient à effectuer une restriction (par exemple à une courbe), ou à faire un « pull-back ». Aussi la dépendance fonctionnelle initiale des symboles est-elle souvent sous-entendue comme la plus générale possible. Ici en l'occurrence, le point  $\mathbf{m}$  mobile dans  $\mathbb{R}^n$  est paramétré par  $x \in \mathbb{R}^n$ , mais il ne s'identifie pas forcément à  $x$  (autrement dit,  $x \mapsto \mathbf{m}_x$  est un difféomorphisme), et on peut supposer pour fixer les idées, que les paramètres  $\lambda$  varient dans  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

<sup>13</sup> Dans l'activité mathématique non mécanique, et tout particulièrement lorsqu'il s'agit de chercher à calculer, et non pas de reproduire des calculs maîtrisés, l'esprit est constamment confronté au problème de *décider de l'acte à effectuer*. Dans certaines circonstances, des *indicateurs d'acte* suggèrent instamment ce qu'il est naturel de faire, et alors l'esprit doit saisir l'idée au vol. Chaque acte est une idée. La nécessité interne qui est à l'œuvre dans toutes les mathématiques déploie ses constructions dans l'inconnu par l'action de phénomènes irréversibles qui sont créateurs d'ordre et de compréhension, le second principe de la thermodynamique n'étant pas violé, parce que cette construction d'un réel ordonné s'effectue au détriment de la constitution biologique des êtres, laquelle est soumise à un vieillissement inexorable et irréversible.

ainsi que :

$$\begin{cases} \delta_{dx}\mathbf{e}_1 = \omega_1^1 \mathbf{e}_1 + \omega_1^2 \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \mathbf{e}_3 \\ \delta_{dx}\mathbf{e}_2 = \omega_2^1 \mathbf{e}_1 + \omega_2^2 \mathbf{e}_2 + \omega_2^3 \mathbf{e}_3 \\ \delta_{dx}\mathbf{e}_3 = \omega_3^1 \mathbf{e}_1 + \omega_3^2 \mathbf{e}_2 + \omega_3^3 \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Dans le cas général où  $\mathbf{m}$  varie dans  $\mathbb{R}^n$ , on a l'écriture formelle contractée :

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_{dx}\mathbf{m} &= \omega^i \mathbf{e}_i \\ \delta_{dx}\mathbf{e}_i &= \omega_i^j \mathbf{e}_j \end{aligned}}$$

avec la convention de sommation. En résumé, le système de référence ressaisit en lui-même et par lui-même sa propre différence infinitésimale à soi.

**4. Transport par parallélisme et coefficients de Christoffel.** Insistons sur l'interprétation géométrique à mémoriser de ces identités, qu'on doit lire comme donnant la loi explicite du parallélisme : le vecteur

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_i)_{x+dx} &= (\mathbf{e}_i)_x + \delta_{dx}\mathbf{e}_i \\ &= (\mathbf{e}_i)_x + \omega_i^1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \omega_i^n \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

constitue le résultat du *transport parallèle* du vecteur  $(\mathbf{e}_i)_x$  du point  $x$  vers le point  $x + dx$ , en suivant la direction infinitésimale  $dx$  issue du point  $x$  ; il en va de même pour l'équation :

$$(\mathbf{m})_{x+dx} = (\mathbf{m})_x + \delta_{dx}\mathbf{m} = (\mathbf{m})_x + \omega^i \mathbf{e}_i,$$

qui donne la loi de transport pour l'origine du repère.

Nous pouvons maintenant revenir aux coefficients dits de Christoffel qui donnent l'information quantitative au sujet du déplacement parallèle.

□ Compléter.

**4. Distribution d'hyperplans noyaux d'une forme différentielle.** Afin d'en exposer la signification géométrique, considérons une forme différentielle arbitraire :

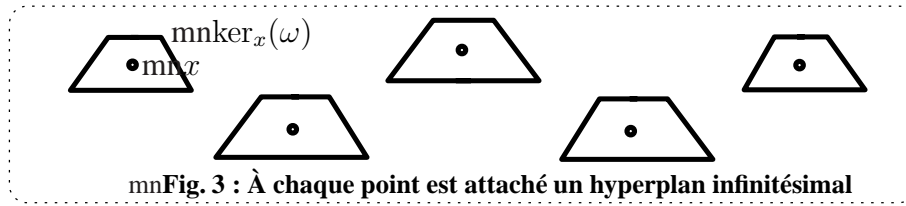
$$\omega = \omega(x, dx) := \omega_1(x) dx^1 + \omega_2(x) dx^2 + \cdots + \omega_n(x) dx^n$$

à coefficients  $\omega_i$  qui dépendent de  $x$ . Ici, la forme  $\omega$  doit être interprétée comme agissant sur tous les déplacements infinitésimaux  $dx$  issus de  $x$  dans toutes les directions possibles, le résultat de cette action fournissant simplement un nombre :  $\omega_i(x) dx^i$ . Géométriquement,  $\omega$  définit un hyperplan

$$\ker_x(\omega) := \{(dx^1, \dots, dx^n) : \omega_i(x) dx^i = 0\}$$

en tout point  $x$ , et alors  $\omega(x, dx)$  constitue une mesure de la « projection » du vecteur  $dx$  sur une « direction transverse » à cet hyperplan<sup>14</sup>. Clairement, le résultat obtenu  $\omega(x, dx)$  est nul si et seulement si  $dx$  appartient à cet hyperplan. Notons de plus qu'à tout point  $x$  est attaché l'hyperplan  $\ker_x(\omega)$  : on dit alors qu'on a un *champ* ou une *distribution* d'hyperplans (infinitésimaux).

<sup>14</sup> Toutefois, cette manière de s'exprimer reste intuitive, car en  $x$ , aucune direction privilégiée n'est définie par  $\omega$ .



**4. Différentier des formes différentielles.** Le principe général de la philosophie infinitésimale que nous avons invoqué pour introduire  $\delta_{dx}\mathbf{m}$  et les  $\delta_{dx}\mathbf{e}_i$  exige à nouveau que soit réalisée la différenciation par rapport à soi de la forme  $\omega$ , et ici va intervenir une nécessaire **antisymétrisation grassmannienne** dont les causes géométriques et conceptuelles ne doivent pas rester mystérieuses. La question est donc : que peut et que doit être la différenciation d'une forme différentielle  $\omega$  par rapport à elle-même ? Et encore : quelle est la causalité mathématique profonde de l'antisymétrisation ?

§5. GÉOMÉTRIE DU COVARIANT BILINÉAIRE DE DARBOUX-FROBENIUS

**5. Intégration des équations différentielles.** Avant de poursuivre, il nous paraît essentiel de discuter brièvement l'histoire du concept de forme différentielle, c'est-à-dire des expressions du type  $\omega = \omega_1(x) dx^1 + \omega_2(x) dx^2 + \dots + \omega_n(x) dx^n$  qui s'introduisent dans les formules du transport parallèle (en négligeant les éventuels paramètres supplémentaires). Leur origine, qui remonte au moins à Newton et à Leibniz, est profondément liée au problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables indépendantes<sup>15</sup>.

Par exemple, l'équation  $z_y = f(x, y, z, z_x)$  étudiée par Lagrange<sup>16</sup> ([La1772]), où l'on note pour abrégier  $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$  et  $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ , se ramène d'abord, si l'on introduit la nouvelle variable  $p := z_x$ , à un système de deux équations différentielles d'ordre un :

$$z_x = p, \quad z_y = f(x, y, z, p),$$

et ensuite, si l'on élimine les quotients différentiels, au système suivant constitué de deux formes de Pfaff égalées à zéro :

$$0 = dz - p dx, \quad 0 = dz - f(x, y, z, p) dy.$$

Réciproquement, ce système est équivalent à l'équation d'origine. En mathématicien éclairé qui s'improvise humble pédagogue, Cartan décrira spécialement pour Einstein dans [De1979, Ca1931] comment sa théorie générale des systèmes en involution s'applique à ce système classique — nous y reviendrons.

<sup>15</sup> Une proposition générale relativement élémentaire énonce que tout système d'équations aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables indépendantes et à un nombre quelconque d'inconnue peut être transformé, au moins localement au voisinage d'un point générique, en un système de formes de Pfaff égalées à zéro ([Stk2000]).

<sup>16</sup> Le lecteur trouvera des éléments historiques complets dans [Fo1890, Ha1991, Ha2005].

**5. La méthode de Lagrange.** En 1772, mais seulement dans le cas de deux variables indépendantes  $(x, y)$  et en supposant l'existence d'un « facteur intégrant » (une hypothèse spéciale), Lagrange parvint à intégrer  $z_y = f(x, y, z, z_x)$  de façon que la solution générale  $z = z(x, y, c)$  dépende d'une constante arbitraire  $c$ , comme cela se produit pour une équation différentielle ordinaire  $y_x = f(x, y)$  d'ordre un à une variable indépendante  $y$ , ce qui pouvait sembler constituer la bonne approche unifiante. Il introduisit l'unique forme différentielle :

$$\begin{aligned}\Omega &:= dz - p dx - q dy = dz - p dx - f(x, y, z, p) dy, \\ &= dz - g(x, y, z) dx - f(x, y, z, g(x, y, z)) dy,\end{aligned}$$

où  $g = g(x, y, z)$  désigne une fonction encore non spécifiée qui jouera le rôle attendu de  $z_x$  lorsque le problème sera résolu.

Supposons, dit Lagrange, que pour un certain choix de  $g$ , il existe une fonction  $\lambda = \lambda(x, y, z)$ , dite **facteur intégrant**, telle que  $\Omega$  multipliée par  $\lambda$  soit égale à une forme **exacte**, *i.e.* égale à la différentielle d'une fonction :

$$\lambda \Omega \equiv d\varphi.$$

Géométriquement, les deux familles d'hyperplans noyaux  $\text{Ker}_{(x,y,z)}(\Omega) = \text{Ker}_{(x,y,z)}(d\varphi)$  de  $\Omega$  et de  $d\varphi$  coïncident en tous les points  $(x, y, z)$  de l'espace, puisque chaque homothétie de rapport  $\lambda(x, y, z)$  stabilise toutes les droites et tous les plans passant par le point  $(x, y, z)$ . Alors cette fonction  $\varphi$  permet de découper l'espace en une famille infinie de surfaces

$$\Sigma_c := \{\varphi(x, y, z) = \text{const.} = c\}$$

paramétrées par une constante  $c$  et qui constituent comme un recollement cohérent de ces hyperplans infinitésimaux. En supposant donc l'existence d'un facteur intégrant, Lagrange affirme alors que la solution générale de l'équation originale  $z_y = f(x, y, z, z_x)$  s'obtient simplement en résolvant<sup>17</sup> l'équation  $\varphi(x, y, z) = c$  par rapport à  $z$ , ce qui donne :  $z = \psi(x, y, c)$  pour une certaine fonction  $\psi$ .

En effet, si l'on remplace  $\varphi$  par  $c$  (donc aussi  $z$  par  $\psi(x, y, c)$ ) dans l'égalité  $d\varphi = \lambda \Omega$ , ce qui donne  $0 = dc = d\varphi = \lambda \Omega$ , ou plus précisément :

$$\begin{aligned}0 &= \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz \\ &= \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z (\psi_x dx + \psi_y dy) \\ &= -\lambda g dx - \lambda f dy + \lambda dz,\end{aligned}$$

on peut en déduire tout d'abord  $\psi_x = -\frac{\varphi_x}{\varphi_z}$  et  $\psi_y = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z}$  en égalant à zéro les coefficients de  $dx$  et de  $dy$  sur la deuxième ligne, puis en comparant les lignes 1 et 3 :

$$g = -\frac{\varphi_x}{\varphi_z} = \psi_x \quad \text{et} \quad f = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z} = \psi_y,$$

ce qui donne en écrivant tous les arguments :

$$\begin{aligned}\psi_x(x, y, c) &= g(x, y, \psi(x, y, c)) \\ \text{et} \quad \psi_y(x, y, c) &= f(x, y, \psi(x, y, c), g(x, y, \psi(x, y, c))).\end{aligned}$$

<sup>17</sup> Les raisonnements sont locaux et on suppose implicitement que l'équation  $\varphi_z(x, y, z)$  ne s'anule pas, ce qui est généralement vrai.



La dernière équation signifie exactement que  $z = \psi(x, y, c)$  est une solution de  $z_y = f(x, y, z, z_x)$ .

**5. Qu'est-ce qu'une forme différentielles intégrable ?** Ainsi Lagrange semblait-il donner raison à Euler, qui avait exprimé l'opinion qu'une forme différentielle à trois variables  $\omega = \omega_1(x) dx^1 + \omega_2(x) dx^2 + \omega_3(x) dx^3$  n'est intégrable que si  $\lambda \omega = d\varphi$  est exacte, à un facteur  $\lambda$  près. Toutefois, ni Lagrange ni ses successeurs ne parvinrent à exploiter cette idée pour étudier l'équation générale du premier ordre à un nombre  $n > 2$  de variables indépendantes, de façon à réduire son intégration à la considération d'un nombre fini de systèmes d'équations différentielles ordinaires. Par ailleurs, Lagrange et ses contemporains connaissaient de nombreux exemples d'équations à deux variables que l'on savait intégrer par des méthodes particulières et dont la solution générale ne dépendait pas d'une constante arbitraire, mais d'une fonction arbitraire.

En 1815, Pfaff devait rendre raison à Monge qui, en désaccord avec Euler, avait déjà notifié que deux équations simultanées indépendantes  $\varphi_1(x, y, z) = c_1$  et  $\varphi_2(x, y, z) = c_2$  représentant une famille de courbes dans l'espace pouvaient très bien être considérées comme une intégrale de  $\omega$ , lorsque les vecteurs tangents aux courbes appartiennent en tout point aux hyperplans  $\text{Ker}_x(\omega)$ . Plus généralement, si une distribution donnée d'hyperplans dans un espace à  $n$  dimensions manifeste trop de rigidité pour être intégrable au sens géométrique<sup>18</sup>, il se peut fort bien qu'une *sous-distribution* appropriée de  $k$ -plans ( $k < n - 1$ ) soit intégrable ; là est toute l'idée du théorème général anticipé par Pfaff que Clebsch, Natani, Frobenius, Cartan, Vessiot et Kähler allaient finaliser ultérieurement, théorème algébrique d'une portée universelle puisqu'il s'applique aux équations aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables dépendantes ou indépendantes, donc en particulier aux équations de champ que Einstein cherchait à faire dériver d'une structure à parallélisme absolu.

**5. Universalité et fécondité du partiel.** Ainsi faut-il comme le pensaient Pfaff et Monge étudier l'intégrabilité *partielle* d'une distribution pour y déceler les lignes géométriques charpentées qui sont invisibles à grande échelle parce qu'elles sont de dimension inférieure. En mathématiques, les universaux de la généralisation spécifique sont fréquemment « cachés » dans l'entrebaillement du partiel, ou dans des conditions extensionnelles simples qui semblent élargir gratuitement la portée d'un énoncé connu. Et c'est à la raison déterminante d'activer son organe spéculatif pour tester les possibles. Dans l'abstraction mathématique pure, il existe en effet une exigence structurale des parties vis-à-vis de leur tout, à savoir, l'obligation de saisir les sous-objets d'un objet mathématique donné, y compris lorsque l'objet n'explique pas ses sous-structures, de la même manière que l'on se trouve contraint, dans une démonstration par induction, de mettre en forme une hypothèse de récurrence intermédiaire qui a plus de portée que le théorème en vue.

---

<sup>18</sup> C'est-à-dire que les hyperplans infinitésimaux puissent se souder comme les écailles lisses et aplanies de la peau d'un poisson pour former une collection d'hypersurfaces empilées les unes sur les autres dans l'espace.

**5. Théorème de Pfaff.** Si  $\omega = \omega_1(x) dx^1 + \cdots + \omega_n(x) dx^n$  est une forme différentielle quelconque, le théorème original (et incomplet, cf. [Fo1890, Ha2005]) de Pfaff en 1815 énonce qu'il existe un changement de variables  $x^j = x^j(y) = x^j(y^1, \dots, y^n)$  qui transforme  $\omega$  en une forme  $\varpi$  qui ne comporte que les  $m < n$  premières différentielles  $dy^1, \dots, dy^m$  :

$$\varpi = \varpi_1(y) dy^1 + \cdots + \varpi_m(y) dy^m,$$

où  $m = n/2$  si  $m$  est pair et  $m = (n + 1)/2$  si  $m$  est impair.

Sans aucune hypothèse spéciale, Pfaff divise ainsi par deux le nombre de différentielles : l'énoncé est vrai pour les formes « les plus générales », *i.e.* celles dont les coefficients  $\omega_i(x)$  sont des fonctions mutuellement générales les unes vis-à-vis des autres<sup>19</sup>.

Dans le système de coordonnées « simplifié »  $(y^1, \dots, y^n)$ , on voit immédiatement que les tranches définies par  $\{y^1 = c_1, \dots, y^m = c_m\}$ , qui ne sont autre que les  $(n - m)$ -plans définis par

$$\{(c_1, \dots, c_m, y^{m+1}, \dots, y^m) : y^{m+1}, \dots, y^n \in \mathbb{R}\},$$

peuvent être interprétées comme des solutions de l'équation pfaffienne  $\varpi = 0$ , puisque les équations  $dy^1 = dc_1 = 0, \dots, dy^m = dc_m = 0$  impliquent immédiatement que  $\varpi = 0$  s'annule sur ces tranches. Par conséquent, dans le système original de coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$ , la famille de sous-variétés retransformées en arrière :

$$\{(x^1(c, y''), \dots, x^n(c, y'')) : y'' = (y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m\}$$

de dimension  $(n - m)$  paramétrées par les constantes  $c_1, \dots, c_m$ , constitue une famille de solution de l'équation  $\omega = 0$ .

**5. Brève métaphysique de l'invariance.** Troublant, ce théorème de Pfaff : il affirme que toute forme différentielle quelconque  $\omega = \omega_1(x) dx^1 + \cdots + \omega_n(x) dx^n$  qui comporte *a priori*  $n$  infinitésimaux n'en comporte en fait pas plus de  $\frac{n}{2}$  ou  $\frac{n+1}{2}$ . D'où vient qu'on ne le voit pas d'emblée ?

D'un point de vue abstrait et général, tout objet géométrico-différentiel que l'on sait définir soit d'une manière intrinsèque et indépendante des coordonnées, soit en signalant les lois « covariantes » de transformation auxquelles il est soumis quand on change de coordonnées, souffre d'une certaine imperfection ontologique initiale : son être propre, sa nature même et ses caractères d'individualité demeurent en effet malheureusement invisibles lorsqu'on analyse seulement son invariance morphologique dans le jeu libre du changement de perspective. Les métamorphoses générales on beau se succéder, aucune synthèse véritable ne vient produire au jour l'être de la chose.

Par exemple, la loi qui exprime comment une forme différentielle  $\omega_x = \omega_1 dx^1 + \cdots + \omega_n dx^n$  se transforme à travers un difféomorphisme  $x^j = x^j(y) =$

<sup>19</sup> On pourrait conférer un sens précis à cet énoncé grâce aux théorèmes de transversalité en topologie différentielle.

$x^j(y^1, \dots, y^n)$  — d'où par différentiation  $dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial y^1} dy^1 + \dots + \frac{\partial x^j}{\partial y^n} dy^n$  — dit simplement que  $\omega$  est remplacée par :

$$\omega_y = \left( \sum_j \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial y^1} \right) dy^1 + \dots + \left( \sum_i \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial y^n} \right) dy^n.$$

Certainement, la morphologie générale est préservée, car si l'on pose  $\omega_i(y) := \sum_j \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$ , on obtient à nouveau  $\omega_y = \omega_1(y) dy^1 + \dots + \omega_n(y) dy^n$ , et c'est en cela que réside l'invariance formelle du concept. Cependant, l'information que l'on peut tirer de ces formules générales est déjà épuisée à ce premier stade, car, lorsqu'on soumet la forme  $\omega_y$  à un nouveau changement de coordonnées  $y^j = y^j(z) = y^j(z^1, \dots, z^n)$ , les formules donnant  $\omega_z$  sont exactement similaires, aussi bien d'ailleurs que les formules qui donnent  $\omega_z$  en partant de  $\omega_x$ , et aussi bien même que les formules que l'on obtiendrait en considérant les difféomorphismes inverses. Le caractère général-abstrait de l'invariance manifeste une certaine circularité. Ce n'est pas elle qui fournit le bon tamis à l'orpailleur différentiel.

En vérité, le fait que l'on envisage l'invariance d'un objet géométrico-différentiel *quelconque* expose nécessairement à une insuffisance de pensée, parce qu'il se peut très bien que les objets se divisent en plusieurs classes qui ne sont pas équivalentes entre elles. Il se peut au contraire que les objets soient tous équivalents entre eux, auquel cas il semble *a priori* inutile de parler de changement de saisie, de perspective, ou de coordonnées, car lorsque l'un sous-tend le multiple, c'est à la compréhension de l'un en lui-même et à sa désignation que doit tendre la recherche. Par exemple, on vérifie<sup>20</sup> que toute forme différentielle  $\omega_1(x^1) dx^1$  en dimension  $n = 1$  se réduit à  $dy^1$ , localement au voisinage d'un point générique. On est alors en droit de se demander si toutes les formes différentielles ne se réduisent pas à une seule expression-type.

**5. Les problèmes de classification.** Bien que les problématiques de classification en mathématiques fondamentales soient suffisamment ubiquitaires pour devoir faire l'objet d'une étude métaphysique autonome, nous abrègerons ces considérations. Contentons-nous de noter que dès que les conditions de donation d'un objet sont ambiguës, vagues, imprécises, trop générales, ou extrêmement variables (comme l'est par exemple la donnée d'un polynôme brut), on doit, pour se libérer d'un état de non-connaissance, chercher à éliminer le redondant, disposer les objets équivalents dans une même classe, et sélectionner un représentant pour chaque classe dont l'expression soit à la fois simple, reconnaissable, symétrique et réutilisable. Il faut éliminer la roche pour en extraire le minerai et les pépites.

**5. Théorème de Darboux-Frobenius.** Terminons maintenant cette brève excursion historique en restituant le théorème définif, dû à Frobenius ([Fr1877]), et indépendamment aussi, à Darboux ([Da1882]), qui fournit une liste de toutes les formes

<sup>20</sup> En effet, la fonction inconnue  $y^1 = y^1(x^1)$  doit satisfaire

$$\omega_1(x^1) dx^1 = dy^1 = \frac{dy^1}{dx^1} dx^1,$$

d'où  $y^1 = \int \omega_1(x^1) dx^1$  et pour que  $x^1 \mapsto y^1(x^1)$  soit un difféomorphisme local, il faut et il suffit que  $\frac{dy^1}{dx^1} = \omega^1(x^1)$  ne s'annule pas.

normales possibles pour une forme différentielle, valables localement autour d'un point générique  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ce théorème précise considérablement l'énoncé original de Pfaff, car il donne le nombre exact de différentielles apparaissantes et il normalise leurs coefficients.

**Théorème 5.** *Si  $p$  désigne la classe<sup>21</sup> d'une forme différentielle donnée quelconque  $\omega = \omega_1(x) dx^1 + \cdots + \omega_n(x) dx^n$  à coefficients analytiques, alors localement au voisinage d'un point générique, il existe un changement de coordonnées  $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , qui transforme  $\omega$  en une forme modèle  $\varpi$  s'exprimant simplement comme suit, suivant la parité de sa classe :*

$$\underline{p = 2m} : \quad \varpi = y^{2m} dy_{2m-1} + \cdots + y^2 dy^1 ;$$

$$\underline{p = 2m + 1} : \quad \varpi = y^{2m} dy_{2m-1} + \cdots + y^2 dy^1 .$$

*Par conséquent, deux formes  $\omega$  et  $\omega'$  sont équivalentes, localement autour d'un point générique, si et seulement si elles ont la même classe.*

En particulier, dans le cas de cinq variables  $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$ , la classe peut être égale 1, 2, 3, 4 ou 5 et les formes normales possibles sont au nombre de cinq :

$$p = 1 \implies \varpi = dy^1,$$

$$p = 2 \implies \varpi = y^2 dy^1,$$

$$p = 3 \implies \varpi = dy^3 + y^2 dy^1,$$

$$p = 4 \implies \varpi = y^4 dy^3 + y^2 dy^1,$$

$$p = 5 \implies \varpi = dy^5 + y^4 dy^3 + y^2 dy^1 .$$

Dès 1899, à la suite d'un mémoire de Poincaré 1897 consacré à la définition et à l'intégration des éléments de volume en dimension arbitraire, Cartan rédige un mémoire de synthèse [Ca1899] dans lequel il repense les travaux consacrés au *problème de Pfaff*, suite à une tradition qui commence par Pfaff ([Pf1815]) lui-même, et qui comprend Grassmann, Natani, Clebsch, Lie, Frobenius et Darboux. C'est dans ce mémoire que Cartan traduit dans son langage naissant le concept de *covariant bilinéaire* qu'avaient introduit Frobenius et Darboux.

**5. Le covariant bilinéaire de Frobenius, d'après Darboux.** Voici donc comment Gaston Darboux présente dans [Da1882] le concept de *covariant bilinéaire* d'une forme différentielle, qui correspond à ce qu'on appelle aujourd'hui la *différentiation extérieure*, concept qui allait être appelé à un destin remarquable, à cause de ses vertus invariantes et de son caractère intrinsèque, et qui allait constituer un « levier

<sup>21</sup> D'après la définition simplifiée due à Cartan dans son mémoire de synthèse [Ca1899], si on introduit la suite définie par  $\omega_1 := \omega$ ,  $\omega_2 := d\omega$  (où l'opérateur de différentiation extérieure «  $d$  » sera défini et analysé dans un instant),  $\omega_3 := \omega \wedge \omega$ ,  $\omega_4 := d\omega_3 = d\omega \wedge d\omega$ ,  $\omega_5 := \omega \wedge d\omega \wedge d\omega$ , etc., alors la *classe* de  $\omega$  est le plus petit entier  $p$  (*a priori*  $\leq n$ ) tel que  $\omega_{p+1} \equiv 0$ , tandis que  $\omega_p \not\equiv 0$ ; les coefficients  $\omega_i(x)$  étant en général supposés analytiques,  $\omega_p$  ne s'annule alors pas en tout point d'un sous-ensemble dense du domaine de définition de  $\omega$ . Grâce à la propriété fondamentale d'invariance de l'opérateur «  $d$  » que Darboux avait mise en exergue (*cf. infra*), on vérifie que la classe ne dépend pas du système de coordonnées dans lequel est écrite  $\omega$ .

systématique de calcul » dans les mémoires ultérieurs développés par l'élève prodige de Lie et de Darboux, Élie Cartan.

Dans l'espace des  $(x^1, \dots, x^n)$ , considérons une expression différentielle quelconque :

$$\Theta_d := X_1 dx^1 + \dots + X_n dx^n,$$

où  $X_1, \dots, X_n$  sont des fonctions données de  $x$ . La différenciation infinitésimale par rapport à soi doit s'effectuer en toute généralité, dans une direction qui n'a *a priori* rien à voir avec le vecteur infinitésimal  $dx = (dx^1, \dots, dx^n)$  sur lequel  $\Theta_d$  agit. Ainsi, en introduisant un autre symbole différentiel  $\delta x = (\delta x^1, \dots, \delta x^n)$ , il s'agit de faire subir à  $\Theta_d$  la différenciation voulue dans la direction  $\delta x$ , ce qui donne par définition et par application de la règle de Leibniz :

$$\begin{aligned} \Theta_d|_{x+\delta x} - \Theta_d|_x &= \delta \Theta_d = \sum_{i=1}^n \delta(X_i dx^i) = \sum_{i=1}^n \delta X_i dx^i + \sum_{i=1}^n X_i \delta dx^i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x^k} \delta x^k dx^i + \sum_{i=1}^n X_i \delta dx^i. \end{aligned}$$

Le premier terme constitue une forme bilinéaire en  $\delta x$  et  $dx$ , tandis que le second exige que soit connue la différenciation de  $dx^i$  par rapport à  $\delta$ , ce qui n'est pas sans poser de problèmes d'interprétation, puisque le premier jeu de différentielles  $dx^i$  n'est pas supposé<sup>22</sup> dépendre de  $x$ , et alors on ne sait pas vraiment quel sens<sup>23</sup> donner à  $dx^i|_{x+\delta x} - dx^i|_x$ . On est conduit à éliminer<sup>24</sup> ce reste ambigu en observant simplement que si on inverse les rôles de  $d$  et de  $\delta$ , le nouveau reste gênant qui apparaît :

$$d\Theta_\delta = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x^k} dx^k \delta x^i + \sum_{i=1}^n X_i d\delta x^i$$

reproduit les  $\delta dx^i$  en permutant  $\delta$  et  $d$ , et par conséquent, si on postule que les deux symboles d'opérateurs  $d$  et  $\delta$  commutent sur les  $x^i$ , à savoir, si l'on requiert les relations de commutation :

$$\delta dx^i = d\delta x^i,$$

<sup>22</sup> Dans le langage moderne de géométrie différentielle, cela revient à dire qu'il n'y a pas de raison de considérer une section du fibré cotangent.

<sup>23</sup> On pourrait stipuler que  $\delta dx^i = 0$  pour toute différenciation  $\delta$ , ce qui reviendrait à dire que tous les vecteurs infinitésimaux  $dx$  sont parallèles, au sens euclidien, en tous les points  $x$ , mais cette condition n'est pas préservée par un changement quelconque de coordonnées.

<sup>24</sup> Calcul et concept se rejoignent ici dans la recherche d'actes visant à supprimer l'extrinsèque et l'on « voit », dans de nombreuses situations mathématiques, que « soustraire en permutant » constitue la solution la plus simple et la plus naturelle. L'opérateur général d'antisymétrisation potentielle :

« un ordre donné peut être soustrait à l'ordre inverse »

agit dans des domaines mathématiques très variés : théorie des invariants, géométrie non commutative, théorie des opérateurs, mécanique quantique, groupes de Lie, calcul tensoriel, théorie des représentations.

qui sont clairement invariantes<sup>25</sup>, alors ces termes disparaissent comme souhaité lorsqu'on soustrait les deux précédentes équations, ce qui donne :

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial X_i}{\partial x^k} \delta x^k dx^i - \frac{\partial X_i}{\partial x^k} dx^k \delta x^i \right).$$

Mais la morphogénèse de ce calcul ne s'arrête pas ici, elle doit nécessairement se poursuivre<sup>26</sup> : en intervertissant les indices sommatoires  $i$  et  $k$  dans les termes qui sont situés après le signe négatif, il est possible de *découvrir un facteur commun devant le terme bi-différentiel*  $dx^i \delta x^k$  :

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \frac{\partial X_k}{\partial x^i} \right) dx^i \delta x^k.$$

Et comme ce facteur commun :

$$a_{ik} := \frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \frac{\partial X_k}{\partial x^i}$$

est clairement antisymétrique par rapport aux indices  $i$  et  $k$ , à savoir :  $a_{ik} = -a_{ki}$  (d'où il découle en particulier que  $a_{ii} = 0$ ), on peut *encore simplifier* le résultat en décomposant la somme :

$$\sum_{i=1}^k \sum_{k=1}^n = \sum_{1 \leq i < k \leq n} + \sum_{i=k} + \sum_{n \geq i > k \geq 1},$$

ce qui permet d'obtenir enfin l'expression finale et significative du covariant bilinéaire :

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \sum_{1 \leq i < k \leq n} \left( \frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \frac{\partial X_k}{\partial x^i} \right) [dx^i \delta x^k - dx^k \delta x^i].$$

C'est cette présentation basée sur la supposition de commutation  $\delta dx_i = d\delta x_i$  que Cartan retiendra de son maître Darboux et qu'il restituera toujours dans les expositions ultérieures [Ca1922, Ca1923a, Ca1923b, Ca1924, Ca1925a, Ca1925b, Ca1928]. Avant de discuter la géométrie de cette expression qui manifeste un caractère doublement antisymétrique, à la fois dans le coefficient  $a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \frac{\partial X_k}{\partial x^i}$  et dans l'expression bilinéaire  $dx^i \delta x^k - dx^k \delta x^i$ , il est impératif d'énoncer la propriété fondamentale d'invariance que Darboux place au tout début de son mémoire.

<sup>25</sup> En effet, dans des coordonnées  $y^i = y^i(x)$  déduites de  $x$  par difféomorphisme, ces relations s'exprimeront pareillement sous la forme  $\delta dy^i = d\delta y^i$ .

<sup>26</sup> Dans les « forêts d'arbres symboliques » dont l'existence actuelle–potentielle nous est constamment révélée par la pratique du calcul formel, on sait par expérience qu'afin de parvenir aux expressions achevées qui constituent les noyaux durs d'une toile complexe de relations algébriques, il faut repérer, mémoriser et interroger tout ce par quoi l'inachèvement d'un résultat peut se manifester, et ce, jusqu'aux imperfections les plus infimes. Ici, pour l'expression obtenue de  $\delta\Theta_d - d\Theta_\delta$ , des gestes de calculs sont encore possibles, et c'est pourquoi il faut les tester, puis les accomplir pleinement s'ils sont signifiants.

**Proposition 5..** *Le covariant bilinéaire est invariant par changement de coordonnées, à savoir si  $x^i = \psi^i(y^1, \dots, y^n)$  est un changement de coordonnées dont découlent les relations  $dx^i = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial \psi^i}{\partial y^k} dy^k$  entre différentielles, lesquelles permettent de transformer la forme  $\Theta_d = \sum_{1 \leq i \leq n} X_i dx^i$  en une forme dans l'espace des  $y$  :*

$$\Pi_d := \sum_{k=1}^n Y_k dy^k$$

dont les coefficients  $Y_k$  sont naturellement donnés par

$$Y_k := \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial \psi^i}{\partial y^k} X_i,$$

alors le covariant bilinéaire de  $\Pi_d$  défini dans les coordonnées  $y^k$  coïncide avec le covariant bilinéaire calculé dans les coordonnées  $x^i$ , lorsqu'elles sont liées par  $x^i = \psi^i(y^k)$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \delta\Theta_d - d\Theta_\delta &= \sum_{1 \leq i < k \leq n} \left( \frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \frac{\partial X_k}{\partial x^i} \right) [dx^i \delta x^k - dx^k \delta x^i] \\ &= \sum_{1 \leq i < k \leq n} \left( \frac{\partial Y_i}{\partial y^k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y^i} \right) [dy^i \delta y^k - dy^k \delta y^i] \\ &= \delta\Pi_d - d\Pi_\delta. \end{aligned}$$

Cette identité se vérifie par un calcul direct dans lequel, lorsqu'on calcule les dérivées premières  $\frac{\partial Y_i}{\partial y^k}$  et  $\frac{\partial Y_k}{\partial y^i}$  en différentiant les expressions qui définissent  $Y_i$  et  $Y_k$ , il apparaît les deux sommes de dérivées secondes  $\sum_{1 \leq k, i \leq n} \frac{\partial^2 \psi^k}{\partial y^i \partial y^k} X_k$  et  $\sum_{1 \leq k, i \leq n} \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial y^i \partial y^k} X_i$  qui disparaissent « miraculeusement » dans la soustraction  $\frac{\partial Y_i}{\partial x^k} - \frac{\partial Y_k}{\partial x^i}$ . Les autres expressions se correspondent alors par un calcul algébrique direct et sans surprise.

En résumé, sur un plan purement formel, un phénomène symbolique d'élimination de l'extrinsèque est garanti par l'antisymétrisation, d'abord comme opérateur de soustraction conceptuelle au moment de la définition du covariant bilinéaire  $\delta\Theta_d - d\Theta_\delta$  lorsqu'est décidé un acte de retranchement permuté, et ensuite comme signe permanent d'annihilation de tout terme parasite introduit par un changement quelconque de coordonnées.

L'invariance par changement de coordonnées offre des clés innombrables permettant de pénétrer par réseau de gestes intrinsèques dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

**5. Opérateur de différentielle extérieure.** Nous pouvons dorénavant nous en remettre au formalisme contemporain <sup>27</sup>, en explicitant les métamorphoses conceptuelles que masque parfois la contraction des notations.

<sup>27</sup> C'est Henri, le fils d'Élie Cartan, dans ses leçons à l'École Normale Supérieure ([Ch1967]) qui a traduit les concepts fondamentaux dans le langage hypothético-déductif actuel.

Le symbole unique «  $d$  », adopté universellement depuis son introduction par le géomètre Kähler<sup>28</sup>, est aujourd'hui utilisé pour définir le covariant bilinéaire antisymétrique, bien que, comme nous l'avons vu, deux directions infinitésimales soient impliquées, et même trois ou plus lorsqu'on passe aux covariants trilinéaires, quadrilinéaires, *etc.*, objets d'ordre supérieur qui ont été introduits par Henri Poincaré et par Élie Cartan lui-même. Par définition, «  $d$  » agit tout d'abord en tant que symbole de différentiation unilatérale comme suit sur les fonctions  $f = f(x)$  :

$$df := \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n .$$

Dans la pensée du différentiable, cette formule classique du calcul leibnizien développe simplement la différence  $f(x+dx) - f(x)$  en admettant que les dérivées partielles de  $f$  existent<sup>29</sup>, autrement dit, que le graphe  $\{y = f(x)\}$  de  $f$  est localement approximable par son plan tangent  $\{Y - y = \frac{\partial f}{\partial x^1}(X^1 - x^1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(X^n - x^n)\}$ .

Mais ce même symbole «  $d$  » de type apparemment unidimensionnel est aussi utilisé, dans le formalisme actuel, pour désigner la « *différentielle extérieure* » d'une forme différentielle  $\omega = \omega_1(x) dx^1 + \cdots + \omega_n(x) dx^n$ , qui est définie abstraitement comme suit (nous expliquerons dans un instant le nouveau signe «  $\wedge$  ») :

$$d\omega := \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j .$$

Ici, bien que nous reconnaissons le même type de coefficients antisymétriques  $\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}$  que dans l'expression du covariant bilinéaire de Darboux-Frobenius (à un changement de notations près), nous sommes en droit de demander où est passée l'idée, conceptuellement fondatrice, de différence antisymétrisée de  $\omega(dx)$  dans une autre direction infinitésimale  $\delta x$  que celle de  $dx$ . En fait, dans la formule définissant  $d\omega$  ci-dessus, c'est dans le symbole bien connu «  $\wedge$  » qu'est inscrit le bidimensionnel, ou plus exactement, qu'est lové l'acte de grassmannisation du différentiel. Expliquons cela.

Formellement parlant, ce symbole «  $\wedge$  » désigne le *produit extérieur* entre formes différentielles de degré 1 (voire de degré 2, 3, ou plus), qui est par définition antisymétrique quand on change l'ordre des facteurs :

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i .$$

En général, dans la quasi-totalité des théories mathématiques ou physiques qui recourent aux formes différentielles, cette simple propriété algébrique suffit à l'usage, aux démonstrations, et aux intuitions techniques : puissance du levier symbolique ! Toutefois, puisqu'il est de notre devoir de satisfaire l'exigence de comprendre, nous allons en expliciter brièvement la géométrie afin de montrer comment elle s'enracine dans le langage de Darboux.

<sup>28</sup> « J'adopte dans cet ouvrage [*i.e.* [Ca1945]] la notation préconisée par M. E. KAEHLER, qui consiste à désigner par  $d\omega$ , et à appeler *différentielle extérieure* d'une forme différentielle extérieure  $\omega$  de degré quelconque, ce que je désignais auparavant par  $\omega'$  et ce que j'appelais la *dérivée extérieure* de la forme  $\omega$ . »

<sup>29</sup> Il n'est pas de notre propos de discuter ici de l'histoire et de la philosophie des hypothèses de régularité auxquelles on peut soumettre les êtres qu'on appelle fonctions.



D'après la théorie contemporaine, les expressions du type :

$$\Omega := \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$$

avec des coefficients  $a_{ij}(x)$  fonctions de  $x$ , sont appelées *2-formes différentielles* ; elles doivent être considérées comme des *formes bilinéaires antisymétriques* dépendant de  $x$ , au sens suivant. Tandis que les 1-formes différentielles  $\omega = \omega_1(x)dx^1 + \dots + \omega_n(x)dx^n$  sont, comme nous l'avons vu, des formes linéaires dépendant de  $x$  agissant sur des champs de vecteurs quelconques dépendant de  $x$  écrits sous la forme :

$$X(x) = X^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2(x) \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + X^n(x) \frac{\partial}{\partial x^n}$$

en produisant tout simplement le nombre scalaire :

$$\langle \omega, X \rangle_x := \omega_1(x) X^1(x) + \omega_2(x) X^2(x) + \dots + \omega_n(x) X^n(x),$$

qui est obtenu par « projection » de  $X(x)$  parallèle à l'hyperplan  $\{\omega = 0\}$  passant par  $x$ , les 2-formes différentielles  $\Omega$  agiront quant à elles sur des *bivecteurs*. Ces derniers répondent à l'idée, mise au point par Grassmann, qu'il devrait exister des « vecteurs bidimensionnels orientés » généralisant l'idée newtonienne de vecteur (unidimensionnel) orienté. Par définition, les bivecteurs sont constitués d'un couple ordonné de *deux vecteurs* tracés dans l'espace tangent en un point  $x$  et que l'on doit envisager, sur le plan géométrique, comme représentant l'élément de surface *orienté* qu'est le parallélogramme tracé sur ces deux vecteurs. Lorsque les deux vecteurs basés en  $x$  varient dans l'espace, la variation associée du bivecteur doit témoigner fidèlement des pivotements et des dilatations du parallélogramme enveloppé.

Sur un plan purement algébrique, on se donne une loi de multiplication entre vecteurs — qui est *externe* en ce sens que le résultat vit dans un autre espace supplémentaire — que l'on notera  $X \wedge Y$ , avec le même symbole «  $\wedge$  », et qui est naturellement antisymétrique :

$$X \wedge Y = -Y \wedge X,$$

parce que le parallélogramme doit changer d'orientation lorsqu'on le regarde en-dessous, de telle sorte que le côté  $Y$  soit placé avant le côté  $X$ .

Ainsi, les 2-formes  $\Omega$  agissent par définition sur les bivecteurs en calculant une sorte de projection de la mesure du parallélogramme dans la direction définie par  $\Omega$  comme suit, où il faut regarder ce qu'il advient de  $[dx^i \wedge dx^j](X \wedge Y)$  :

$$\begin{aligned} \Omega(X \wedge Y) &:= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(x) [dx^i \wedge dx^j](X \wedge Y) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(x) (dx^i(X) \cdot dx^j(Y) - dx^i(Y) \cdot dx^j(X)) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(x) (X^i(x) \cdot Y^j(x) - Y^i(x) \cdot X^j(x)). \end{aligned}$$

Par linéarité, il suffit de retenir la formule générale :

$$[\omega \wedge \varphi](X \wedge Y) := \omega(X) \cdot \varphi(Y) - \omega(Y) \cdot \varphi(X),$$

où  $\omega$  et  $\varphi$  sont des 1-formes,  $X$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs. En vérité, le membre de droite jouit d'une double antisymétrie : par rapport au couple  $(\omega, \varphi)$  aussi bien que par rapport au couple  $(X, Y)$ , et c'est entre autres pour cette raison que le symbole «  $\wedge$  » est utilisé deux fois, aussi bien pour les 2-formes que pour les bivecteurs.

En conclusion, en géométrie différentielle contemporaine, l'expression de la différentielle extérieure

$$d\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j$$

d'une 1-forme  $\omega$  laisse libre la place de l'argument sur lequel agissent les 2-formes élémentaires  $dx^i \wedge dx^j$ , à savoir les bivecteurs, de la même manière que les symboles modernes de fonction ou d'opérateur laissent ouverte la place des êtres sur lesquelles ils agissent. C'est à capturer des parallélogrammes géométriques qu'est destinée  $d\omega$ .

**5. Lien avec le covariant bilinéaire de Darboux-Frobenius.** Notons que l'expression générale du covariant bilinéaire encadrée plus haut ne désigne pas un opérateur, puisqu'elle produit un nombre dès que sont spécifiés  $dx$  et  $\delta x$ . Toutefois, on constate sans difficulté que :

$$\boxed{\text{le covariant bilinéaire } \delta\Theta_d - d\Theta_\delta \text{ coïncide avec } d\Theta(\delta x \wedge dx)},$$

c'est-à-dire avec l'application de  $d\Theta$  au bivecteur infinitésimal<sup>30</sup>  $\delta x \wedge dx$ .

Autrement dit, nous avons là un seul et même concept dont la définition génétique change de statut d'une théorie à l'autre. Tandis que Darboux différentie le différentiel en l'antisymétrisant pour en extraire la formule intrinsèque  $\delta\Theta_d - d\Theta_\delta$ , la présentation moderne postule algébriquement une double antisymétrie à travers la formule  $[\omega \wedge \varphi](X \wedge Y) := \omega(X) \cdot \varphi(Y) - \omega(Y) \cdot \varphi(X)$ . D'un point de vue philosophique, il est frappant de voir ressurgir, au cœur même de la théorie des équations différentielles, le concept d'élément bidimensionnel qu'avait conceptualisé Grassmann par des voies abstraites autonomes. Il y a ici, dans la différenciation conceptuelle d'une forme différentielle par rapport à elle-même, comme *un déchirement nécessaire du spatial unidimensionnel qui le bidimensionnalise et l'antisymétrise du même coup*. Le différentiel spatial du différentiel engendre sa propre géométrie, et c'est nécessairement celle de Grassmann.

<sup>30</sup> Ce n'est pas la première fois que l'on constate, en comparant la théorie classique avec le langage moderne, une interversion des rôles entre le vectoriel et le différentiel, à cause du symbole newtonien plurivoque «  $dx$  », puisque déjà dans la définition classique d'un  $ds^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{ij}(x) dx^i dx^j$  riemannien, les différentielles  $dx^i$  devraient être considérées comme des vecteurs tangents infinitésimaux.

**5. Torsion d'une connexion affine.** Grâce à ces préliminaires, nous pouvons maintenant présenter les tenseurs invariants qu'on associe (d'après Élie Cartan) aux connexions en calculant mécaniquement des covariants bilinéaires. Formellement<sup>31</sup>, la *torsion* d'une connexion définie par un repère mobile  $(\mathbf{m}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  satisfaisant  $\delta_{dx} \mathbf{m} = \omega^i \mathbf{e}_i$  et  $\delta_{dx} \mathbf{e}_i = \omega^j_i \mathbf{e}_j$ , est la collection des  $n$  formes différentielles de degré deux  $\Omega^1, \dots, \Omega^n$  définies par :

$$\boxed{\Omega^i := d\omega^i - \omega^k \wedge \omega^i_k},$$

où le symbole  $d$  désigne la différentiation extérieure. Pour éclairer cette définition, signalons que ces 2-formes  $\Omega^i$  mesurent la non-commutation des déplacements infinitésimaux de l'origine  $\mathbf{m}$  du repère mobile le long d'un parallélogramme-test : si en effet on considère deux déplacements différentiels distincts  $dx'$  et  $dx''$ , on peut calculer<sup>32</sup> soigneusement :

$$\begin{aligned} \delta_{dx'} \delta_{dx''} \mathbf{m} - \delta_{dx''} \delta_{dx'} \mathbf{m} &= \delta_{dx'} [\omega^i(dx'') \cdot \mathbf{e}_i] - \delta_{dx''} [\omega^i(dx') \cdot \mathbf{e}_i] \\ &= \delta_{dx'} [\omega^i(dx'')] \cdot \mathbf{e}_i + \omega^i(dx'') \cdot \delta_{dx'} [\mathbf{e}_i] - \\ &\quad - \delta_{dx''} [\omega^i(dx')] \cdot \mathbf{e}_i - \omega^i(dx') \cdot \delta_{dx''} [\mathbf{e}_i] \\ &= d\omega^i(dx' \wedge dx'') \cdot \mathbf{e}_i + \omega^i(dx'') \omega^j_i(dx') \cdot \mathbf{e}_j - \\ &\quad - \omega^i(dx') \omega^j_i(dx'') \cdot \mathbf{e}_j \\ &= d\omega^i(dx' \wedge dx'') \cdot \mathbf{e}_i - [\omega^k(dx') \omega^i_k(dx'') - \omega^k(dx'') \omega^i_k(dx')] \mathbf{e}_i \\ &= d\omega^i(dx' \wedge dx'') \cdot \mathbf{e}_i - [\omega^k \wedge \omega^i_k](dx' \wedge dx'') \cdot \mathbf{e}_i \\ &= \Omega^i(dx' \wedge dx'') \cdot \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Cette non-commutation s'exprime donc par l'action de la 2-forme vectorielle de torsion  $\Omega^i \cdot \mathbf{e}_i$  sur le 2-plan infinitésimal  $dx' \wedge dx''$  du parallélogramme-test. Nous exposerons dans un instant (Section 5) une interprétation géométrique macroscopique de la torsion plus immédiatement riche en substance pour la pensée intuitive et qui éclairera cette dénomination.

**5. Réexpression dans la base définie par le repère mobile.** Nous possédons deux bases de 2-formes, à savoir les  $dx^i \wedge dx^j$  pour  $1 \leq i < j \leq n$  et les  $\omega^k \wedge \omega^l$ , avec  $1 \leq k < l \leq n$ , qui sont l'une et l'autre au nombre de  $\frac{n(n-1)}{2}$ . D'après le « principe d'expression » qui pilote automatiquement certains actes de calculs en mathématiques, chaque  $\Omega^i$  doit donc pouvoir s'exprimer comme combinaison linéaire des 2-formes élémentaires  $\omega^k \wedge \omega^l$  :

$$\Omega^i = \Lambda^i_{kl} \cdot \omega^k \wedge \omega^l,$$

<sup>31</sup> À moins qu'il ne ressente le devoir impératif de reconstruire par lui-même les éléments fondamentaux d'une théorie qui lui est inconnue, le lecteur se référera au paragraphe suivant pour un exposé géométrique du concept de torsion.

<sup>32</sup> Lors du passage à la quatrième ligne, on a regroupé le premier et le troisième terme de l'égalité précédente pour faire apparaître le covariant bilinéaire que l'on a écrit avec l'opérateur  $d$ , et on a appliqué les formules donnant  $\delta_{dx'} [\mathbf{e}_i]$  et  $\delta_{dx''} [\mathbf{e}_i]$ ; lors du passage à la sixième ligne, on a renommé  $i$  et  $k$  les deux indices  $j$  et  $i$  et observé qu'apparaissait naturellement les 2-formes  $\omega^k \wedge \omega^i_k$ .

ce qui fait apparaître certaines fonctions  $\Lambda_{kl}^i = \Lambda_{kl}^i(x, \lambda)$ . Puisque la somme porte sur tous les indices  $k$  et  $l$  de 1 à  $n$  et puisque  $\omega^k \wedge \omega^l = -\omega^l \wedge \omega^k$ , on peut supposer sans perte de généralité que ces coefficients sont antisymétriques par rapport à leurs indices inférieurs :

$$\Lambda_{kl}^i = -\Lambda_{lk}^i,$$

de telle sorte que l'on peut aussi écrire :

$$\Omega^i = 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \Lambda_{kl}^i \cdot \omega^k \wedge \omega^l.$$

L'interprétation géométrique du tenseur de torsion  $\Lambda_{kl}^i$  sera fournie dans un instant.

**5. Courbure d'une connexion affine.** Mentionnons brièvement que la *courbure* de la connexion définie par le repère mobile  $(\mathbf{m}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  est, d'un point de vue formel, la collection des 2-formes :

$$\boxed{\Omega_i^j := d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j},$$

que l'on peut aussi décomposer dans la base des 2-formes  $(\omega^k \wedge \omega^l)_{1 \leq k < l \leq n}$

$$\Omega_i^j = A_{jkl}^i \cdot \omega^k \wedge \omega^l = 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} A_{jkl}^i \cdot \omega^k \wedge \omega^l,$$

ce qui fait apparaître un *tenseur de torsion*  $A_{jkl}^i$  à quatre indices. Puisque cet article est intégralement consacré aux structures de courbure identiquement nulle, *i.e.* satisfaisant  $A_{jkl}^i = 0$ , nous nous contenterons de signaler, en complète analogie avec la torsion, que que *ces 2-formes  $\Omega_i^j$  mesurent la non-commutation des déplacements infinitésimaux des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  du repère mobile le long d'un parallélogramme-test :*

$$\begin{aligned} \delta_{dx'} \delta_{dx''} \mathbf{e}_i - \delta_{dx''} \delta_{dx'} \mathbf{e}_i &= \delta_{dx'} [\omega_i^j(dx'') \cdot \mathbf{e}_j] - \delta_{dx''} [\omega_i^j(dx') \cdot \mathbf{e}_j] \\ &= \delta_{dx'} [\omega_i^j(dx'')] \cdot \mathbf{e}_j + \omega_i^j(dx'') \cdot \delta_{dx'} [\mathbf{e}_j] - \\ &\quad - \delta_{dx''} [\omega_i^j(dx')] \cdot \mathbf{e}_j - \omega_i^j(dx') \cdot \delta_{dx''} [\mathbf{e}_j] \\ &= d\omega_i^j(dx' \wedge dx'') \cdot \mathbf{e}_j + \omega_i^j(dx'') \omega_k^j(dx') \cdot \mathbf{e}_k - \omega_i^j(dx') \omega_k^j(dx'') \cdot \mathbf{e}_k \\ &= d\omega_i^j(dx' \wedge dx'') \cdot \mathbf{e}_j - [\omega_i^k(dx') \omega_k^j(dx'') - \omega_i^k(dx'') \omega_k^j(dx')] \cdot \mathbf{e}_j \\ &= d\omega_i^j(dx' \wedge dx'') \cdot \mathbf{e}_j - [\omega_i^k \wedge \omega_k^j](dx' \wedge dx'') \\ &= \Omega_i^j(dx' \wedge dx'') \cdot \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

**Résumé.** Étant donné un repère mobile  $(\mathbf{m}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  dépendant de  $x$  et éventuellement d'autres paramètres  $\lambda$ , le défaut de commutativité entre deux différentiations  $\delta_{dx'}(\cdot)$  et  $\delta_{dx''}(\cdot)$  effectuées, sur l'origine  $\mathbf{m}$  du repère et sur ses vecteurs  $\mathbf{e}_i$ , dans deux directions infinitésimales distinctes  $dx'$  et  $dx''$  :

$$\boxed{\begin{aligned} (\delta_{dx'} \delta_{dx''} - \delta_{dx''} \delta_{dx'}) \mathbf{m} &= \Omega^i(dx' \wedge dx'') \cdot \mathbf{e}_i \\ (\delta_{dx'} \delta_{dx''} - \delta_{dx''} \delta_{dx'}) \mathbf{e}_i &= \Omega_i^j(dx' \wedge dx'') \cdot \mathbf{e}_j \end{aligned}}$$

est quantifié par l'action, sur le bivecteur  $dx' \wedge dx''$ , de deux collections de 2-formes différentielles :

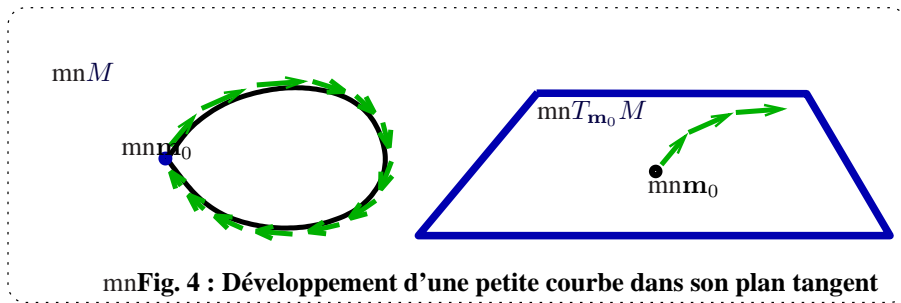
$$\begin{cases} \Omega^i := d\omega^i - \sum_k \omega^k \wedge \omega_k^i \\ \Omega_i^j := d\omega_i^j - \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j \end{cases},$$

que l'on calcule directement à partir des 1-formes fondamentales  $\omega^i$  et  $\omega_i^j$  qui expriment les variations infinitésimales du repère :

$$\begin{cases} \delta_{dx} \mathbf{m} = \omega^i \mathbf{e}_i \\ \delta_{dx} \mathbf{e}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_j \end{cases}.$$

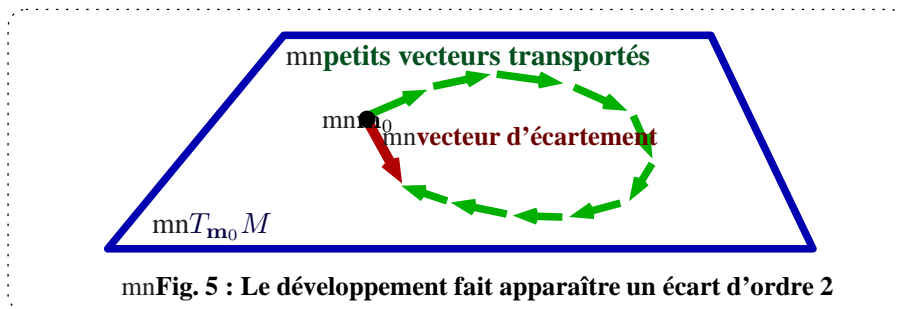
§6. GÉOMÉTRIE DU TENSEUR DE TORSION

**6. Écart à la fermeture d'une courbe développée.** Expliquons intuitivement ce à quoi correspond la torsion de notre connexion affine. On se donne une petite courbe lisse tracée dans la variété  $M$  partant d'un point  $m_0$  et y revenant. Ensuite, on approxime cette courbe par une suite de segment infinitésimaux, que l'on envisage comme de tout petits vecteurs tangents collés à la queue-leu-leu sur la courbe.



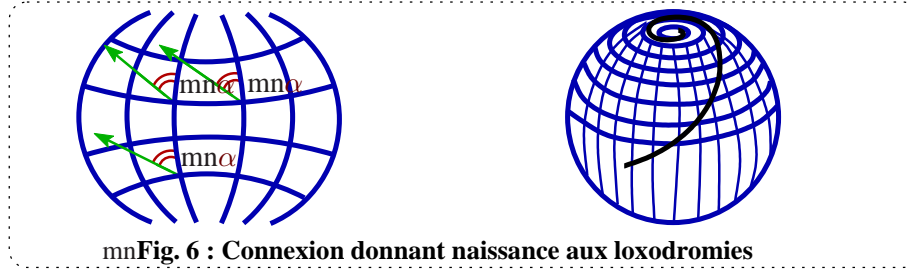
mnFig. 4 : Développement d'une petite courbe dans son plan tangent

Grâce au déplacement parallèle que définit la connexion, on peut transporter le long de la courbe chacun de ces tout petits vecteurs dans le plan tangent fixe  $T_{m_0}M$  et les mettre bout à bout dans ce plan. En général, bien que la courbe tracée dans  $M$  se referme, la courbe verte tracée dans  $T_{m_0}M$  *ne se referme pas*.



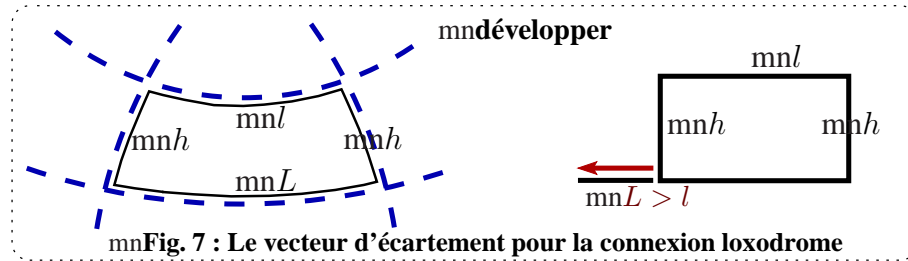
mnFig. 5 : Le développement fait apparaître un écart d'ordre 2

**6. Connexion loxodrome.** L'exemple le plus simple d'un tel ph terrestre : si nous convenons que deux vecteurs tangents à la surface de la Terre sont *parallèles* s'ils font le même angle  $\alpha$  avec le méridien qui passe par leur origine<sup>33</sup> :



mnFig. 6 : Connexion donnant naissance aux loxodromies

et si nous considérons un petit parallélogramme marin tracé au voisinage du Tropique du Cancer qui est formé de deux arcs de méridiens de même longueur  $h$  et de deux arcs de parallèle de longueur distinctes  $l < L$  :



mnFig. 7 : Le vecteur d'écartement pour la connexion loxodrome

alors le développement de ce parallélogramme courbe dans le plan tangent du point inférieur gauche nous fournit un rectangle *non fermé* dont la base horizontale décalée fait apparaître un segment de longueur  $L - l$  qui n'est autre que le vecteur d'écartement. On vérifie que cette différence  $L - l$  est de l'ordre de l'aire  $hl$  du rectangle.

**6. Grassmannienne et torsion.** Revenons au développement d'une petite courbe en général. Par définition, le *vecteur de torsion* mesure le vecteur d'écartement que l'on recalibre en le divisant par l'aire de la « membrane » qui est « enserrée » dans  $M$  par la petite courbe fermée. En première approximation, une telle courbe infinitésimale de forme régulière peut être supposée essentiellement dirigée par un plan de dimension 2. Or, relativement au système de repères  $(e_1, \dots, e_n)$ , tout 2-plan se représente comme combinaison linéaire des  $\frac{n(n-1)}{2}$  plans fondamentaux constitués

<sup>33</sup> Les géodésiques sont alors des courbes appelées depuis le 17<sup>ièmes</sup> siècle *loxodromies* dans la marine. Lorsqu'on exprime la métrique sphérique dans des coordonnées obtenues par projection sur le plan tangent au pôle Nord :

$$ds^2 = R^2 (du^2 + \cos^2 u dv^2),$$

ces loxodromies ont pour équation :

$$v \cotan \alpha = R \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2R} \right),$$

ce qui montre que le pôle est un foyer de la trajectoire autour duquel des navires tourneraient indéfiniment.

par les couples ordonnés de vecteurs  $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)$  avec  $1 \leq k < l \leq n$ . Donc il suffit de connaître la torsion associée à un parallélogramme infinitésimal enserré par deux vecteurs  $(\varepsilon \mathbf{e}_k, \varepsilon \mathbf{e}_l)$  pour  $\varepsilon > 0$  petit. Ainsi, le vecteur de torsion associé à une courbe infinitésimale tracée dans un tel 2-plan est défini géométriquement par :

$$\mathbf{Vecteur\ Torsion} := \lim \frac{\mathbf{Écartement}}{\mathbf{aire}}.$$

Si l'on envisage la torsion en tant que tenseur :

$$\Lambda_{kl}^i$$

il y a donc nécessairement *trois* indices :

- un couple *antisymétrique* d'indices  $(k, l)$  qui se rapportent l'ensemble de tous les 2-plans de coordonnées  $\text{Vect}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)$  avec  $1 \leq k < l \leq n$ , qui sont naturellement représentés par le bivecteur  $\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l$  ;
- un indice  $i$  relatif à la décomposition de la 2-forme torsion

$$\Omega^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \Omega^i \cdot \mathbf{e}_i + \dots + \Omega_n \cdot \mathbf{e}_n,$$

dans la base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ .

$\Lambda_{kl}^i :=$ <b>composante <math>i</math>-ième du vecteur de torsion</b> $\Omega^i(\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l) \cdot \mathbf{e}_i$ <b>associé au 2-plan <math>\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l</math></b>
---

Et par linéarité, on trouve immédiatement la torsion d'un 2-plan quelconque  $\sum_{k < l} a^{kl} \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l$ , où  $a^{kl} \in \mathbb{R}$ .

Ainsi s'exprime donc la signification géométrique des 2-formes  $\Omega^i$  qui apparaissent dans les identités algébriques :

$d\omega^i - \omega^k \wedge \omega_k^i = \Omega^i = \Lambda_{kl}^i \cdot \omega^k \wedge \omega^l$ .
---

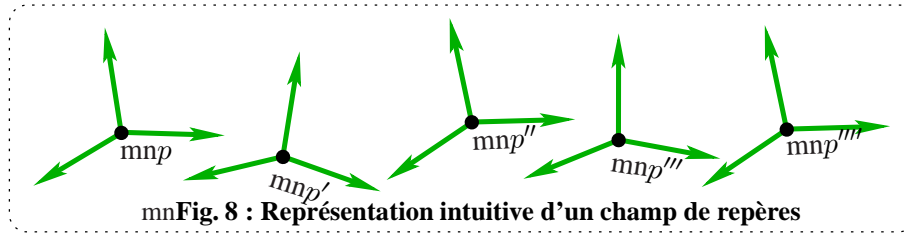
### §7. LE Fernparallelismus D'EINSTEIN

**7. Accéder aux spéculations.** À présent, comment Einstein introduisit-il ses équations de champ unifié ? Nous nous référerons à ses deux leçons [Ei1930b] prononcées à l'Institut Henri Poincaré les 8 et 12 novembre 1929. Cartan, qui avait déjà consacré beaucoup d'énergie aux espaces à connexion riemanniennes en liaison avec la relativité générale ([Ca1922, Ca1923b, Ca1924, Ca1925a, Ca1925b, Ca1928]) mais qui n'était pas, jusqu'à présent, entré en contact rapproché avec l'illustre physicien se devait naturellement d'assister aux conférences d'Einstein. Des éléments précieux apparaissent dans leur correspondance [De1979] éditée par Robert Debever, car ils échangèrent des spéculations délicates sur les systèmes sur-déterminés d'équations aux dérivées partielles qui seraient susceptibles, en premier lieu, de posséder un sens physique, et qui seraient éventuellement aptes, en second lieu, à recevoir en leur sein l'unification des champs.

**7. Système absolu de repères.** Sur une variété  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension  $n \geq 2$ , on se donne un système de  $n$  champs de vecteurs

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$$

qui sont linéairement indépendants en tout point  $p \in M$ . Les invariants de torsion associés à une telle structure sont au fondement de la tentative de théorie unitaire d'Einstein.



À la fin des années 1920, Einstein appelait ce système *n-Bein*, ce que l'on traduisait à l'époque par *n-pode*, et qu'aujourd'hui on appelle *frame* dans la littérature anglo-saxonne et *repère* en français. Les considérations étant locales, on peut supposer sans perte de généralité que  $M = \mathbb{R}^n$  est saisie dans un système de coordonnées curvilignes  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , appelées *coordonnées de Gauss* par Einstein ([Ei1930b]). En relativité générale et dans la théorie électromagnétique, ces coordonnées sont au nombre de quatre :

$$(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

et l'on dispose gratuitement de quatre champs de vecteurs linéairement indépendants naturellement associés :

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial}{\partial x^4}.$$

Pour saisir concrètement les quatre champs de vecteurs  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ , on doit les décomposer suivant la base des  $\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ , ce qui donne :

$$\mathbf{e}_s = h_s^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + h_s^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + h_s^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + h_s^4 \frac{\partial}{\partial x^4},$$

$1 \leq s \leq 4$ , au moyen de 16 **fonctions fondamentales**  $h_s^\nu = h_s^\nu(x)$  des quatre variables  $x$ , lesquelles paramètrent visiblement l'ensemble de tous les systèmes possibles de repères dans  $\mathbb{R}^4$ .

Inversement, si on introduit la matrice inverse  $h^t_\nu$  de la matrice  $h_s^\nu$  (noter l'inversion de hauteur que subissent les deux indices placés l'un à la suite de l'autre), ces deux matrices étant par définition liées entre elles par les relations :

$$\boxed{\delta_t^s = h_t^\nu h_s^\nu} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta_\mu^\nu = h^s_\mu h_s^\nu},$$



où  $\delta_i^j$  désigne le symbole de Kronecker<sup>34</sup>, alors chaque champ  $\frac{\partial}{\partial x^\nu}$  s'exprime comme suit en fonction des  $\mathbf{e}_s$  :

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} = h^t{}_\nu \mathbf{e}_t.$$

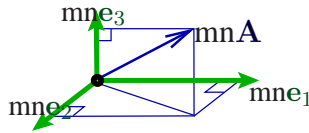
Tout champ de vecteurs quelconque  $\mathbf{A}$  se décompose alors de deux manières possibles :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + A^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + A^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + A^4 \frac{\partial}{\partial x^4} \\ &= \underline{A}^1 \mathbf{e}_1 + \underline{A}^2 \mathbf{e}_2 + \underline{A}^3 \mathbf{e}_3 + \underline{A}^4 \mathbf{e}_4, \end{aligned}$$

et la relation entre les deux systèmes de coefficients  $A^\mu$  et  $\underline{A}^s$  pour le même vecteur  $\mathbf{A} = A^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \underline{A}^s \mathbf{e}_s$  s'obtient en insérant soit  $\mathbf{e}_s = h_s{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  dans la seconde représentation, soit  $\frac{\partial}{\partial x^\nu} = h^s{}_\nu \mathbf{e}_s$  dans la première, ce qui nous donne :

$$A^\nu = h_s{}^\nu \underline{A}^s \quad \text{et} \quad \underline{A}^s = h^s{}_\nu A^\nu.$$

On peut définir une métrique riemannienne associée en déclarant *a priori* que le champ de repères  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$  est orthonormé,



d'où par la règle de Pythagore :

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \sum_s A_s^2 = \sum_s h^s{}_\mu h^s{}_\nu A^\mu A^\nu.$$

Ainsi, les coefficients de la métrique correspondante  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  sont donnés par :

$$g_{\mu\nu} := h^s{}_\mu h^s{}_\nu.$$

En relativité générale, il y a exactement **10** potentiels de gravitation  $g_{\mu\nu}$  définissant le  $ds^2$  pseudo-riemannien ( $1 \leq \mu \leq \nu \leq 4$ ), en tenant compte de la symétrie  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ . Ici, il y a en tout **16** fonctions  $h_s{}^\nu$ , ce qui ajoute **6** degrés de liberté supplémentaires, lesquels pourraient éventuellement « héberger » les six composantes du champ électromagnétique classique.

**7. Connexion associée à un parallélisme absolu.** Pour définir une connexion, déclarons qu'un vecteur  $\mathbf{A}$  en un point  $p$  est *parallèle* à un autre vecteur  $\mathbf{A}'$  en un autre point  $p'$  si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}'$  ont les mêmes composantes dans les repères respectifs  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  en  $p$  et  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  en  $p'$ . Aussi simple que dans le cas euclidien, le parallélisme ainsi défini est donc *intrinsèque*<sup>35</sup>, et de plus, il ne dépend pas d'un chemin que l'on devrait éventuellement suivre<sup>36</sup> pour aller de  $p$  en  $p'$ , autrement

<sup>34</sup> — à ne pas confondre avec l'opérateur infinitésimal  $\delta_{dx}(\cdot)$  —, qui est égal à 1 lorsque ses deux indices coïncident, et qui est nul sinon.

<sup>35</sup> — parce que tout changement de coordonnées emporte avec lui le système de  $n$  champs de vecteurs, et parce que l'égalité des composantes de deux vecteurs par rapport à ce repère est préservée par la transformation linéaire tangente —

<sup>36</sup> Dans la théorie générale des connexions, en présence de courbure, le transport par parallélisme ne peut être défini que le long d'une courbe tracée dans la variété, et il dépend fortement des courbes.

dit : le parallélisme est *absolu*, exactement comme en géométrie élémentaire. En Allemand, on l'appelle aussi *Fernparallelismus* pour signifier que la comparaison entre vecteurs possède un sens non seulement au niveau infinitésimal, mais aussi à distance finiment éloignée. De plus, le parallélisme reste le même si l'on fait un changement de repère global à coefficients constants  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  indépendants de  $p$  : le vecteur  $M \mathbf{A}'$  en un point arbitraire  $p'$  est en effet parallèle au vecteur  $M \mathbf{A}$  en  $p$ .

**7. Résumé.** Étant donné une variété  $a$ -métrique  $M$  munie d'un champ  $C^\infty$  de repères  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ , on peut y définir une métrique riemannienne en déclarant que les repères en question sont orthonormés. Réciproquement, si la variété  $M$  est munie à la fois d'un champ de repères  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  et d'une métrique riemannienne, on peut orthonormaliser les repères grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Ce procédé classique consiste à prendre le vecteur  $\mathbf{e}_1 := \mathbf{e}'_1 / \|\mathbf{e}'_1\|$  de norme riemannienne égale à 1 qui est colinéaire à  $\mathbf{e}_1$ , puis à définir le vecteur  $\mathbf{e}'_2 := \frac{\mathbf{e}_2 - \lambda \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_2 - \lambda \mathbf{e}_1\|}$  de norme 1, où  $\lambda$  désigne le produit scalaire entre  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ , d'où  $\mathbf{e}'_2$  est orthogonal à  $\mathbf{e}'_1$ , et ainsi de suite.

**7. Co-repère dual.** La collection des  $n$  formes différentielles définies par

$$\omega^t := h^t{}_\nu dx^\nu$$

est *duale* du repère  $\mathbf{e}_s$ , au sens où  $\omega^t(\mathbf{e}_s) = h^t{}_\nu h_s{}^\nu = \delta_s^t$ . En général, on dit qu'un  $n$ -uplet  $(\omega^1, \dots, \omega^n)$  de formes différentielles linéairement indépendantes en tout point  $x$  constitue un « *co-repère* », le préfixe « *co-* » référant à la dualité.

**7. Formules analytiques définissant la connexion.** D'après la théorie classique (cf. Section 3 et [Ei1930b]), les coefficients de Christoffel  $\Delta^\mu{}_{\rho\nu} = \Delta^\mu{}_{\rho\nu}(x)$  d'une connexion quelconque interviennent dans formule donnant le déplacement parallèle infinitésimal d'un vecteur  $A^\mu$  :

$$\begin{aligned} A^\mu|_{x+dx} - A^\mu|_x &= \delta_{dx} A^\mu \\ &= \Delta^\mu{}_{\rho\nu} A^\rho dx^\nu. \end{aligned}$$

Pour la connexion naturellement associée à un parallélisme absolu défini par le champ de repères  $\mathbf{e}_s = h_s{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ , les  $\Delta^\mu{}_{\rho\nu}$  sont en fait uniquement déterminés par des formules analytiques simples en fonction des 16 quantités fondamentales  $h_s{}^\nu$ , et de leurs inverses  $h^s{}_\rho$ .

En effet, rappelons que par définition deux vecteurs  $\underline{A}^s \mathbf{e}_s$  et  $(\underline{A}^s + \delta_{dx}(\underline{A}^s)) \mathbf{e}_s$  basés en  $x$  et en  $x+dx$  sont parallèles si et seulement si ils ont *mêmes* composantes, à savoir  $\delta_{dx}(\underline{A}^s) = 0$  pour tout indice  $s$ , ce que l'on exprime comme suit en revenant aux composantes de Gauss  $A^\mu$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{dx}(\underline{A}^s) \\ &= \delta_{dx}(h^s{}_\rho A^\rho) \\ &= \frac{\partial h^s{}_\rho}{\partial x^\nu} dx^\nu A^\rho + h^s{}_\rho \delta_{dx}(A^\rho). \end{aligned}$$

Multiplions à présent chacune de ces identités par  $h_s^\mu$ , ce qui introduit une sommation supplémentaire  $\sum_s$ , et ce, en tenant compte pour le deuxième terme de  $h_s^\mu h^s_\rho = \delta_\rho^\mu$ , et factorisons le tout :

$$\begin{aligned} 0 &= h_s^\mu \frac{\partial h^s_\rho}{\partial x^\nu} dx^\nu A^\rho + \delta_{dx}(A^\mu) \\ &= h_s^\mu \frac{\partial h^s_\rho}{\partial x^\nu} dx^\nu A^\rho + \Delta_{\rho\nu}^\mu A^\rho dx^\nu \\ &= \left( h_s^\mu \frac{\partial h^s_\rho}{\partial x^\nu} + \Delta_{\rho\nu}^\mu \right) A^\rho dx^\nu, \end{aligned}$$

d'où nous déduisons  $\Delta_{\rho\nu}^\mu = -h_s^\mu \frac{\partial h^s_\rho}{\partial x^\nu}$  pour tous indices  $\mu, \rho$  et  $\nu$ .

**Convention 7..** La différentiation ordinaire par rapport à une coordonnées  $x^\nu$  sera désignée au moyen d'une virgule :  $(\cdot)_{,\nu}$ , par exemple  $\frac{\partial h^s_\rho}{\partial x^\nu} \equiv h^s_{\rho,\nu}$ .

Pour obtenir une autre expression équivalente de  $\Delta_{\rho\nu}^\mu$ , différentions par rapport à  $x^\nu$  l'identité  $\delta_\rho^\mu = h_s^\mu h^s_\rho$  :

$$0 = h_{s,\nu}^\mu h^s_\rho + h_s^\mu h^s_{\rho,\nu},$$

et remplaçons dans l'expression obtenue à l'instant :

$$\boxed{\Delta_{\rho\nu}^\mu = -h_{s,\nu}^\mu h^s_\rho = h^s_\rho h_{s,\nu}^\mu}.$$

**7. Transformations de (co)vecteurs et de (co)repères.** À travers un changement quelconque de coordonnées locales  $\bar{x} = \bar{x}(x)$  dont l'inverse sera simplement noté  $x = x(\bar{x})$ , le transport des différentielles se calcule grâce aux formules automatiques de différentiation :

$$dx^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\rho} d\bar{x}^\rho \quad \text{et} \quad d\bar{x}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\rho} dx^\rho.$$

Quant au transport de champ de vecteurs, il s'obtient en dérivant par rapport à  $x^\nu$  l'identité fonctionnelle  $f(x) = \bar{f}(\bar{x}(x))$  et en différenciant par rapport à  $\bar{x}^\nu$  l'identité inverse  $\bar{f}(\bar{x}) = f(x(\bar{x}))$ , ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\rho} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho}$$

À travers un tel changement de coordonnées, voici comment se transforme le champ de repères  $e_s$  ainsi que le champ dual  $\omega^t$  de formes différentielles :

$$\begin{aligned} e_s &= h_s^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho} & \omega^t &= h^t_\rho dx^\rho \\ &= h_s^\rho \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} & &= h^t_\rho \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{x}^\nu, \\ &= \bar{h}_s^\nu \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} = \bar{e}_s, & &= \bar{h}^t_\nu d\bar{x}^\nu = \bar{\omega}^t \end{aligned}$$

d'où nous déduisons la règle de correspondance entre fonctions coefficients :

$$\boxed{\bar{h}_s^\nu = h_s^\rho \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\rho}} \quad \text{et} \quad \boxed{\bar{h}^t_\nu = h^t_\rho \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu}}.$$

**7. Torsion, courbure et platitude.** Par définition, dans la théorie classique (différente de celle du repère mobile), le tenseur de torsion mesure le défaut de symétrie des coefficients de Christoffel par rapport à leurs deux indices inférieurs :

$$\begin{aligned}\Lambda_{\rho\nu}^{\mu} &:= \Delta_{\rho\nu}^{\mu} - \Delta_{\nu\rho}^{\mu} \\ &= h^s{}_{\rho} h_{s,\nu}^{\mu} - h^s{}_{\nu} h_{s,\rho}^{\mu}.\end{aligned}$$

On peut vérifier par un calcul direct que c'est bien un tenseur<sup>37</sup>, *i.e.* que l'on a  $\overline{\Delta}_{\rho\nu}^{\mu} = \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \overline{x}^{\nu}} \Delta_{\rho_1\nu_1}^{\mu_1}$  pour tout changement de coordonnées  $\overline{x} = \overline{x}(x)$ . Observons que notre tenseur de torsion ne contient que des dérivées premières des composantes fondamentales  $h_s{}^{\nu}$ .

Classiquement, du point de vue des invariants de courbure et de torsion, il existe une certaine réciprocity-miroir entre les structures riemanniennes et les champs de repères.

- **Variétés (pseudo)riemanniennes :** Dans la théorie du parallélisme riemannien due à Schouten et à Levi-Civita, la torsion *s'annule identiquement*, parce que les coefficients de Christoffel  $\Gamma_{\rho\nu}^{\mu}$ , définis en fonction de la pseudométrie  $g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$  par  $\Gamma_{\rho\nu}^{\mu} := \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{\alpha\nu} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\rho} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g_{\rho\nu} \right)$ , sont symétriques par rapport à leurs indices inférieurs :  $\Gamma_{\rho\nu}^{\mu} = \Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ ; cependant, le tenseur de courbure riemannienne est en général non nul en tout point.
- **Structures à parallélisme absolu :** Dans la théorie d'Einstein-Cartan, la courbure pour la métrique pythagoricienne s'annule identiquement, parce que le transport par parallélisme des vecteurs le long de parallélogrammes infinitésimaux fixe *de facto* leur orientation et leur direction; cependant, le tenseur de torsion est en général non nul en tout point.

**Proposition 7.** *Un parallélisme absolu défini par un champ de repères  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  est équivalent, via une transformation locale  $x \mapsto y = y(x)$ , à l'espace des  $(y^1, y^2, \dots, y^n)$  muni des repères triviaux associés :*

$$\left( \frac{\partial}{\partial y^1}, \frac{\partial}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right)$$

<sup>37</sup> En effet, en appliquant les formules de transformation précédentes, en abrégant par  $(\cdot)_{,\tau}$  la différentiation par rapport à  $\overline{x}^{\nu}$ , en développant  $\overline{h}_s{}^{\mu}_{,\tau} = \overline{h}_s{}^{\mu}{}_{,\lambda} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\nu}}$  pour passer à la deuxième ligne :

$$\begin{aligned}\overline{\Lambda}_{\rho\nu}^{\mu} &= \overline{h}^s{}_{\rho} \overline{h}_s{}^{\mu}_{,\nu} - \overline{h}^s{}_{\nu} \overline{h}_s{}^{\mu}_{,\rho} \\ &= h^s{}_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \overline{h}_s{}^{\mu}{}_{,\lambda} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\nu}} - h^s{}_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\nu}} \overline{h}_s{}^{\mu}{}_{,\lambda} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \\ &= h^s{}_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \left[ h_s{}^{\beta} \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \right]_{,\lambda} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\nu}} - h^s{}_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\nu}} \left[ h_s{}^{\beta} \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \right]_{,\lambda} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \\ &= h^s{}_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \left( h_s{}^{\beta}{}_{,\lambda} \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} + h_s{}^{\beta} \frac{\partial^2 \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\lambda}} \right) \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\nu}} - h^s{}_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\nu}} \left( h_s{}^{\beta}{}_{,\lambda} \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} + h_s{}^{\beta} \frac{\partial^2 \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\lambda}} \right) \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \\ &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\nu}} \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \left( h^s{}_{\alpha} h_s{}^{\beta}{}_{,\lambda} - h^s{}_{\lambda} h_s{}^{\beta}{}_{,\alpha} \right) + h^s{}_{\alpha} h_s{}^{\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\nu}} \frac{\partial^2 \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\lambda}} - h^s{}_{\alpha} h_s{}^{\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \frac{\partial^2 \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\lambda}} \\ &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\nu}} \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \Lambda_{\alpha\lambda}^{\beta} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\nu}} \frac{\partial^2 \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \frac{\partial^2 \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\lambda}} \\ &= \frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial \overline{x}^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \overline{x}^{\nu}} \Lambda_{\rho_1\nu_1}^{\mu_1}.\end{aligned}$$

si et seulement si *tous ses coefficients de torsion s'annulent identiquement*.

*Démonstration.* Dans le cas (pseudo)riemannien, les espaces dits « plats » qui ont un tenseur de courbure identiquement nul sont localement équivalents à l'espace euclidien (minkowskien) : la dégénérescence complète des invariants ramène au modèle standard, « plat », sans aucune courbure.

Ici, les arguments sont plus expéditifs que dans le cas riemannien, où la preuve (cf. [Spi1970]) nécessite une préparation adaptée du théorème de Frobenius. Supposons en effet que

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \Delta_{\rho\nu}^{\mu} - \Delta_{\nu\rho}^{\mu} \\ &= -h_s^{\mu} (h^s_{\rho,\nu} - h^s_{\nu,\rho}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $h^s_{\rho,\nu} = h^s_{\nu,\rho}$  pour tous indices  $\rho, \nu$ , et  $s$ . À  $s$  fixé, chaque système extrait de  $n^2$  équations aux dérivées partielles s'intègre facilement<sup>38</sup> : pour tout  $s$  fixé, il existe donc une fonction  $\psi_s = \psi_s(x)$  telle que  $h^s_{\rho} = \frac{\partial\psi_s}{\partial x^{\rho}}$  — d'où trivialement  $0 = h^s_{\rho,\nu} - h^s_{\nu,\rho}$  — et il suffit alors d'introduire le changement de coordonnées  $x \mapsto \psi(x) =: y$  — qui est automatiquement un difféomorphisme local puisque par hypothèse la matrice des  $h^s_{\rho} = \frac{\partial\psi_s}{\partial x^{\rho}}$  est inversible — pour redresser chaque  $e_s = h_s^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$  en  $\frac{\partial}{\partial y^s}$  :

$$\frac{\partial}{\partial y^s} = \frac{\partial\psi_s}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = h_s^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}.$$

Réciproquement, le parallélisme-identité constant  $h_s^{\mu} = \delta_s^{\mu}$  possède bien une torsion nulle :  $\Lambda_{\rho\nu}^{\mu} = \delta_{\rho}^s (\delta_s^{\mu})_{,\nu} = 0$ . □

## 7. Connexion de Levi-Civita de la métrique riemannienne associée.

**7. Dérivée covariante de tenseurs.** Classiquement, les coefficients de Christoffel permettent de définir une notion intrinsèque de dérivée covariante des tenseurs, qui produit à nouveau des tenseurs. Par exemple, pour un tenseur  $A^{\mu}$  une fois contra-variant et pour un tenseur  $\omega_{\mu}$  une fois covariant, on définit :

$$A^{\mu}_{;\sigma} := A^{\mu}_{,\sigma} - A^{\alpha} \Delta_{\alpha\sigma}^{\mu} \quad \text{et} \quad \omega_{\mu;\sigma} := \omega_{\mu,\sigma} + \omega_{\alpha} \Delta_{\mu\sigma}^{\alpha}.$$

Enfin, la torsion intervient naturellement lorsqu'on mesure la non-commutativité des dérivées covariantes d'un tenseur  $T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}$  quelconque :

$$\boxed{T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}{}_{;\sigma;\tau} - T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}{}_{;\tau;\sigma} = T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}{}_{;\mu} \Lambda_{\sigma\tau}^{\mu}}.$$

Cette formule se vérifie aisément sur les tenseurs de petit rang et se généralise ensuite.

<sup>38</sup> Le rotationnel d'un champ de vecteurs s'annule si et seulement si ce champ est localement égal au gradient d'une fonction.

## §8. TENSEUR DE TORSION ET ÉQUIVALENCE

**8. Équivalences de co-repères.** Dès les années 1905–1910, en relation avec la théorie des groupes de transformation en dimension infinie, Cartan étudia le problème abstrait d'équivalence pour les systèmes absolus de co-repères, sans référence à la notion de connexion.

[OL1995]

**8. Théorème fondamental de Cartan.** *Les composantes  $\Pi_{\rho\nu}^\mu$  de la torsion accompagnées de toutes leurs dérivées covariantes par rapport à  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  :*

$$\Pi_{\rho\nu}^\mu, \Pi_{\rho\nu; \gamma_1}^\mu, \Pi_{\rho\nu; \gamma_1; \gamma_2}^\mu, \dots, \Pi_{\rho\nu; \gamma_1; \gamma_2; \dots; \gamma_k}^\mu, \dots$$

*constituent un système complet d'invariants différentiels du parallélisme absolu au sens suivant.*

• **Équivalence locale :** Si l'on se place localement au voisinage d'un point où l'application de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^\infty$

$$x \longmapsto \left( \Pi_{\rho\nu}^\mu(x), \Pi_{\rho\nu; \gamma_1}^\mu(x), \dots, \Pi_{\rho\nu; \gamma_1; \gamma_2; \dots; \gamma_k}^\mu(x), \dots \right)$$

est de rang maximal localement constant, disons égal à  $r$  (avec  $0 \leq r \leq n$ ), et si l'on choisit une sous-collection de  $r$  dérivées covariantes fondamentales de rang  $r$  par rapport à  $x$

$$\Pi_i(x) := \Pi_{\rho(i)\nu(i); \gamma_1(i); \gamma_2(i); \dots; \gamma_{k(i)}(i)}^\mu(x), \quad i = 1, \dots, r,$$

alors par le théorème du rang constant, toutes les **autres** dérivées covariantes s'expriment au moyen de certaines fonctions de ces  $\Pi_i$  :

$$\Pi_{\rho\nu; \gamma_1; \gamma_2; \dots; \gamma_k}^\mu \equiv \Phi_{\rho\nu\gamma_1 \dots \gamma_k}^\mu(\Pi_1, \dots, \Pi_r)$$

et **chacune de ces fonctions  $\Phi_{\rho\nu\gamma_1 \dots \gamma_k}^\mu$  est indépendante du système de coordonnées.** Par conséquent, ces fonctions sont exactement les mêmes pour deux systèmes de repères qui se déduisent l'un de l'autre par changement de coordonnées.

• **Résolution abstraite du problème d'équivalence :** Réciproquement, étant donné deux parallélismes absolus  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  et  $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n$  définis chacun dans leur propre système de coordonnées  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  et  $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ , il existe une transformation ponctuelle (un difféomorphisme local)  $x \longmapsto \bar{x}$  qui transforme le premier champ de repères en le second pourvu seulement que  $\bar{r} = r$  et que les dépendances fonctionnelles  $\Phi$  et  $\bar{\Phi}$  soient exactement les mêmes.

## §9. HISTORIQUE INITIAL DE LA CORRESPONDANCE ENTRE CARTAN ET EINSTEIN

**9. Deux conférences d'Einstein à l'Institut Henri Poincaré.** Le 9 novembre 1929, Einstein s'est déplacé à Paris pour recevoir le titre de *doctor honoris causa* de l'Université de Paris qui lui sera décerné dans le Grand Amphithéâtre de la Sorbonne en compagnie d'autres éminents savants, devant une large assemblée réunissant professeurs de droit, médecins, archéologues, historiens, hommes de lettres, chimistes, physiciens et mathématiciens. À cette occasion, le 8 et le 12 novembre,

Einstein est aussi invité à prononcer deux conférences à l'Institut Henri Poincaré, nouvellement créé un an auparavant. C'est au texte [Ei1930b] publié dans le premier volume des *Annales* de l'Institut et rédigé en français par Alexandre Proca à partir des deux leçons d'Einstein que nous allons nous référer, parce qu'il constitue la synthèse finale et détaillée de la tentative la plus connue de théorie unitaire, avant qu'Einstein ne l'abandonne brusquement pour s'engager en collaboration avec Walther Mayer vers des théories unitaires à la Kaluza-Klein en dimension  $\geq 5$ . Cette synthèse suit de très près l'article de revue [Ei1930a], soumis en août 1929, publié en décembre 1929 après un long délai éditorial et suivi, dans le même volume, d'une notice historique sur le parallélisme absolu que Cartan rédigea en français sous l'expresse demande d'Einstein.

**Tentative d'approche variationnelle.** Dès Juin 1928, Einstein avait entrevu une nouvelle possibilité géométrique pour élaborer une théorie unifiée de la gravitation et de l'électricité<sup>39</sup>. À une semaine d'intervalle, il fit paraître deux courtes notes aux *Sitzungsberichte* de l'Académie prussienne, dans lesquelles il introduisit les  $n$ -Bein, la connexion associée et son tenseur de torsion ainsi que les équations d'annulation de la courbure, afin de tenter de définir un lagrangien du type  $\mathcal{H} := \det(h_s^\mu) g^{\mu\nu} \Lambda_{\mu\beta}^\alpha \Lambda_{\nu\alpha}^\beta$  dont dériveraient, par un principe variationnel de type Euler-Lagrange, les équations recherchées pour un champ unifié. Peu de temps après, ces deux publications déclenchèrent une correspondance d'Einstein avec des physiciens et des géomètres contemporains, notamment avec Herman Müntz, Roland Weitzenböck, Cornelius Lanczos, Élie Cartan et Walther Mayer.

La structure mathématique des systèmes absolus de repères, développée principalement par Weitzenböck, Schouten et Cartan en rapport avec la théorie des connexions et avec les groupes de Lie devait donner lieu à d'élégants échanges épistolaires concernant la priorité scientifique, et l'enjeu grandissait au moment de la culmination « médiatique » . . . .

Après douze années de recherches accompagnées de multiples déceptions, j'ai maintenant découvert une structure métrique continue située entre les structures riemanniennes et la structure euclidienne, et dont la mise au point conduit à une théorie véritablement unifiée des champs\*.

**Correspondre pour signaler ses travaux.** Il est généralement admis qu'Einstein a retrouvé par lui-même ce concept géométrique, inspiré peut-être par la *Nahegeometrie* de Weyl et par les diverses variations conceptuelles que l'on peut faire subir aux notions physico-mathématiques qui sont susceptibles, dans leur être propre, d'être soumises à des déplacements infinitésimaux.

<sup>39</sup> Pour un historique détaillé de l'« orbite Einstein », fondé sur une analyse scrupuleuse des manuscrits et des lettres d'Einstein, le lecteur est renvoyé à l'excellente étude [Sa2006].

\* « Nach zwölf Jahren enttäuschungsreichen Suchens entdeckte ich nun eine metrische Kontinuumstruktur, welche zwischen der Riemannschen und der Euklidischen liegt, und deren Ausarbeitung zu einer wirklich einheitlichen Feldtheorie führt ». Über den gegenwärtigen Stand der Feldtheorie, in : Festschrift zum 70. Geburtstag von Prof. Dr. A. Stodola Zürich, Orell Füssli Verlag, 1929, 126–132 ; p. 130.

Toutefois, deux fait attestés historiquement retiendront notre attention. Dès l'été 1929, Einstein est confronté à deux éminents géomètres, Weitzenböck et Cartan, qui avaient déjà développé en eux-mêmes et pour eux-mêmes les aspects purement théoriques des structures à parallélisme absolu. Phénomène de « mode » traversant les communautés scientifiques<sup>40</sup> et favorisant la publication de certaines thématiques spécifiques, ou circulation inconsciente des idées que chacun (ré-)élabore dans son propre langage théorique sans se ressouvenir des conférences qui auraient posé à l'avance les jalons d'une réminiscence ultérieure, quelles qu'en soient la cause réelle ou factuelle, nous savons, grâce à la conservation de leur correspondance, comment Einstein et les deux géomètres différentiels se sont expliqués.

**L'épisode Weitzenböck.** Le 1<sup>er</sup> août 1929, Einstein reçoit une lettre de Roland Weitzenböck, alors professeur à l'Université d'Amsterdam, qui réclame la priorité scientifique au sujet de la connexion  $\Delta_{\rho\nu}^{\mu}$  naturellement associée à un parallélisme absolu, aujourd'hui appelée *connexion de Weitzenböck* : elle apparaissait déjà dans un article de survol sur la théorie des invariants algébriques et différentiels publié en 1921 dans l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, et plus explicitement encore dans la monographie [Wei1923]. Par ailleurs, Weitzenböck signale à Einstein l'existence de nombreux articles récents consacrés aux champs de  $n$ -Bein, notamment par Vitali, Bortolotti, et Einsenhardt.

Plus spécialement, Weitzenböck signale le théorème fondamental de la théorie, qui lui est dû, d'après lequel toute fonction des coefficients fondamentaux  $h_s^{\mu}$  et de leurs dérivées successives  $h_s^{\mu}, \lambda_1, h_s^{\mu}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, h_s^{\mu}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\kappa}$  jusqu'à un ordre fixé  $\kappa$  qui est invariante par changement arbitraire de coordonnées<sup>41</sup>, et par rotation orthogonale globale à coefficients constants  $e_s \mapsto M_s^t e_t$ , avec  $M_s^t \in O_n(\mathbb{R})$ , s'écrit nécessairement comme fonction du déterminant  $\bar{h} := |h_s^{\mu}|$ , du tenseur métrique  $g_{\mu\nu} = h_{\mu}^{\lambda} h_{\nu}^{\lambda}$ , du tenseur de torsion  $\Lambda_{\rho\sigma}^{\mu}$ , et de toutes ses dérivées covariantes  $\Lambda_{\rho\sigma; \lambda_1}^{\mu}, \Lambda_{\rho\sigma; \lambda_1; \lambda_2}^{\mu}, \dots, \Lambda_{\rho\sigma; \lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_{\kappa-1}}^{\mu}$  jusqu'à l'ordre  $\kappa - 1$ . Aussi Einstein devrait-il rechercher l'expression d'un lagrangien adéquat seulement comme fonction de ces invariants fondamentaux. De plus, le lagrangien que visait Einstein devant être d'ordre 1 en les dérivées des  $h_s^{\mu}$ , Weitzenböck montre qu'il n'existe

<sup>40</sup> Ref. Cartier

<sup>41</sup> Très précisément, il s'agit par définition d'une fonction  $\mathcal{I}$  du « jet » d'ordre  $\kappa$  des  $h_s^{\mu}$  défini par :

$$j^{\kappa} h_s^{\mu} := \left( h_s^{\mu}, h_s^{\mu}, \lambda_1, h_s^{\mu}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, h_s^{\mu}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\kappa} \right)$$

qui satisfait

$$\mathcal{I}(j^{\kappa} \overline{h_s^{\mu}}) = \mathcal{I}(j^{\kappa} h_s^{\mu})$$

lorsqu'on effectue un changement de coordonnées  $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$  transformant  $h_s^{\mu}$  en  $\overline{h_s^{\mu}} = h_s^{\rho} \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\rho}}$ , puis transformant les dérivées d'ordre un  $h_s^{\mu}, \lambda_1$  en

$$\overline{h_s^{\mu}}, \overline{\lambda_1} = h_s^{\rho}, \tau_1 \frac{\partial x^{\tau_1}}{\partial \bar{x}^{\lambda_1}} \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\rho}} + h_s^{\rho} \frac{\partial x^{\tau_1}}{\partial \bar{x}^{\lambda_1}} \frac{\partial^2 \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\tau_1}},$$

et ainsi de suite, autrement dit, une fonction *invariante* est une fonction qui a la propriété de rester la même lorsqu'on remplace les dérivées des

$$\mathcal{I}\left(\overline{h_s^{\mu}}, \overline{h_s^{\mu}}, \overline{\lambda_1}, \dots, \overline{h_s^{\mu}}, \overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_{\kappa}}\right) = \mathcal{I}\left(h_s^{\mu}, h_s^{\mu}, \tau_1, \dots, h_s^{\mu}, \tau_1, \dots, \tau_{\kappa}\right).$$



pas de fonction invariante qui est linéaire en les  $\Lambda_{\rho\sigma}^{\mu}$  et que toute fonction invariante quadratique en les  $\Lambda_{\rho\sigma}^{\mu}$  est nécessairement combinaison linéaire

$$\mathcal{H} = a\mathcal{I}_1 + b\mathcal{I}_2 + c\mathcal{I}_3$$

de trois invariants fondamentaux définis par :

$$\mathcal{I}_1 := g^{\mu\nu} \Lambda_{\mu\sigma}^{\rho} \Lambda_{\nu\rho}^{\sigma},$$

$$\mathcal{I}_2 := g^{\mu\nu} \Lambda_{\mu\rho}^{\rho} \Lambda_{\nu\sigma}^{\sigma},$$

$$\mathcal{I}_3 := g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} g_{\lambda\rho} \Lambda_{\mu\nu}^{\lambda} \Lambda_{\sigma\tau}^{\rho},$$

multipliée éventuellement par le seul invariant d'ordre zéro qu'est le déterminant  $h = |h_s{}^{\mu}|$ . Enfin, Weitzenböck annonce son intention d'écrire une note à ce sujet. Le 3 août, Einstein lui répond avoir été incité par Planck à publier de toute façon dans une revue destinée à des physiciens, et se montre favorable à une présentation des résultats de Weitzenböck à l'Académie prussienne. Le 8 août, presque par retour de courrier, Weitzenböck envoie son projet d'article rédigé avec célérité, projet qui paraîtra en novembre 1928. Leur correspondance semble alors s'en être tenue à ce point.

• **Spéculation épistémologique :** Einstein croyait avoir trouvé par lui-même l'idée de parallélisme absolu à distance fini. Tout scientifique peut inconsciemment rencontrer ou redécouvrir soudainement une idée qui a été déposée des années auparavant dans son inconscient, et l'on peut croire qu'Einstein n'avait même pas essayé de suivre ce que Cartan avait essayé de lui expliquer. Mais on peut aussi penser qu'Einstein était renseigné sur les travaux de Cartan dont il devait certainement avoir reçu des tirés à part, bien qu'il ne se sentît pas obligé de réagir aux articles purement mathématiques de Cartan, de Schouten, d'Eisenhart et de Weitzenböck.

• **Eisenhart 1925 :** *Riemannian geometry*, Princeton University Press ; connexion associée à un parallélisme absolu.

• **Weitzenböck 1928 :** *Differentialinvarianten in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus*, Sitzungsber. Prüss. Akad. Wiss. **26** (1928), 466–474.

• **Réponse d'Einstein à Cartan :**

Ich sehe in der That ein, dass die von mir benutzten Mannigfaltigkeiten in den von Ihnen studierten als Spezialfall enthalten sind. Auch die Herren Eisenhart (Princeton) und Weitzenböck (Saaren) haben die mathematische Grundlagen meiner neuen Theorie bereits teilweise vor mir dargelegt. Letzterer hat in einer zu unserer Akademie *Sitz. Ber.* 1928, **XXVI**, gedruckten Abhandlung ein — wie es schien vollständiges — Litteratur-Verzeichnis der einschlägigen mathematischen Arbeiten angegeben; *dabei hat er aber auch Ihre Arbeiten übersehen*. Dies muss nun wieder gut gemacht werden. Ich bin aber ein bischen ratlos, wie ich es machen soll, um alle gerechten Ansprüche zu befriedigen.

• **Réaction dubitative de Cartan :**

Le silence de Weitzenböck à mon égard est un peu curieux car il indique dans sa bibliographie une note de Bortolotti dans laquelle il se réfère plusieurs fois à mes travaux.

- Le 15 mai 1929, Einstein propose à Cartan d'écrire un article historique sur la notion de parallélisme absolu dans *Zeitschrift für Physik*, comme complément à un mémoire de survol d'Einstein.

- Une semaine plus tard (seulement !), le 24 mai 1929, Cartan envoie son projet de **Notice historique sur le parallélisme absolu**.

- Trois mois plus tard, le 25 août 1929, s'excusant pour son long silence causé par de nouveaux doutes sur la légitimité d'appliquer cette théorie à la physique, Einstein propose de publier plutôt dans les *Mathematische Annalen*,

weil einstweilen nur die mathematischen Zusammenhänge untersucht werden, nicht aber deren Anwendung auf die Physik.

- Einstein s'est toujours plaint de la lenteur (déjà légendaire en 1930) des publications dans les revues de mathématiques :

P.S. [10-I-30] Es ist merkwürdig, dass die *Mathematische Annalen* eine so schreckliche Verstopfung haben, dass sie in so vielen Monaten nicht ausscheiden, was sie zu sich genommen haben.

#### §10. LES 22 ÉQUATIONS D'EINSTEIN

- **Rappel** : système de 4 champs de vecteurs linéairement indépendants

$$\mathbf{e}_s = h_s^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad 1 \leq s \leq 4,$$

dont un système complet d'invariants fondamentaux est constitué par les composantes  $\Lambda_{\rho\nu}^\mu$  du tenseur de torsion ainsi que de toutes ses dérivées covariantes  $\Lambda_{\rho\nu;\gamma_1}^\mu, \Lambda_{\rho\nu;\gamma_1;\gamma_2}^\mu, \dots$

- **Comptage initial** : Il y a en tout  $4 \times 6 = 24$  quantités  $\Lambda_{\rho\nu}^\mu$ , tandis que les  $h_s^\nu$  sont seulement au nombre de **16**. Avant même de chercher à synthétiser des équations unitaires, il faut donc comprendre les relations algébriques abstraites et générales qui lient les  $\Lambda_{\rho,\nu}^\mu$ . C'est le **point de vue du démiurge**, comme l'écrivit Cartan à Einstein le 3 décembre 1912 : Einstein physicien revêt temporairement la robe algébriste.

- **Objectif principal** : inventer un système covariant d'équations aux dérivées partielles unifiant la fois la relativité générale et l'électromagnétisme.

- **Sous-objectif** : comprendre les identités algébriques que doivent satisfaire les composantes de torsion.

- **Paradoxe** : la physique semble disparaître, le problème revenant à une simple question d'algèbre différentielle ?

• **Einstein à l'IHP en novembre 1929 :**

Mon point de départ a été constitué par les identités auxquelles satisfont les grandeurs  $\Lambda_{\rho\nu}^\mu$ . D'une façon générale, la recherche de certaines identités peut être d'un grand secours pour le choix des équations du champ, en nous suggérant des formes possibles pour les relations cherchées. L'étude de ces identités doit donc logiquement précéder le choix du système d'équations.

• **Comment Einstein dérive-t-il ses équations ?**

• Le parallélisme étant absolu, la courbure riemannienne est identiquement nulle, donc les coefficients de Christoffel  $\Delta_{\chi\lambda}^\iota$  de la connexion satisfont :

$$0 \equiv \Delta_{\chi\lambda,\mu}^\iota - \Delta_{\chi\mu,\lambda}^\iota - \Delta_{\sigma\lambda}^\iota \cdot \Delta_{\chi\mu}^\sigma + \Delta_{\sigma\mu}^\iota \cdot \Delta_{\chi\lambda}^\sigma.$$

• Afin de faire intervenir le tenseur de torsion, on permute circulairement les indices  $\chi, \lambda, \mu$ , on somme et on fait apparaître les dérivations covariantes :

$$0 = \Lambda_{\chi\lambda;\mu}^\iota + \Lambda_{\lambda\mu;\chi}^\iota + \Lambda_{\mu\chi;\lambda}^\iota + (\Lambda_{\chi\alpha}^\iota \Lambda_{\lambda\mu}^\alpha + \Lambda_{\lambda\alpha}^\iota \Lambda_{\mu\chi}^\alpha + \Lambda_{\mu\alpha}^\iota \Lambda_{\chi\lambda}^\alpha)$$

• Soulever (ou abaisser) les indices grâce au tenseur métrique :

$$\Lambda_{\underline{\mu\nu}}^\alpha := \Lambda_{\sigma\tau}^\alpha g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau}.$$

• Appliquer à ce tenseur  $T := \Lambda_{\underline{\mu\nu}}^\alpha$  la formule de permutation des dérivées covariantes :

$$T_{;\nu;\alpha} - T_{;\alpha;\nu} = -T_{;\sigma} \Lambda_{\nu\alpha}^\sigma$$

(avec les mêmes indices  $\alpha$  et  $\nu$ ) ce qui donne :

$$\Lambda_{\underline{\mu\nu};\nu;\alpha}^\alpha - \Lambda_{\underline{\mu\nu};\alpha;\nu}^\alpha = -\Lambda_{\underline{\mu\nu};\sigma}^\alpha \Lambda_{\nu\alpha}^\sigma.$$

Ensuite, grâce à la formule de dérivation d'un produit  $(T \cdot S)_{;\sigma} = T_{;\sigma} \cdot S_{;\sigma} + T \cdot S_{;\sigma}$ , on réexprime le membre de droite :

$$= -(\Lambda_{\underline{\mu\nu}}^\alpha \Lambda_{\nu\alpha}^\sigma)_{;\sigma} + \Lambda_{\underline{\mu\nu}}^\alpha \Lambda_{\nu\alpha;\sigma}^\sigma$$

et on change les indices muets  $\sigma, \alpha$  et  $\nu$  du premier de ces deux derniers termes en  $\alpha, \sigma$  et  $\tau$ , ce qui donne :

$$= -(\Lambda_{\underline{\mu\tau}}^\sigma \Lambda_{\tau\sigma}^\alpha)_{;\alpha} + \Lambda_{\underline{\mu\nu}}^\alpha \Lambda_{\nu\alpha;\sigma}^\sigma.$$

On place les quatre termes dans le membre de gauche et on met en facteur la dérivée covariante  $(\cdot)_{;\alpha}$  :

$$(\Lambda_{\underline{\mu\nu};\nu}^\alpha - \Lambda_{\underline{\mu\tau}}^\sigma \Lambda_{\sigma\tau}^\alpha)_{;\alpha} - \Lambda_{\underline{\mu\nu};\alpha;\nu}^\alpha - \Lambda_{\underline{\mu\nu}}^\alpha \Lambda_{\nu\alpha;\sigma}^\sigma \equiv 0.$$

**Les 22 Équations d'Einstein :**

$$16 \quad 0 = G^{\mu\alpha} := \Lambda_{\underline{\mu\nu}}^\alpha - \Lambda_{\underline{\mu\tau}}^\sigma \Lambda_{\sigma\tau}^\alpha = 0$$

$$6 \quad 0 = F^{\mu\nu} := \Lambda_{\underline{\mu\nu};\alpha}^\alpha$$

satisfont les **4** identités :

$$0 \equiv G^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} - F^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} - \Lambda_{\underline{\mu\nu}}^{\alpha} F_{\nu\alpha}$$

.

• **Arguments (cuisine spéculative) d'Einstein** : Les équations les plus simples :

$$\Lambda_{\mu\nu}^{\alpha} = 0$$

sont trop restrictives : elles équivalent à dire que l'espace est euclidien, et de plus *elles ne contiennent que des dérivées premières des  $h_s^{\nu}$* .

• Les mêmes équations, dérivées une fois :

$$\Lambda_{\mu\nu;\sigma}^{\alpha} = 0$$

sont presque équivalentes aux précédentes, et elles suggèrent d'annuler toutes les divergences possibles qu'on peut former à partir de  $\Lambda_{\mu\nu;\sigma}^{\alpha}$  : soit

$$\mathbf{6} \quad 0 = \Lambda_{\mu\nu;\alpha}^{\alpha}$$

soit

$$\mathbf{16} \quad 0 = \Lambda_{\underline{\mu\nu};\nu}^{\alpha}$$

• Par un argument intuitif mystérieux (qui n'est pas soutenu par une spéculation rigoureuse), Einstein est conduit à rejeter ces équations et à sélectionner les **22** équations écrites dans l'encadré, qui ne sont autres que certaines combinaisons linéaires des **6** + **16** équations obtenues ci-dessus.

• Du point de vue de l'analyse épistémologique, on assiste à une tentative d'imitation de la stratégie gagnante qui avait conduit à l'élaboration des équations de la relativité générale.

• **Relations de compatibilité** : Einstein considère que, à un changement de coordonnées près, il y a **16** - **4** = **12** quantités inconnues  $h_s^{\nu}$  indépendantes, parce que l'on peut normaliser :

$$h_{14} = h_{24} = h_{34} = 0, \quad h_{44} = 1.$$

Or, pour être compatibles, les **22** équations satisfaites par **12** doivent être liées par **22** - **12** = **10** identités algébriques indépendantes, et comme **4** sont déjà connues, il faut en trouver encore **6**.

• **Rappel** : En relativité générale, *i.e.* sur une variété à 4 dimensions munie d'un  $ds^2$  pseudo-riemanien (minkowskien sur chaque espace tangent), les 10 fameuses équations d'EINSTEIN (1916) pour la gravitation générale s'écrivaient :

$$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = T^{ik},$$

$1 \leq i \leq k \leq 4$ , où  $R^{ik}$  est le tenseur de Ricci et  $g^{ik}$  le tenseur (pseudo)métrique, tous deux écrits en composantes covariantes, où  $R$  est la courbure scalaire, et où  $T^{ik}$

est le tenseur d'énergie-impulsion de la matière. Le premier membre  $R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R$ , appelé **membre géométrique**, est purement mathématique.

- Ici, nous avons **10** fonctions inconnues  $g_{\mu\nu}$  (potentiels de gravitation) observe Einstein, mais le système des **4** coordonnées  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  permet d'en normaliser 4 parmi 10, par exemple

$$g_{14} = 0, \quad g_{24} = 0, \quad g_{34} = 0, \quad g_{44} = 1,$$

et donc, heuristiquement parlant, il ne reste plus que **6 inconnues** principales, à savoir les **6**  $g_{\mu\nu}$  restantes qui doivent satisfaire **10 > 6** équations. Mais comme on le sait, la loi de conservation infinitésimale de l'énergie exige que la divergence covariante de  $T^{ik}$  s'annule, ce qui donne les **4** équations de compatibilité suivantes :

$$0 \equiv (R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R)_{;k}$$

$1 \leq i \leq 4$ , qui rétablissent la cohérence du système d'Einstein.

- Dans la recherche d'une théorie synthétisant gravitation et électromagnétisme, on se concentre d'abord sur l'élaboration d'équations tensorielles géométriques généralisant  $R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = 0$ , et on est amené à discuter de la nature et du nombre des équations à choisir, ainsi qu'à **spéculer sur le nombre de relations de compatibilité qui doivent nécessairement être satisfaites par le système recherché**.

- Par ailleurs, on est tenté, afin de respecter un principe de déterminisme physique (au moins local), à privilégier seulement les systèmes tels que les données physiques initiales sur une sous-variété à trois dimension déterminent uniquement toutes les quantités dans un voisinage. Autrement dit, les systèmes souhaités doivent être non caractéristiques (au sens de la théorie des EDP).

- Avant de poursuivre, rappelons aussi que pour les équations de MAXWELL (électromagnétisme) dans le vide

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 & \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{E} &= 0, & \text{div } \mathbf{H} &= 0, \end{aligned}$$

sont au nombre de **8** pour **6 inconnues**, mais il y a les **2 = 8 - 6** équations de compatibilité obtenues en prenant la divergence de la première ligne.

- **Paradoxe métaphysique** : les équations de la physique envisagées seulement avec le regard d'un algébriste différentiel.

- **Einstein en trouve 6 de plus, comme il le souhaitait.**

**? Contribution de Cartan ?**

**Anticipation.** Après une correspondance soutenue et concentrée dans le temps, Cartan en appliquant sa théorie des systèmes en involution montre qu'il fallait en

vérité s'attendre à 12 > 10 identités algébriques indépendantes et fait découvrir à Einstein les 2 identités supplémentaires.

**Théorème de Cauchy-Kowalewsky**

• **Systèmes d'ordre 1 : existence et unicité**

• **Exemple** : systèmes d'équations différentielles ordinaires :  $t \in \mathbb{R}$  variable temps et  $u = (u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^m$  inconnues :

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{Fonction}(t, u) \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

• **Deuxième exemple** : systèmes d'équations différentielles ordinaires avec paramètre  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$  :

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{Fonction}(t, u; \lambda) \\ u(0) = u_0(\lambda) \end{array} \right.$$

• **Cauchy-Kowalewsky** :

variables indépendantes :  $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

variables dépendantes :  $(u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^m$ .

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial y} = \text{Fonction analytique}(x, y, u, u_x) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{array} \right.$$

**Théorie des systèmes en involution**

• **Article de synthèse de Cartan** : Bull. Soc. Math. France **59** (1931), 88–118, paru après les échanges de lettres avec Einstein.

• Exposé de la théorie sans utiliser le langage des formes différentielles.

Deux variables indépendantes :  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$m$  variables dépendantes :  $(u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^m$ .

• **Notation abrégée** :

$$u_x^i := \frac{\partial u^i}{\partial x} \qquad u_y^i := \frac{\partial u^i}{\partial y}$$

- Système de  $r$  équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{1 \leq k \leq m} a_k^1 u_x^k + \sum_{1 \leq k \leq m} b_k^1 u_y^k + c^1 \\ \dots \\ 0 = \sum_{1 \leq k \leq m} a_k^r u_x^k + \sum_{1 \leq k \leq m} b_k^r u_y^k + c^r \end{array} \right.$$

- Réécrire matriciellement :

$$0 = a u_x + b u_y + c$$

- **Cas particulier : maximalement résoluble par rapport à  $u_y$** , c'est-à-dire :

$$\text{rang matrice } (b_k^i) = r = \text{nombre d'équations}$$

- Renommer et découper les fonctions inconnues :

$$(u', u'') := (u^1, \dots, u^r, u^{r+1}, \dots, u^m)$$

- Réécrire le système :

$$0 = a u_x + b' u'_y + b'' u''_y + c$$

- La matrice  $b'$  devant  $u'_y$  est inversible donc on peut résoudre par rapport à  $u'_y$  :

$$\begin{aligned} u'_y &= F(x, y, u_x, u''_y) \\ &= F(x, y, u'_x, u''_x, u''_y) \end{aligned}$$

- Pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy-Kowalewsky, il faudrait considérer comme étant fonctions inconnues seulement celles qui sont dans le membre de gauche, à savoir les  $r$  fonctions  $u'_y$ . Donc on oublie les  $n - r$  fonctions restantes  $u''$ , ou plutôt, **on choisit arbitrairement ces fonctions**  $u'' = u''(x, y)$  et ensuite **on les oublie** en considérant qu'elles sont incorporées dans les premiers arguments  $(x, y)$  de la fonction  $F$ , ce qui donne :

$$u'_y = G(x, y, u'_x),$$

et ainsi, le théorème de Cauchy-Kowalewsky s'applique à  $u'$ .

- **Résumé** : Si le rang de la matrice  $(b_k^i)$  est égal au nombre  $r$  d'équations, la solution générale du système dépend de :

$r$  fonctions de **1** variable  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)$  ;

$n - r$  fonctions de **2** variables  $u^{r+1}(x, y), \dots, u^m(x, y)$ .

- **Cas général** :

$$\text{rang matrice } (b_k^i) = r - r_1 \leq r = \text{nombre d'équations}$$

- **Généricité** : on demande que ce rang soit localement maximal, c'est-à-dire qu'on se place au voisinage d'un point générique et on suppose que ce rang reste constant quand on fait agir des changements de coordonnées linéaires de la forme :  $(x, y) \mapsto (x, y + \lambda x)$ .

• **Découpage de coordonnées :**

• **Forme du système après simplification :**

$$r \begin{cases} r_1 [ 0 = X' := u'_x + a_2 u''_x + a_3 u'''_x + \mathcal{R} \\ r_1 [ 0 = Y' := u'_y + 0 + b_3 u'''_y + \mathcal{R} u_x + \mathcal{R} \\ r - 2r_1 [ 0 = Y'' := 0 + u''_y + c_3 u'''_y + \mathcal{R} u_x + \mathcal{R} \end{cases}$$

• La généralité implique que les lignes de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

sont combinaisons linéaires des lignes de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & c_3 \end{pmatrix}$$

• **Conditions de compatibilité nécessaires :** effectuer la différentiation croisée et simplifier en utilisant les équations  $X' = 0$ ,  $Y' = 0$  et  $Y'' = 0$  ainsi que les équations  $\frac{\partial X'}{\partial x} = 0$  :

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x} \\ &\equiv \Theta(x, y, u''_x, u'''_x, u''_y, u'''_y, u''_{xx}, u'''_{xx}) \end{aligned}$$

• **Définition :** Le système est **en involution** si les  $r_1$  expressions :

$$\Theta_i := \frac{\partial X'_i}{\partial y} - \frac{\partial Y'_i}{\partial x}$$

( $1 \leq i \leq r_1$ ) réduites en tenant compte des équations du système, sont identiquement nulles quand on regarde les arguments de  $\Theta$  comme des variables indépendantes.

**Involution  $\equiv$  système compatible**

**Théorème.** Si le système est en involution, il possède des solutions analytiques par application du théorème de Cauchy-Kowalesky.

• **Premier cas :**  $m > r - r_1$  : on fixe arbitrairement les  $m - r + r_1$  fonctions  $u'''$  de 2 variables, on résout d'abord le sous-système formé des deux dernières familles d'équations  $u'_y = \dots$ ,  $u''_y = \dots$  et ensuite, la première famille d'équations  $0 = X'$  est automatiquement satisfaite grâce aux conditions de compatibilité  $\Theta = 0$ .

• **Deuxième cas :**  $m = r - r_1$  : il n'y a plus de fonctions  $u'''$  arbitraires de deux variables, et d'après Cauchy-Kowalewsky, les deux dernières familles d'équations  $u_y = \dots$  déterminent complètement la solution  $u$  dès que  $u(x, 0)$  est choisi, mais la première famille d'équations :

$$u'_x = -a_2 u''_x - \mathcal{R},$$



restreinte à  $\{(x, 0)\}$  impose que seule les  $m - r_1$  fonctions  $u''_x(x, 0)$  de **1** variable sont quelconques.

• **Définition :** Le système **détermine** les fonctions inconnues si  $m = r - r_1$ .

**Résumé.** Pour qu'un système à deux variables  $(x, y)$  soit en involution et qu'il **détermine** les fonctions inconnues, il faut :

- que les équations du système soient résolubles par rapport aux  $m$  dérivées  $\frac{\partial u^k}{\partial y}$  ;
- qu'il existe entre les dérivées des premiers membres exactement  $r_1 = r - m$  identités de compatibilité linéairement indépendantes.

**Passage à trois variables**

□ Trois variables indépendantes :  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

□  $m$  variables dépendantes :  $(u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^m$ .

• **Forme du système après simplification :**

$$r \begin{cases} r_1 \left[ \begin{array}{l} 0 = X' := u'_x + \lambda u''_x + \lambda u'''_x + \lambda u''''_x + \mathcal{R} \end{array} \right. \\ r_2 - r_1 \left[ \begin{array}{l} 0 = Y' := u'_y + 0 + \lambda u''_y + \lambda u'''_y + \mathcal{R} u_x + \mathcal{R} \\ 0 = Y'' := 0 + u''_y + \lambda u'''_y + \lambda u''''_y + \mathcal{R} u_x + \mathcal{R} \end{array} \right. \\ r - r_2 \left[ \begin{array}{l} 0 = Z' := u'_z + 0 + 0 + \lambda u''''_z + \mathcal{R} u_x + \mathcal{R} u_y + \mathcal{R} \\ 0 = Z'' := 0 + u''_z + 0 + \lambda u''''_z + \mathcal{R} u_x + \mathcal{R} u_y + \mathcal{R} \\ 0 = Z''' := 0 + 0 + u'''_z + \lambda u''''_z + \mathcal{R} u_x + \mathcal{R} u_y + \mathcal{R} \end{array} \right. \end{cases}$$

**4 variables physiques**

□ Trois variables indépendantes :  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ .

□  $m$  variables dépendantes :  $(u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^m$ .

Le dernier entier non nul de cette suite décroissante donne le nombre de fonctions arbitraires de  $k$  variables dont dépend la solution générale d'un système en involution.

• **Définition :** Le système est **déterminé** si

$$m - r + r_3 = 0.$$

- **Définition** : Le système est **en involution** s'il y a

$$r_1 + r_2 + r_3$$

conditions de compatibilité indépendantes entre les équations.

**Applications aux espaces à parallélisme absolu**

- **Première application du théorème de Cartan** : avant d'ajouter certaines équations physiques, il faut comprendre le système mathématique d'EDP dont les solutions sont les espaces à parallélisme absolu  $e_s = h_s^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$  doués de torsion.

Le tenseur de torsion  $\Lambda_{\alpha\beta}^s$  est défini par les **24** équations :

$$(\mathcal{H}_{s\alpha\beta}) \quad 0 = h_{s\alpha,\beta} - h_{s\beta,\alpha} - \Lambda_{\alpha\beta}^s$$

avec  $1 \leq \alpha < \beta \leq 4$  et  $1 \leq s \leq 4$ .

L'élimination des quantités fondamentales  $h$  conduit aux **16** identités de type Bianchi :

$$(\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma}^s) \quad 0 = \Lambda_{\alpha\beta,\gamma}^s + \Lambda_{\beta\gamma,\alpha}^s + \Lambda_{\gamma\alpha,\beta}^s,$$

avec  $1 \leq \alpha < \beta < \gamma$  et  $1 \leq s \leq 4$ . Si, dans cette dernière équation, on réexprime les dérivées d'ordre 1 des coefficients de torsion en fonction des  $h_s^\alpha$ , on obtient un système de 16 EDP du second ordre en les  $h_s^\alpha$ .

- Oublier le parallélisme absolu et envisager les **24 + 16** équations  $\mathcal{H}_{s\alpha\beta}$  et  $\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma}^s$  comme un système de **40** EDP d'ordre 1 en les **16 + 24** fonctions inconnues  $h_s^\alpha$  et  $\Lambda_\alpha^\beta$ .

- Ce système satisfait les **16 + 4 = 20** relations de compatibilité linéairement indépendantes :

$$(*) \quad \begin{cases} 0 \equiv (\mathcal{H}_{s\alpha\beta})_{,\gamma} + (\mathcal{H}_{s\beta\gamma})_{,\alpha} + (\mathcal{H}_{s\gamma\alpha})_{,\beta} + (\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma}^s) \\ 0 \equiv (\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma}^s)_{,\delta} - (\mathcal{L}_{\alpha\beta\delta}^s)_{,\gamma} + (\mathcal{L}_{\alpha\gamma\delta}^s)_{,\beta} - (\mathcal{L}_{\beta\gamma\delta}^s)_{,\alpha} \end{cases}$$

où  $s = 1, 2, 3, 4$  et  $1 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 4$  dans les premières et où, dans les secondes,  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  forment une permutation circulaire de  $(1, 2, 3, 4)$ .

- **Appliquer le théorème de Cartan.**

**Anticipation** : les solutions ne sont autres que les **16** fonctions  $h_s^\alpha$  de **4** variables.

- **Question** : quels sont les entiers

$$r', \quad r'_3, \quad r'_2, \quad r'_1$$

de ce système ?

- **Observation** : les équations sont résolubles pour les dérivées prises par rapport à  $x^4$  des **12 + 12 = 24** fonctions suivantes :

$$h_{s\alpha,4} = h_{s4,\alpha} + \Lambda_{\alpha 4}^s \quad s = 1, 2, 3, 4 ; \alpha = 1, 2, 3$$

$$\Lambda_{\alpha\beta,4}^s = -\Lambda_{\beta 4,\alpha}^s - \Lambda_{4\alpha,\beta}^s \quad s = 1, 2, 3, 4 ; \beta = 1, 2, 3$$

Il reste donc

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_3 &= 40 - 24 \\ &= 16 \end{aligned}$$

équations. On continue et on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= 40 \\ \mathbf{r}'_3 &= 16 \\ \mathbf{r}'_2 &= 4 \\ \mathbf{r}'_1 &= 0 \end{aligned}$$

• **Conclusion :** Ainsi, la somme

$$\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}'_3 = 0 + 4 + 16$$

est précisément égale au nombre des relations de compatibilité (\*), donc **le système est en involution**, et la solution générale dépend de

$$m - \mathbf{r}' + \mathbf{r}'_3 = 16$$

fonctions de **4** variables.

• **Seconde application du théorème de Cartan :** Supposons qu'on ajoute **r** nouvelles équations physiques aux équations mathématiques  $(\mathcal{H}_{s\alpha\beta})$  et  $(\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma}^s)$  et désignons par

$$r_1 + r'_1, \quad r_2 + r'_2, \quad r_3 + r'_3$$

• **Réduction du nombre d'inconnues :** en redressant le champ  $\mathbf{e}_4 = \frac{\partial}{\partial x^4}$ , on normalise

$$h_{14} = 0, \quad h_{24} = 0, \quad h_{34} = 0, \quad h_{44} = 1,$$

ce qui réduit de 4 unités le nombre de fonctions inconnues.

• Ensuite, on redresse dans le plan  $\{x^4 = 0\}$ , ce qui donne, dans  $\{x^4 = 0\}$  :

$$h_{13} = 0, \quad h_{23} = 0, \quad h_{33} = 1, \quad h_{43} = 0,$$

donc on se ramène à

$$40 - 8 = 32$$

fonctions inconnues.

**Observation :** Ici, je ne comprends pas tout.

**Résultat.** Pour qu'un système donné soit **en involution** et qu'il **détermine** les fonctions inconnues, il faut et il suffit :

- que les  $r$  équations physiques ajoutées aux équations  $(\mathcal{H}_{s\alpha\beta})$  et  $(\mathcal{L}_{\alpha\beta\gamma}^s)$  soient résolubles par rapport aux 12 dérivées  $\Lambda_{\alpha 4,4}^s$ , ce qui donne

$$r - r_3 = 12 ;$$

- qu'il existe entre les dérivées des premiers membres de ces équations exactement

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_1 + r_2 + r - 12$$

relations de compatibilité linéairement indépendantes.

**Application aux 22 équations d'Einstein**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{6} & (\mathcal{F}_{\alpha\beta}) \quad 0 = \Lambda_{\alpha\beta;\rho}^{\rho} \\ \mathbf{16} & (\mathcal{G}_{\alpha}^{\beta}) \quad 0 = \Lambda_{\alpha\rho;\rho}^{\beta} + \Lambda_{\alpha\rho}^{\sigma} \Lambda_{\rho\sigma}^{\beta} \end{array} \right.$$

- Valeurs trouvées pour  $r_1, r_2, r_3$  :

$$\mathbf{r}_1 = 0, \quad \mathbf{r}_2 = 2, \quad \mathbf{r}_3 = 10$$

donc le système est en involution s'il existe

$$r_1 + r_2 + r_3 = 12$$

identités de compatibilité. Cartan trouve ces 12 identités (Einstein n'en avait que 10).

- Cartan découvre un autre système de 22 équations en involution dont la solution générale dépend aussi de 12 fonctions arbitraires de 3 variables.
- Il découvre aussi un système de 15 équations dont la solution générale dépend de 18 fonctions de 3 variables.

Il est probable que les trois systèmes trouvés sont les seuls systèmes en involution indépendants du choix des variables et du choix des repères rectangulaires, qui soient linéaires par rapport aux dérivées covariantes des  $\Lambda_{\alpha\beta}^{\gamma}$  et quadratiques par rapport aux  $\Lambda_{\alpha\beta}^{\gamma}$ , et qui *déterminent* les fonctions inconnues. Mais la discussion de cette question fait intervenir des problèmes d'Algèbre tout à fait étrangers à l'objet de ce Mémoire.

#### RÉFÉRENCES

- [ADM2004] ALBOUY, Olivier; DELANNOYE, Rémi; MERKER, Joël : **Sur les équations de la gravitation d'Einstein (d'après Élie Cartan)**, rapport technique, juin 2004, [www.dma.ens.fr/~merker/](http://www.dma.ens.fr/~merker/).
- [Ca1899] CARTAN, Élie : **Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff**, Ann. Éc. Norm. **16** (1899), 239–332 ; [Œuvres compl. II, 1, 303–396].
- [Ca1922] CARTAN, Élie : **Sur les équations de la gravitation d'Einstein**, J. Math. pures et appl. **1** (1922), 141–203 [Œuvres compl. III, 1, 549–612].
- [Ca1923a] CARTAN, Élie : **Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl**, J. Math. pures et appl. **2** (1923), 167–192 [Œuvres compl. III, 1, 633–658].
- [Ca1923b] CARTAN, Élie : **Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée**, Ann. Éc. Norm. **40** (1923), 325–412 [Œuvres compl. III, 1, 659–746].
- [Ca1924] CARTAN, Élie : **Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée**, Ann. Éc. Norm. **41** (1924), 1–25 [Œuvres compl. III, 1, 799–823].

- [Ca1925a] CARTAN, Élie : **Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée**, Ann. Éc. Norm. **42** (1925), 17–88 [Œuvres compl. III, 2, ? ?].
- [Ca1925b] CARTAN, Élie : **La géométrie des espaces de Riemann**, Mémorial des sciences mathématiques, fascicule IX, Paris, Gauthier-Villars, 1925.
- [Ca1928] CARTAN, Élie : **Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann**, Paris, Gauthier-Villars, 1928.
- [Ca1930] CARTAN, Élie : **Notice historique sur la notion de parallélisme absolu**, Math. Ann. **102** (1930), 698–706.
- [Ca1931] CARTAN, Élie : **Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la relativité**, Bull. Soc. Math. France **59** (1931), 88–118.
- [Ca1945] CARTAN, Élie : **Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques**, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 994, Hermann, Paris, 1945.
- [Ca1953] CARTAN, Élie : **Œuvres complètes**, publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique, Gauthier-Villars, Paris, 6 volumes, 1952–53.
- [Ch1967] CARTAN, Henri : **Formes différentielles : applications élémentaires au calcul des variations et à la théorie des surfaces**, Paris, Hermann, 1967.
- [Da1882] DARBOUX, Gaston : **Sur le problème de Pfaff**, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, **VI** (1882), no. 1, 14–36 et 49–68.
- [De1979] DEBEVER, Robert (ed.) : **Élie Cartan — Albert Einstein. Letters on absolute parallelism 1929–1932**, French and English transl. by J. Leroy and J. Ritter, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1979.
- [Ei1916] EINSTEIN, Albert : **Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie**, Annalen der Physik **49** (1916), 769–822. Traduction française dans : [Ei1993a], pp. 179–227.
- [Ei1930a] EINSTEIN, Albert : **Auf die Riemann-Metrik und den Fern-Parallelismus gegründete einheitliche Feldtheorie**, Math. Ann. **102** (1930), 685–697.
- [Ei1930b] EINSTEIN, Albert : **Théorie unitaire du champ physique**, 4 exposés à l'IHP en novembre 1929 rédigés par Alexandre Proca, Ann. Inst. Poincaré **1** (1930), 1–24.
- [Ei1993a] EINSTEIN, Albert : **Œuvres choisies, Relativités I, Relativités restreinte et générale**, Textes choisis et présentés par Françoise Balibar, Olivier Darrigol, Bruno Jech et John Stachel, Le Seuil/Éditions du CNRS, Paris, 1993
- [Ei1993b] EINSTEIN, Albert : **Œuvres choisies, Relativités II**, Le Seuil/Éditions du CNRS, Paris, 1993
- [Eis1932] EISENHART, L.P. : **Spaces admitting complete absolute parallelism, ??**.
- [Fo1890] FORSYTH, A.R. : **Theory of differential equations. Part I. Exact equations and Pfaff's problem**, Cambridge University Press, 1890.
- [Fr1877] FROBENIUS, G. : **Über das Pfaffsche Problem**, J. für die reine u. angew. Math. **82** (1877), 230–315 [Abhandlungen I, 249–334].
- [GR2000] GOLDSTEIN, Catherine ; RITTER, Jim : **The varieties of unity : sounding unified theories 1920–1930**, in : A. Ashtekar et al. (eds.) **Revisiting the Foundations of Relativistic Physics**, Kluwer, Dordrecht, 2003, pp. 93–149.
- [Go2004] GOENNER, Hubert F. : **On the history of unified field theories**, Living reviews in relativity **7** (2004), no. 2 : [www.livingreviews.org/lrr-2004-2](http://www.livingreviews.org/lrr-2004-2)
- [Ha1991] HAWKINS, Thomas : **Jacobi and the birth of the theory of Lie groups**, Arch. Hist. Exact Sci. **42** (1991), 187–278.
- [Ha2005] HAWKINS, Thomas : **Frobenius, Cartan, and the problem of Pfaff**, Arch. Hist. Exact Sci. **59** (2005), 381–436.

- [La1772] LAGRANGE, Joseph-Louis : **Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre**, Nouv. Mém. Acad. des Sci. et Belles-Lettres Berlin, 1772, (1774), 353–372.
- [LR1975] LOVELOCK, David ; RUND, Hanno : **Tensors, differential forms, and variational principles**, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [Me2007] MERKER, Joël : **Commentaire philosophique et mathématique du *Theorema Egregium de Gauss***, en préparation.
- [OL1995] OLVER, P.J. : **Equivalence, Invariance and Symmetries**. Cambridge University Press, Cambridge, 1995, xvi+525 pp.
- [Pf1815] PFAFF, Johannes : **Methodus generalis æquationes differentiarum necnon æquationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quocumque variables complete integrandi**, Abh. König. Akad. Wissen. Berlin (1814–1815), 76–136.
- [Sa2006] SAUER, Tilman : **Field equations in teleparallel spacetime : Einstein's Fernparallelismus approach toward unified field theory, ??**, [arXiv:physics/0405142](https://arxiv.org/abs/physics/0405142).
- [Sc2004] SCHOLZ, Erhard : **Hermann Weyl's analysis of the "problem of space" and the origin of gauge structures**, Science in Context **17** (2004), no. 1-2, 165–197.
- [Spi1970] SPIVAK, M. : *Differential geometry*, volumes one and two, Brandeis university, 1970.
- [Stk2000] STORMARK, Olle : **Lie's structural approach to PDE systems**, Encyclopædia of mathematics and its applications, vol. 80, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, xv+572 pp.
- [Wei1923] WEITZENBÖCK, Roland : **Invariantentheorie**, Groningen, Noordhoff, 1923.
- [Wei1928] WEITZENBÖCK, Roland : **Differentialinvarianten in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus, Preussische Akademie der Wissenschaften**, Phys.-Math. Klasse, Sitzungsberichte, 1928, 466–474.