Chaînes de Markov

jeudi 7 novembre 2013

1. **Opérations sur les chaînes de Markov.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_{n\in\mathbb{N}})$ deux chaînes de Markov d'espaces d'états respectifs $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$, et de matrices de transitions respectives P et Q. Déterminer dans chacun des cas suivants si le processus considéré est une chaîne de Markov, et donner le cas échéant la matrice de transition de la chaîne :

    1. $(X_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ avec k un entier plus grand que 2.
    2. $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ fonction arbitraire.
    3. $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ fonction injective.
    4. $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathbb{N}$.
    5. $(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $k \geq 1$ fixé.
    6. $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (donner une condition suffisante simple pour qu'il s'agisse d'une chaîne de Markov).

2. **Chaînes de Markov à 2 états.** On considère une chaîne de Markov à deux états, et dont la matrice de transition s'écrit donc $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{smallmatrix}\right)$. À quelle condition la chaîne est-elle récurrente irréductible ? apériodique ? Calculer en fonction de la loi initiale π_0 les lois marginales π_n de la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. À quelle vitesse a-t-on convergence vers la loi limite π_∞, et quelle est cette loi ?

3. **Le cube.** On considère la chaîne de Markov d'espace d'états donné par les sommets d'un cube, et tel qu'à chaque étape on a probabilité $1/4$ de rester au même endroit, et probabilité $1/4$ de sauter à l'un des 3 sommets voisins. Soient x et y deux sommets diamétralement opposés. Calculer $\mathbb{E}_x[R_x^1]$, $\mathbb{E}_x[R_y^1]$, et finalement

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{k=1}^{R_x^1} \mathbb{1}_{X_n=y}\right],$$

qui est le nombre de visites moyen de y avant le retour en x.

4. **Marches aléatoires sur un graphe.** Soit $G = (V, E)$ un graphe fini non orienté, connexe, sans boucle ni arête multiple. On considère la marche aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espace d'états V et de matrice de transition

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg x} & \text{si } (x,y) \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la chaîne de Markov est récurrente irréductible, et discuter de l'apériodicité. Trouver une mesure réversible pour cette chaîne, et énoncer un théorème limite pour la loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. **L'arbre.** Étudier la marche aléatoire sur l'arbre binaire infini, avec les règles de transition de l'exercice précédent.

6. **Urnes d'Ehrenfest.** On considère la chaîne de Markov d'espace d'états $[\![0, n]\!]$ et de matrice de transition

$$p(k, k-1) = \frac{k}{n} \quad ; \quad p(k, k+1) = \frac{n-k}{n} \quad ; \quad p(i, j) = 0 \text{ sinon.}$$

   Déterminer la mesure invariante de cette chaîne de Markov.

7. **Urnes de Bernoulli-Laplace.** On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune k et l boules. On suppose que r boules sont de couleur rouge, et $k + l - r$ boules sont de couleur blanche, et l'on note X_n le nombre de boules dans U_1 au temps n qui sont de couleur rouge. À chaque étape, on choisit aléatoirement une boule dans chaque urne et on échange leurs places. Montrer que X_n est une chaîne de Markov sur l'espace d'états $[\![0, r]\!]$, dont on donnera la matrice de transition. Déterminer la loi limite de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

8. **Polygones aléatoires.** Soit P un polygone convexe, auquel on applique l'opération suivante : on choisit au hasard deux côtés de P, on joint les milieux de ces côtés et l'on garde l'un des deux nouveaux polygones convexes plus petits ainsi obtenus. Montrer que si $X_n + 3$ est le nombre de côtés de P au bout de n étapes, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ en fonction de X_0, et trouver la loi limite de cette chaîne.

9. **Chaînes réversibles.** Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle qu'existe une mesure de probabilité π qui est P-invariante. On suppose X_0 distribué suivant π. Rappeler pourquoi toutes les variables X_n sont distribuées suivant π. On fixe N et on note $(Y_n)_{n \leq N} = (X_{N-n})_{n \leq N}$. Montrer que $(Y_n)_{n \leq N}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$\widetilde{P}(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y, x)$$

   Une mesure de probabilité π sur l'espace d'états $\mathfrak{X}$ est dite réversible si pour tout couple (x, y),

$$\pi(x) P(x, y) = \pi(y) P(y, x).$$

   Montrer que si la mesure π est réversible, alors elle est aussi P-invariante, et que $(Y_n)_{n \leq N}$ est dans ce cas une chaîne de Markov de même loi que $(X_n)_{n \leq N}$.

10. **Moyennes de coefficients de matrices stochastiques.** Soit P une matrice stochastique irréductible admettant une mesure de probabilité invariante π. Montrer que pour tous indices x, y,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k(x, y) = \pi(y).$$

1. Le processus $(X_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une chaîne de Markov, puisque

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[X_{k(n+1)} = x_{n+1}|X_0 = x_0, X_k = x_1, X_{2k} = x_2, \ldots, X_{kn} = x_n]\\&= \mathbb{P}[X_{k(n+1)} = x_{n+1}|X_{kn} = x_n] = \mathbb{P}_{x_n}[X_k = x_{n+1}] = P^k(x_n, x_{n+1});\end{aligned}$$

sa matrice de transition est P^k. Une fonction d'une chaîne de Markov n'est pas en général une chaîne de Markov : par exemple, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la marche aléatoire simple issue de 0 et $f(X_n) = 1_{X_n\geq 0}$, alors $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une chaîne de Markov, car

$$\mathbb{P}[Y_1 = 1|Y_0 = 1] = \frac{1}{2};$$
$$\mathbb{P}[Y_2 = 1|Y_1 = 1] = 1.$$

En revanche, une fonction injective d'une chaîne de Markov est une chaîne de Markov, de matrice de transition $Q(y_1, y_2) = P(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$.

La somme de deux chaînes de Markov à valeurs entières n'est pas en général une chaîne de Markov. Par exemple, considérons une marche aléatoire simple $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ issue de 0, et posons $Y_n = X_{n+1}$; $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une chaîne de Markov. Si $X_0 + Y_0 = 1$, alors $X_0 = 0$ et $X_1 = 1$, donc $X_2 = 0$ ou 2 avec probabilité $1/2$ et la loi conditionnelle de $X_1 + Y_1$ sachant $X_0 + Y_0 = 1$ est

$$\frac{1}{2}\left(\delta_1 + \delta_3\right).$$

Maintenant, si $X_1 + Y_1 = 1$, alors nécessairement $X_1 = 1$ et $X_2 = 0$, donc $X_3 = -1$ ou 1 avec probabilité $1/2$ et la loi conditionnelle de $X_2 + Y_2$ sachant $X_1 + Y_1 = 1$ est

$$\frac{1}{2}\left(\delta_{-1} + \delta_1\right).$$

La somme $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas une chaîne de Markov.

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, alors il en va de même de tout $k+1$-uplet $(X_n, \ldots, X_{n+k})$, car :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[(X_n, \ldots, X_{n+k}) = (y_n, \ldots, y_{n+k})|X_0 = x_0, \ldots, X_{n+k-1} = x_{n+k-1}]\\&= \left(\prod_{j=0}^{k-1} \delta_{x_{n+j}, y_{n+j}}\right) P(x_{n+k-1}, y_{n+k})\end{aligned}$$

en utilisant la propriété de Markov pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient une fonction de $(x_{n-1}, \ldots, x_{n+k-1})$ et $(y_n, \ldots, y_{n+k})$, ce qu'il fallait démontrer. Enfin, le couple $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formé par deux chaînes de Markov n'est pas en général une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, mais c'en est une si les deux suites de variables aléatoires sont indépendantes. Dans ce cas, la matrice de transition du couple est le produit tensoriel $P \otimes Q$ des matrices de transition de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[(X_{n+1}, Y_{n+1}) = (x_{n+1}, y_{n+1})|(X_0, Y_0) = (x_0, y_0), \ldots, (X_n, Y_n) = (x_n, y_n)]\\&= P(x_n, x_{n+1})\, Q(y_n, y_{n+1}).\end{aligned}$$

2. La chaîne est récurrente irréductible si et seulement si $\alpha < 1$ et $\beta < 1$, ce qui garantit $P(a,b) > 0$ et $P(b,a) > 0$ si a et b sont les deux états de la chaîne. Elle est de plus apériodique si $\alpha > 0$ ou $\beta > 0$; sinon $P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est de période 2. Les deux valeurs propres de P sont 1 et $\alpha + \beta - 1$, associées aux vecteurs propres

$$\pi_\infty = \left(\frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}, \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}\right)$$

et $(1, -1)$. La décomposition d'une mesure de probabilité π_0 sur cette base s'écrit

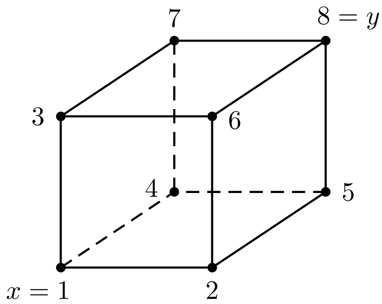
$$\pi_0 = \pi_\infty + \left(\pi_0(a) - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}\right)(1, -1).$$

Par conséquent, les lois marginales de la chaîne de Markov de mesure initiale $\pi_0 = (\pi_0(a), \pi_0(b))$ s'écrivent

$$\pi_n(a) = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} + \left(\pi_0(a) - \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}\right)(\alpha+\beta-1)^n;$$
$$\pi_n(b) = \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta} + \left(\pi_0(b) - \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}\right)(\alpha+\beta-1)^n.$$

La convergence est exponentiellement rapide, de vitesse $|\alpha + \beta - 1|^n$.

3. On considère la marche aléatoire sur le graphe suivant :



Cette chaîne de Markov est clairement irréductible, et récurrente positive puisque l'espace d'états est fini. La mesure uniforme π est invariante pour la chaîne de Markov : en effet, on a bien

$$(\pi P)(1) = \frac{\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) + \pi(4)}{4} = \frac{1}{8} = \pi(1),$$

et de même pour les autres sommets par symétrie. La théorie des chaînes de Markov récurrentes positives assure alors que

$$\mathbb{E}_x[R_x^1] = \frac{1}{\pi(x)} = 8.$$

De même, $\nu(y) = \mathbb{E}_x[\text{nombre de visites de } y \text{ avant le retour en } x]$ est une mesure invariante sur le cube, donc c'est un multiple de la mesure invariante $\pi(y)$, qui est la mesure uniforme. Comme $\nu(x) = 1$, on a aussi $\nu(y) = 1$, donc il y a en moyenne 1 visite de y (et en fait de tous les états du cube) lors d'une excursion à partir de x. Finalement, pour calculer $\mathbb{E}_x[R^1_y]$, on peut utiliser l'argument suivant. Découpons le cube en tranches $a = \{1\}$, $b = \{2,3,4\}$, $c = \{5,6,7\}$, et $d = \{8\}$; alors la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des tranches visitées par la marche $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle-même une chaîne de Markov, de transitions :

$$\begin{aligned}
&p(a,a) = \frac{1}{4} \quad ; \quad p(a,b) = \frac{3}{4} \quad ; \\
&p(b,a) = \frac{1}{4} \quad ; \quad p(b,b) = \frac{1}{4} \quad ; \quad p(b,c) = \frac{1}{2} \quad ; \\
&p(c,b) = \frac{1}{2} \quad ; \quad p(c,c) = \frac{1}{4} \quad ; \quad p(c,d) = \frac{1}{4} \quad ; \\
&p(d,c) = \frac{3}{4} \quad ; \quad p(d,d) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété de Markov forte, on calcule récursivement $\mathbb{E}_a[T_b]$, $\mathbb{E}_b[T_c]$ et $\mathbb{E}_c[T_d]$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_a[T_b] = \frac{1}{4}(1+\mathbb{E}_a[T_b]) + \frac{3}{4} \quad ; \quad \mathbb{E}_a[T_b] = \frac{4}{3} \quad ; \\
&\mathbb{E}_b[T_c] = \frac{1}{4}(1+\mathbb{E}_a[T_b]+\mathbb{E}_b[T_c]) + \frac{1}{4}(1+\mathbb{E}_b[T_c]) + \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{E}_b[T_c] = \frac{8}{3} \quad ; \\
&\mathbb{E}_c[T_d] = \frac{1}{2}(1+\mathbb{E}_b[T_c]+\mathbb{E}_c[T_d]) + \frac{1}{4}(1+\mathbb{E}_c[T_d]) + \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{E}_c[T_d] = \frac{28}{3}\,.
\end{aligned}$$

On conclut que $\mathbb{E}_x[R^1_y] = \mathbb{E}_a[T_d] = \mathbb{E}_a[T_b] + \mathbb{E}_b[T_c] + \mathbb{E}_c[T_d] = \frac{40}{3}$.

4. La marche aléatoire sur un graphe connexe est irréductible (on peut passer de x à y pour n'importe quel couple (x,y)), et elle est donc récurrente irréductible si le graphe est fini. Elle est apériodique si et seulement s'il existe dans le graphe des cycles de longueur impair $(x_0, x_1, \ldots, x_{2n+1} = x_0)$ avec $n \geq 1$. En effet, la période de la chaîne de Markov divise alors $2n+1$, et d'autre part, (x_0, x_1, x_0) est un autre cycle du graphe, donc la période divise également 2 ; elle est donc égale à 1. Réciproquement, si le graphe ne contient pas de cycle de longueur impair, alors $P^n(x,y) > 0$ si et seulement si n est pair, de sorte que la période de la chaîne est également un nombre pair ; donc la chaîne n'est pas apériodique.

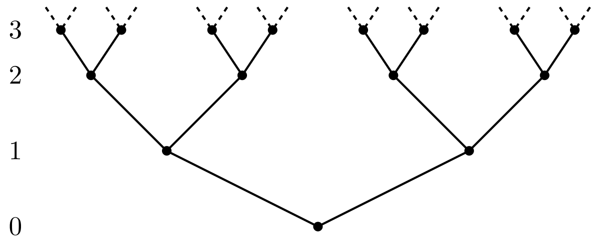
   Une mesure réversible pour la chaîne de Markov est

$$\pi(x) = \frac{\deg x}{\sum_{y\in V} \deg y} = \frac{\deg x}{2\,\mathrm{card}\, E},$$

   car $\pi(x)\, p(x,y) = \frac{1_{x\sim y}}{2\,\mathrm{card}\,E} = \pi(y)\, p(y,x)$. Par le théorème ergodique pour les chaînes de Markov finies, si le graphe contient des cycles de longueur impair, alors

$$\forall x \in V,\quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = x] = \frac{\deg x}{2\,\mathrm{card}\,E}.$$

5. On considère la marche aléatoire sur l'arbre :



Elle est clairement irréductible. Soit $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des niveaux des sommets visités par la marche $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. C'est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P(0,1) = 1 \quad ; \quad P(k \neq 0, k-1) = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(k \neq 0, k+1) = \frac{2}{3}.$$

Sauf au niveau de la racine, il y a deux fois plus de chances de monter dans l'arbre que de descendre, donc on peut s'attendre à ce que $L_n \to +\infty$ presque sûrement. Pour démontrer ceci rigoureusement, on peut utiliser la représentation suivante de la chaîne $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $(\zeta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes avec $\mathbb{P}[\zeta_k = 1] = \frac{2}{3}$. Alors, $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a même loi que

$$\left(L_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\zeta_k + 1\!\!1_{L_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \zeta_j = 0} \, (1 - \zeta_k) \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

En particulier, $L_n \geq L_0 + \sum_{k=1}^{n} \zeta_k$, donc $L_n \to +\infty$ p.s. par la loi des grands nombres. Par conséquent, la marche aléatoire sur l'arbre binaire infini est irréductible transiente.

6. La chaîne de Markov est irréductible, puisqu'on peut se déplacer de voisin en voisin sur tout l'intervalle $[\![0, n]\!]$; comme l'espace d'états est fini, elle est également récurrente. Pour trouver la loi invariante, on peut rechercher une mesure réversible, qui vérifie les équations de récurrence :

$$\pi(k+1) = \pi(k) \frac{p(k, k+1)}{p(k+1, k)} = \frac{n-k}{k+1} \, \pi(k).$$

Alors, si $\pi(0) = \lambda$, on a $\pi(1) = \frac{n}{1} \lambda$, $\pi(2) = \frac{n(n-1)}{2} \lambda$, et par récurrence $\pi(k) = \binom{n}{k} \lambda$ pour tout k. Comme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

$\lambda = 2^{-n}$, et la mesure invariante est $\pi(k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$, c'est-à-dire la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

7. Les transitions de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont déterminées par le raisonnement suivant. Si l'on tire une boule rouge dans l'urne U_1 et une boule blanche dans l'urne U_2, alors le nombre de boules rouges dans l'urne U_1 diminue d'une unité, donc

$$P(i,i-1) = \frac{\max(i,0)}{k}\,\frac{\max(l-r+i,0)}{l}$$

pour $i \in [\![0,k]\!]$. Si l'on tire une boule blanche dans l'urne U_1 et une boule rouge dans l'urne U_2, alors le nombre de boules rouges dans l'urne U_1 augmente d'une unité, donc

$$P(i,i+1) = \frac{\max(k-i,0)}{k}\,\frac{\max(r-i,0)}{l}.$$

Dans les autres cas, le nombre de boules rouges dans l'urne U_1 reste invariant, donc

$$P(i,i) = \frac{\max(i,0)\,\max(r-i,0) + \max(k-i,0)\,\max(l-r+i,0)}{kl}.$$

On peut passer de voisin en voisin sur tout l'intervalle

$$[\![\max(0,r-l),\min(k,r)]\!],$$

donc la chaîne de Markov est récurrente irréductible sur cet intervalle. Elle est également apériodique dès que cet intervalle est de longueur supérieure à 2, puisque $P(i,i) > 0$ pour les indices i strictement dans l'intervalle. Par le théorème ergodique pour les chaînes de Markov finies apériodiques, la loi π_n de X_n converge vers l'unique mesure invariante par la matrice de transition. On peut rechercher une mesure réversible, et elle vérifie

$$\pi(i+1) = \pi(i)\,\frac{P(i,i+1)}{P(i+1,i)} = \frac{(k-i)(r-i)}{(i+1)(l-r+i+1)}\,\pi(i)$$

pour i et $i+1$ dans l'espace d'états de la chaîne. En supposant pour simplifier $r < l$ et $r < k$, si $\pi(0) = \lambda$, on obtient $\pi(1) = \frac{k\,r}{1\,(l-r+1)}\,\lambda$, $\pi(2) = \frac{k(k-1)\,r(r-1)}{2\,(l-r+1)(l-r+2)}\,\lambda$, et par récurrence,

$$\pi(k) = \binom{k}{i}\frac{r\,(l-r)!}{(r-i)!\,(l-r+i)!}\,\lambda = \binom{k}{i}\binom{l}{r-i}\,\lambda'.$$

Comme $\sum_{i=\max(0,r-l)}^{\min(k,r)} \binom{k}{i}\binom{l}{r-i} = \binom{k+l}{r}$, on en déduit la valeur de λ', et

$$\pi(i) = \frac{\binom{k}{i}\binom{l}{r-i}}{\binom{k+l}{r}}$$

est la loi hypergéométrique de paramètres $(k,k+l,r)$. C'est la limite de π_n lorsque n tend vers l'infini.

8. Notons $C_n = X_n + 3$. Étant donnés deux côtés F et G d'un polygone convexe à c côtés, il y a respectivement k et $c-2-k$ côtés entre F et G selon qu'on parcourt le bord du polygone dans un sens ou dans l'autre. Si les deux côtés sont choisis au hasard, alors k a une loi uniforme sur $[\![0, c-2]\!]$. L'opération décrite fournit alors deux polygônes avec respectivement $3+k$ et $c+1-k$ côtés, ces deux quantités suivant toutes les deux des lois uniformes sur $[\![3, c+1]\!]$. Par conséquent, la loi de C_{n+1} sachant C_n est la loi uniforme sur $[\![3, C_n+1]\!]$. La loi de X_{n+1} sachant X_n est donc la loi uniforme sur $[\![0, X_n+1]\!]$, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P(i,j) = \begin{cases} \frac{1}{i+2} & \text{si } j \in [\![0, i+1]\!], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La chaîne est clairement irréductible sur $\mathbb{N}$. La moyenne de X_{n+1} sachant X_n est $\frac{X_n+1}{2}$. La suite $\alpha_n = \mathbb{E}[X_n]$ est donc une suite arithmético-géométrique d'équation

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + 1}{2} \quad ; \quad \alpha_0 = X_0.$$

On conclut que $\mathbb{E}[X_n] = \frac{X_0-1}{2^n} + 1$. En particulier, $\mathbb{E}[X_n]$ tend vers 1, donc la probabilité $\mathbb{P}[X_n \geq k]$ reste bornée par C/k pour tout k. Il s'ensuit que la chaîne ne peut pas être transiente, elle est donc récurrente irréductible. Pour trouver une mesure stationnaire, on peut raisonner comme suit. Supposons qu'il existe une mesure de probabilité invariante π, de fonction génératrice $G(s) = \pi(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi(k)\, s^k$. Ce qui précède montre que $\pi(s^X)$ doit être égal à $\pi(\mathbb{E}[s^{\mathcal{U}(X+1)}])$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \, \frac{1 + s + s^2 + \cdots + s^{k+1}}{k+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+2} \, \frac{s^{k+2}-1}{s-1}.$$

On en déduit les équations fonctionnelles :

$$\begin{aligned} (s-1)\, G(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k\, s^{k+2}}{k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+2}; \\ (s-1)\, G'(s) + G(s) &= s\, G(s) \quad \text{par dérivation.} \end{aligned}$$

Autrement dit, $G'(s) = G(s)$, et $G(s) = \mathrm{e}^{s-1}$ est la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre 1. On vérifie qu'effectivement,

$$\begin{aligned} (\pi\, P)(k) &= \sum_{j=k-1}^{\infty} \frac{\pi(j)}{j+2} = \sum_{j=k-1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{j!(j+2)} \\ &= \mathrm{e}^{-1} \sum_{j=k-1}^{\infty} \frac{j+1}{(j+2)!} = \mathrm{e}^{-1} \sum_{j=k-1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} - \frac{1}{(j+2)!} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!} = \pi(k). \end{aligned}$$

La chaîne est donc récurrente positive, et elle est apériodique puisque $P(i,i) = 1$ pour tout i. Ainsi, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

9. On peut calculer

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[Y_{n+1} = x_{n+1} | Y_0 = x_0, Y_1 = x_1, \cdots, Y_n = x_n] \\
&= \frac{\mathbb{P}[Y_0 = x_0, Y_1 = x_1, \cdots, Y_n = x_n, Y_{n+1} = x_{n+1}]}{\mathbb{P}[Y_0 = x_0, Y_1 = x_1, \cdots, Y_n = x_n]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[X_N = x_0, X_{N-1} = x_1, \cdots, X_{N-n} = x_n, X_{N-n-1} = x_{n+1}]}{\mathbb{P}[X_N = x_0, X_{N-1} = x_1, \cdots, X_{N-n} = x_n]} \\
&= \frac{\pi(x_{n+1}) P(x_{n+1}, x_n) \cdots P(x_1, x_0)}{\pi(x_n) P(x_n, x_{n-1}) \cdots P(x_1, x_0)} = \frac{\pi(x_{n+1}) P(x_{n+1}, x_n)}{\pi(x_n)}
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété de Markov de la chaîne renversée, et donne la matrice de transition $\widetilde{P}(x_n, x_{n+1})$. Pour les autres assertions, voir le cours.

10. Par le théorème ergodique, les variables aléatoires $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k = y}$ convergent p.s. vers $\pi(y)$. Comme ces variables sont uniformément bornées par 1, par convergence dominée, on a aussi

$$\mathbb{E}_x \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k = y} \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k(x, y)$$

qui converge vers $\pi(y)$.