Marie-Claude, la géométrie, et moi et moi et moi

Daniel PERRIN

Orsay, 4 février 2019

Mode d'emploi

Ce diaporama en pdf est (en principe) interactif. Certains liens, les bleus, permettent d'afficher des documents pdf. D'autres liens envoient vers les figures GeoGebra qui sont installées sur WIMS ; on fait apparaître les étapes des démonstrations en cliquant sur les cases à cocher. On peut animer les figures soit en animant les curseurs (s'il y en a) soit en déplaçant les points coloriés en rouge ou rose avec la souris.

Introduction : Marie-Claude et moi

- Les sévriennes.
- Le CAPES.
- La licence pluridisciplinaire.
- Le module : *Projet de géométrie*.
- J'ai tout appris de toi ...

Marie-Claude dixit :

ma préférence à moi,

les polyèdres archimédiens

Arête, arête, ne me touche pas

- Un polyèdre convexe est dit archimédien s'il vérifie les deux conditions suivantes :
  • Ses faces sont des polygones réguliers (mais pas nécessairement toutes de même type).
  • En chaque sommet aboutissent le même nombre de faces de chaque type, en respectant de plus le même ordre.
- Il avait un joli nom mon polyèdre ...
- Le résultat d'Archimède (?).
- Une question pratique : combien de pièces de chaque type ?

Avaler la première arête ?

Découvrir la formule d'Euler au collège :

type	tétraèdre	cube	octaèdre	pyramide	prisme
s	4	8	6	5	6
f	4	6	8	5	5
a	6	12	12	8	9

type	cristal	diamant	dodécaèdre	icosaèdre
s	5	7	20	12
f	6	10	12	20
a	9	15	30	30

Chez ces gens-là, On n´cause pas, Monsieur, on compte

- Combien de faces de chaque type ?
- Pour des précisions sur les polyèdres, voir *Mathématiques d'école* ou sur le serveur WIMS la page sur les polyèdres rédigée par Marie-Claude, ou sur ma page web le mémoire sur les deltaèdres encadré par Marie-Claude :
`https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Projet-geometrie/Deltaedre8.pdf`

Marie-Claude dixit :

j'ai deux amours :

découpage et recollement

Je vais te découper
Minutieusement au scalpel

- La notion d'aire est souvent introduite à l'école à partir des procédures de découpage et recollement.
- *Deux parties A et B de $\mathbf{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) sont dites équivalentes* **par découpage et recollement** *(ou par puzzle) s'il existe des partitions $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ et $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$ et, pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, une isométrie g_i de A_i sur B_i.*
- Un exemple célèbre : Le découpage de Dudeney

Les a coupés en petits morceaux,
Mis au saloir comme pourceaux.

- On a une notion plus faible en demandant seulement que les morceaux soient "presque" disjoints (i.e. que les intersections soient des courbes si on est dans le plan, des surfaces si on est dans l'espace).
- On a des notions plus fortes en imposant aux g_i d'être des déplacements, voire des translations.

J'ai un problème

- On suppose qu'on a une mesure de type Riemann (i.e. simplement additive et invariante par isométrie) sur certaines parties de $\mathbf{R}^n$.
- La propriété essentielle de l'opération de découpage et recollement c'est que deux parties équivalentes sont de même mesure (au moins si les morceaux ont une mesure).
- Le problème de Bolyai-Hilbert-Tarski est celui de la réciproque : si deux parties ont même mesure, sont-elles équivalentes par découpage et recollement ? Autrement dit, si deux parties ont même aire (resp. même volume), peut-on produire un puzzle pour passer de l'une à l'autre ?
- Cette propriété est-elle vraie au moins pour certaines parties particulières (les polygones ou les polyèdres, par exemple) ?

La justification

du découpage-recollement :

le théorème de Bolyai

Le théorème de Bolyai

- **Théorème (F. Bolyai, 1832, Gerwien, 1833)**.
Soient A et B deux polygones de même aire. Alors A et B sont équivalents par découpage et recollement (avec des morceaux polygonaux presque disjoints), en utilisant exclusivement des déplacements.
- Une conséquence du théorème de Bolyai est qu'on peut – en principe - calculer l'aire de n'importe quel polygone par découpage et recollement.
- C'est la justification des procédures que l'on connaît en sortant de l'école (primaire).

Remarques sur l'aire (du tra la la)

- Si A et B sont des polygones équivalents ils ont même aire.
- La relation est transitive : si A est équivalent à B et B équivalent à C alors A est équivalent à C. figure

On lemme à en mourir

- Lemme fondamental : *Tout polygone est équivalent par découpage et recollement à un carré de même aire.*
- Le théorème en résulte.

Preuve du lemme fondamental

- On peut découper le polygone donné en triangles. figure
- Tout triangle est équivalent à un rectangle. figure
- Tout rectangle est équivalent à un carré. figure
- Deux carrés sont équivalents à un seul. figure
- Il est sympa, et attirant,
  Mais méfiez vous, c'est un truand !
- Pour des précisions, voir Mathématiques d'école ou, sur ma page web :
  `https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/IPRDP1.pdf`

Les exemples se ramassent à la pelle

- De trois carrés à un carré : figure
- Le problème du pâtissier

Une solution au problème du pâtissier : la cuisine, qui retient les petits maris ?

Elle vendait des p'tits gâteaux

- Une solution plus sérieuse au problème du pâtissier : figure
- Lorsque p est pair, il est facile de partager un carré en p triangles de même aire. Exemples .
- En revanche on montre que c'est impossible si p est impair.
- Moralité : même aire entraîne p pair !
- Puisqu'on en parle ...

Calculer des volumes

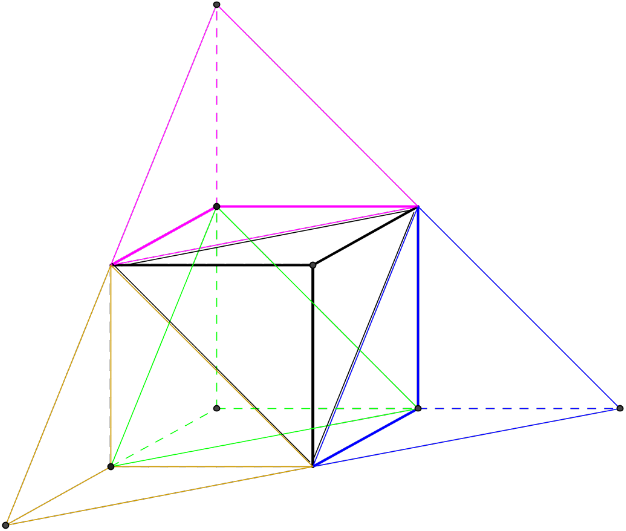
Que jamais l'art abstrait qui sévit maintenant n'enlève à vos attraits ce volume étonnant

- L'un des sommets de la mathématique d'Euclide :

  Le volume d'une pyramide est le tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.
- Contrairement au cas du triangle vu ci-dessus, la preuve d'Euclide n'utilise pas un découpage fini de la pyramide, mais un processus infini avec une sorte de passage à la limite.
- Pendant des siècles, les mathématiciens se sont demandés si l'on pouvait éviter ce processus infini. Bien sûr, ce serait le cas si l'analogue du théorème de Bolyai était vrai.

Le théorème de Dehn

- Le troisième problème de Hilbert pose exactement la question de l'analogue de Bolyai en dimension 3 :
  Deux polyèdres de même volume (par exemple un cube et un tétraèdre régulier) sont-ils équivalents par découpage et recollement ?
- Dehn a montré en 1900 que la réponse est négative et on ne peut donc espérer montrer le volume de la pyramide par un découpage fini.
- Et pourtant ...



Calcul

Des paradoxes

Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski

- **Théorème (Banach-Tarski, 1924).**

  Deux parties bornées d'intérieur non vide quelconques de $\mathbf{R}^3$ *sont équivalentes par découpage et recollement.*
- Y a quelque chose qui cloche là-dedans,
  J'y retourne immédiatement

C'est la fête à la grenouille

- Par exemple on peut découper une pomme et en faire la lune, ou une grenouille et en faire un bœuf !
- Ou encore découper une boule et en faire deux boules, ou un pain et en faire mille pains.
- Vous noterez dans le choix de cet exemple l'influence de Marie-Claude. Je suis sur la bonne voie pour son objectif à mon égard. Quoique ...
- *Si l'éternel existe, en fin de compte il voit,*
  Qu'je m'conduis guère plus mal que si j'avais la foi.

Une mesure universelle, c'est comme une fourmi de dix-huit mètres, ça n'existe pas

- Le résultat de Hausdorff-Banach-Tarski semble contredire l'invariance du volume par découpage et recollement. Il implique seulement que certains des morceaux ne peuvent être mesurés : il n'existe pas dans l'espace de mesure universelle.
- Pour plus de précisions, voir :

https://www.math.u-psud.fr/~perrin/TER/HBT.pdf

- En revanche, une telle mesure existe dans le plan, ce qui impose que deux parties équivalentes ont même aire et empêche un paradoxe de même type. Il reste tout de même un beau résultat ...

On nous cache tout,
on nous dit rien

Contrairement à plus d'un siècle de propagande mensongère, voici la vérité enfin rétablie, **la quadrature du cercle est possible :**

Un disque et un carré de même aire sont équivalents par découpage et recollement. (Laczkovich, 1990)

Longtemps, longtemps après que les conférenciers ont disparu

- On pourra consulter *Mathématiques d'école*.
- ou voir ma page web (merci Marie-Claude !) :

https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/IPRDP1.pdf

- Ou sur le site *Images des maths*

http://images.math.cnrs.fr/Aires-et-volumes-decoupage-et,847

http://images.math.cnrs.fr/Aires-et-volumes-decoupage-et-725

- Et la bibliographie de ces textes.
- Je vous remercie de votre attention et pour m'avoir écouté, je vous tire mon chapeau !

Bonus

Les coupeurs de cheveux en quatre m'ont fait peur

- Que faire des segments superflus ? On les mange !
- *Toute partie A d'intérieur non vide du plan est équivalente, par découpage et recollement, à la réunion disjointe de A et d'un segment I.*
- On prend dans A un disque D de la taille du segment (au besoin on le coupe en morceaux) et un de ses rayons J.
- On va montrer l'équivalence $D \sim D \cup I$. La recette (Galilée ?) Il y a une bijection entre l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers ≥ 0 et l'ensemble $\mathbf{N}^*$ des entiers > 0 par $n \mapsto n+1$.

Hérisson son son ...

- On choisit un angle θ incommensurable avec π et on considère la rotation ρ de centre O et d'angle θ. Comme θ est incommensurable à π, les transformés $\rho^n(J)$ sont disjoints.
- On note $E = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \rho^n(J)$ le "hérisson" et $E^* = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \rho^n(J)$.
  On passe de E à E^* par ρ. Dans cette opération, on a fait disparaître J. C'est la recette de Galilée.
- Le disque D est alors équivalent à la réunion du disque et du segment $D \cup I$:

$$D = (D - E) \cup E^* \cup J \quad \text{et} \quad D \cup I = (D - E) \cup E \cup I.$$

Il ne font rien seize et seize, et surtout pas trente-deux

- Le résultat crucial – à mon avis – est le lemme suivant (Hausdorff, 1913) :
  Soit S la sphère unité de $\mathbf{R}^3$. Il existe une partition de S en quatre ensembles X, Y, Z, T, avec T dénombrable et X, Y, Z isométriques entre eux et tels que $X \cup Y$ soit isométrique à Z.
- Un égale deux, en quelque sorte ou $16 + 16 = 16$!
- La recette du dédoublement : utiliser la bijection de la réunion disjointe $\mathbf{N} \cup \mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}$ qui envoie respectivement les deux copies sur les entiers pairs et impairs.