ENS de Lyon
L3 - Intégration et Probabilités

2$^{\text{nd}}$ semestre 2021-2022

TD 9

Convergence en loi, transformée de Fourier

Exercice 1 *Convergence en loi de couples de variables aléatoires*

Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ deux suites de variables alétoires réelles convergeant en loi vers des variables aléatoires X et Y.

1. *(Lemme de Slutsky)* On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $Y = c$ p.s.
   (a) Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers Y.
   (b) Montrer que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers (X, Y).
2. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de moyenne nulle et telles que $\mathbb{E}Z_1^2 < +\infty$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n Z_k$ et $\Sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n Z_k^2$. Montrer que

$$\frac{\sqrt{n}M_n}{\Sigma_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Exercice 2 *Variation totale et couplages.*

On définit la distance en variation totale de deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ ainsi :

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = 2 \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} |\mu(A) - \nu(A)|$$

1. On suppose que μ, ν sont à densités par rapport à une mesure m sur $\mathbb{R}^d$, de densités respectives f, g. Montrer que

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - g(x)| dm(x) = 2\left[1 - \int_{\mathbb{R}^d} \min(f(x), g(x)) dm(x)\right].$$

2. Soit $Z = (X, Y)$ une v.a. dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, telle que $X \sim \mu$ et $Y \sim \nu$. Montrer que

$$\|\mu - \nu\|_{TV} \leq 2\mathbb{P}(X \neq Y)$$

3. Montrer que l'on peut construire une variable aléatoire $Z = (X, Y)$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ de lois marginales μ, ν telle que $2\mathbb{P}(X \neq Y) \leq \|\mu - \nu\|_{TV}$.
4. En déduire que $\|\mu - \nu\|_{TV} = 2\inf\{\mathbb{P}(X \neq Y) \mid (X, Y) \text{ v.a. dans } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, X \sim \mu, Y \sim \nu\}$.

Exercice 3 *Inégalité de Le Cam.*

1. Montrer que pour des variables aléatoires dans $\mathbb{Z}$, la convergence en loi est équivalente à la convergence en variation totale.
2. Soit $p \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et Y suit une loi de Poisson de paramètre p et $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq p^2$.
3. Inégalité de Le Cam. Soit $(p_1, ..., p_n)$ une suite de réels de $[0, 1]$. Soit S_n la somme de n variables aléatoires indépendantes de lois de Bernoulli de paramètres $p_1, ..., p_n$. On note μ_n la loi de S_n. On note μ la loi de Poisson de paramètre λ où $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$. Montrer que

$$\|\mu_n - \mu\|_{TV} \leq 2\sum_{i=1}^n p_i^2$$

4. En déduire une majoration de la vitesse de convergence (pour la distance de variation totale) de $\mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$ vers $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 4 *Transformées de Fourier*

Dans cet exercice, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, sa transformée de Fourier est définie par la formule

$$\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. On suppose (lorsque c'est nécessaire) que f est dérivable, et de dérivée intégrable. Soient $a, b, \xi_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma, c > 0$. Compléter le tableau suivant :

Fonction	Transformée de Fourier
$x \mapsto af(x) + bg(x)$	
$x \mapsto f(ax)$	
$x \mapsto f(x+a)$	
$x \mapsto f(x)e^{ix\xi_0}$	
$x \mapsto (f * g)(x)$	
$x \mapsto f(x)g(x)$	
$x \mapsto f'(x)$	
$x \mapsto xf(x)$	
$x \mapsto \mathbb{1}_{[a,b]}(x), \quad a < b$	
$x \mapsto \exp(-cx)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	
$x \mapsto \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^d \exp\left(-\frac{\lvert x\rvert^2}{2\sigma^2}\right)$	

Exercice 5 *Transformée de Fourier d'une fonction radiale*

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ une fonction radiale, au sens où il existe une fonction mesurable g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad f(x) = g(|x|),$$

où $|x|$ désigne la norme euclidienne de x. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également radiale.

Exercice 6 *Espace de Schwartz*

L'espace de Schwartz en dimension d est défini par

$$\mathcal{S} := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d),\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \text{ multi-indice}, |x|^k D_\alpha f(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\},$$

où $D_\alpha f$ désigne la dérivée partielle de f par rapport au multi-indice α. Montrer que l'espace de Schwartz est stable par la transformée de Fourier, au sens où

$$\hat{\mathcal{S}} := \{\hat{f}, f \in \mathcal{S}\} \subset \mathcal{S}.$$

Puis, montrer que $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.