ENS de Lyon $\hfill$ 2nd semestre 2020-2021

L3 - Intégration et Probabilités

TD 8

Convergence en loi, théorème central limite

Exercice 1 *Stabilité de la convergence en loi*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire X. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La suite $(f(X_n))_{n\geq 0}$ converge-t elle en loi vers $f(X)$?

Exercice 2 *Quelques convergences en loi*

1. Pour tout entier $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ avec $np_n \to \lambda > 0$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoire i.i.d. de loi $Exp(1)$. Montrer que la variable aléatoire $\max(X_1, \dots, X_n) - \log n$ converge en loi. Quelle est sa limite ?
3. Montrer qu'une variable de Poisson de grand paramètre, bien recentrée et renormalisée, converge en loi vers une variable gaussienne.
4. Soit λ un nombre réel strictement positif. Pour tout $n > 1/\lambda$, on se donne une variable aléatoire X_n de loi géométrique de paramètre λ/n. Montrer que la suite (X_n/n) converge en loi vers une variable exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 3 *Convergence en loi de couples de variables aléatoires*

Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ deux suites de variables alétoires réelles convergeant en loi vers des variables aléatoires X et Y.

1. On suppose que pour tout $n \geq 0, X_n$ et Y_n sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi. Est-ce que la limite est la loi de (X, Y) ?
2. Sans supposer d'indépendance, est-ce que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi ?
3. *(Lemme de Slutsky)* On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $Y = c$ p.s.
   (a) Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers Y.
   (b) Montrer que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers (X, Y).
4. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de moyenne nulle et telles que $\mathbb{E}Z_1^2 < +\infty$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k \quad \text{et} \quad \Sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k^2$$

   Montrer que

$$\frac{\sqrt{n}M_n}{\Sigma_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

   Ce résultat est utilisé en statistiques quand on ne connaît pas la variance σ^2 et qu'on doit la remplacer par Σ_n^2, une "estimation empirique" de la variance.

Exercice 4 *Étude de suite*

On pose, pour n entier et α réel positif,

$$T_n(\alpha) = e^{-n}\sum_{k=0}^{\lfloor \alpha n\rfloor} \frac{n^k}{k!}.$$

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\alpha) = 0$ si $\alpha < 1$, et $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\alpha) = 1$ si $\alpha > 1$.
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} T_n(1) = \frac{1}{2}$.

Exercice 5 *Sommes de variables de Bernoulli*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. de loi Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On considère $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer la limite de $\mathbb{P}(S_n \in I_n)$ quand n tend vers l'infini, lorsque

1. $I_n = [0,\, pn]$;
2. $I_n = [pn - 4\sqrt{n},\, pn - \sqrt{n}]$;
3. $I_n = [pn - n^{1/3},\, pn]$.

Exercice 6 *Changement de signe*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telle que $\mathbb{E}[X_1] = 0, \mathbb{E}[X_1^2] = 1$. On note S_n la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer la limite lorsque n tend vers l'infini de la probabilité de l'intersection des événements $S_n < 0$ et $S_{2n} > 0$.