ENS de Lyon
L3 - Intégration et Probabilités

2^{nd} semestre 2021-2022

TD 7

Convergences p.s., L^p, en probabilité, loi forte des grands nombres.

Exercice 1 *Implications et réciproques*

Faire un diagramme d'implications, réciproques partielles, exemples, contre-exemples, pour les convergences L^p ($1 \leq p \leq +\infty$), en probabilité et presque sûre.

Exercice 2 *Stabilité de la convergence en loi*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Si X_n converge p.s. vers X, est-ce que $f(X_n)$ converge p.s. vers $f(X)$?
2. Si X_n converge en probabilité vers X, est-ce que $f(X_n)$ converge en probabilité vers $f(X)$?
3. Si X_n converge L^p vers X, est-ce que $f(X_n)$ converge L^p vers $f(X)$? Et si f est bornée ? Et si f est lipschitzienne ?

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f(k/n)$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$ et $p \in [0,1]$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f(k/n)$ pour f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$.

Exercice 4 *La convergence p.s. est-elle topologisable ?*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Démontrer que la convergence p.s. de variables aléatoires réelles n'est pas topologisable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de topologie $\mathcal{T}$ sur Ω telle que pour toutes suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ et X définies sur Ω et à valeurs réelles,

$$X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X \iff \forall U \in \mathcal{T}, X_n \in U \text{ à partir d'un certain rang.}$$

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer une suite de variables aléatoires qui converge en probabilité mais pas p.s.

Exercice 5 *Inégalité de Hoeffding*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs réelles, indépendantes, centrées. On suppose qu'il existe une suite de réels strictement positifs $(c_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $|X_n| \leq c_n$ p.s.. Pour tout $n \geq 1$ on note $a_n = c_1^2 + \cdots + c_n^2$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Démontrer que pour toute variable aléatoire X réelle, centrée et p.s. bornée par 1, on a $\mathbb{E}[e^{tX}] \leq \exp(t^2/2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp(-\varepsilon^2/2a_n)$.
3. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp(-\varepsilon^2/2a_n)$.

Exercice 6 *Une application*

On reprend les mêmes notations que l'exercice précedent. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe un réel $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq n^{2\alpha-\beta}.$$

Démontrer que $\dfrac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0$.