ENS de Lyon — 2$^{\text{nd}}$ semestre 2021-2022
L3 - Intégration et Probabilités

TD 6

Lemmes de Borel-Cantelli, Loi du $0-1$ de Kolmogorov

Exercice 1 *Nombres univers*

Démontrer que *Leb*-presque tout $x \in [0,1]$ admet dans son développement en base 2 une infinité de fois toute suite finie de 0 et de 1.

Exercice 2 *Lemme de Borel-Cantelli, réciproque et hypothèses*

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, telles que pour tout $n \geq 1$, $Y_n \sim \mathcal{E}(n)$.

1. Montrer que presque sûrement la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0. En déduire que presque sûrement, à partir d'un certain rang, $Y_n \leq Y_1$.
2. On suppose maintenant que les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 0}$ sont indépendantes. Calculer $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Y_n > Y_1)$. Commenter.
3. (*au cas où...*) Soit $X \sim \mathcal{B}(1/2)$. Calculer $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X = 1)$. Commenter !

Exercice 3 *Somme et limite supérieure de variables aléatoires i.i.d.*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles positives i.i.d.

1. Montrer que presque sûrement $\sum_{n\geq 0} X_n = \infty$, sauf dans un cas à préciser.
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a l'équivalence suivante
$$\mathbb{E}[X] < \infty \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\big(X \geq \alpha n\big) < \infty.$$
En déduire que presque sûrement,
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ \infty \text{ si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{cases}.$$

Exercice 4 *Plus longue sous-suite de piles*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour tout entier n, on note R_n le nombre de X_i consécutifs prenant la valeur 1, à partir de l'indice n. Formellement,
$$R_n := \sup\{m \geq 1, X_n = X_{n+1} = .. = X_{n+m-1} = 1\}.$$
On notera également
$$M_n = \max(R_0, .., R_n).$$

1. Montrer que
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{\log_2(n)} \leq 1 \quad \text{p.s.}$$
2. En déduire que
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log_2(n)} \leq 1 \quad \text{p.s.}$$
3. Conclure que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log_2(n)} = 1 \quad \text{p.s.}$$

Loi du 0-1 de Kolmogorov

Exercice 5 *Loi des grands nombres, cas non intégrable*

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que si X_1 n'est pas intégrable, alors $(\frac{S_n}{n})_{n\geq 1}$ diverge p.s.

Exercice 6 *Loi du 0-1 et percolation*

Soit $G = (V, E)$ le graphe dont les sommets sont $\mathbb{Z}^2$, et deux points (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont reliés par une arête lorsque $|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| = 1$. Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(X_e)_{e\in E}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. de loi $Ber(p)$. Soit G_p le graphe aléatoire dont l'ensemble des sommets est $\mathbb{Z}^2$, et l'ensemble des arêtes est $\{e \in E \mid X_e = 1\}$. Montrer que la probabilité qu'il existe une composante connexe ∞ dans G_p vaut 0 ou 1.

Exercice 7 *Loi du 0-1 de Kolmogorov et séries entières aléatoires*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes.

1. Montrer que de le rayon de convergence R de la série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} X_n z^n$ est presque sûrement constant.
2. On suppose maintenant que les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ ont même loi (et que cette loi n'est pas δ_0), et que $\mathbb{E}[|X_0|] < +\infty$. Montrer que le rayon de convergence de f est égal à 1 p.s.

   Remarque : on peut montrer que le rayon de convergence vaut 0 *p.s. ou* 1 *p.s. , selon que* $\mathbb{E}[\ln(|X_0|)^+]$ *est infini ou non. Dans le cas où le rayon de convergence vaut* 1 *p.s. on peut montrer que la série n'est presque sûrement pas prolongeable en* 1*, et possède une infinité de zéros dès que* X_0 *suit une loi symétrique.*