ENS de Lyon — 2^{nd} semestre 2020-2021
L3 - Intégration et Probabilités

TD 5
Indépendance, Lemme de Borel-Cantelli

Indépendance

Exercice 1 *Échauffement*

1. Calculer la loi de la somme de deux variables de Poisson indépendantes.
2. Calculer la loi du minimum de deux lois exponentielles indépendantes.
3. On suppose $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C]$. Est-ce que A, B et C sont indépendants ?
4. On suppose que A et ${}^cB$ sont deux événements indépendants. Est-ce que A et B sont indépendants ?

Exercice 2 *Lois sur* $\mathbb{N}^*$

La fonction ζ de Riemann est définie pour $s > 1$ par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$. On munit $\mathbb{N}^*$ de la tribu totale $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ et de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ définie par $\mathbb{P}(\{x\}) = \frac{1}{\zeta(s)} x^{-s}$, $x \in \mathbb{N}^*$. Pour p premier, on pose $A(n) = n\mathbb{N}^*$ l'événement « être multiple de n ».

1. Justifiez que $\mathbb{P}$ est bien une mesure de probabilité et montrez que pour $p_1, \ldots, p_k$ premiers distincts, les évenements $A(p_1), \ldots, A(p_k)$ sont indépendants.
2. Montrer la formule d'Euler $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}^*$ "bien répartie", au sens que $\mathbb{P}(A(n)) = 1/n$.

Exercice 3 *Somme aléatoire*

Dans cet exercice, soit $(Y_i)_i$ une suite i.i.d. et N une variable aléatoire indépendente de la suite $(Y_i)_i$. On pose $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$.

1. Si Y_1 et N sont intégrables, montrer que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Y_1]$.
2. Si Y_i est à valeurs entières, calculer la fonction génératrice de X.
3. Si $Y_i \sim \text{Geom}(p)$, et $N \sim \text{Geom}(a)$, calculer la loi de X puis donner une interprétation avec une suite de lancers de deux pièces.
4. Avec $Y_i \sim \text{Be}(p)$ et $N \sim \text{Po}(\lambda)$, montrer également que X et $N - X$ sont indépendantes.

Exercice 4 Maximum de variables à densité

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et à densité. Montrer que $\max(X, Y)$ est à densité et calculer celle-ci.

Lemmes de Borel-Cantelli

Exercice 5 *Nombres univers*

Démontrer que *Leb*-presque tout $x \in [0, 1]$ admet dans son développement en base 10 une infinité de fois toute suite finie de 0 et de 1.

Exercice 6 *Plus longue sous-suite de piles*

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour tout entier n, on note R_n le nombre de X_i consécutifs prenant la valeur 1, à partir de l'indice n. Formellement,

$$R_n := \sup\{m \geq 1, X_n = X_{n+1} = .. = X_{n+m-1} = 1\}.$$

On notera également

$$M_n = \max(R_0, .., R_n).$$

1. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{\log_2(n)} \leq 1 \quad \text{p.s.}$$

2. En déduire que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log_2(n)} \leq 1 \quad \text{p.s.}$$

3. Conclure que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log_2(n)} = 1 \quad \text{p.s.}$$

Absence de mémoire

Exercice 7 Démontrer qu'une variable aléatoire positive non nulle X suit une loi exponentielle si et seulement si elle a la propriété d'absence de mémoire :

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

pour tout $s, t \geq 0$.