ENS de Lyon — 2^{nd} semestre 2021-2022

L3 - Intégration et Probabilités

TD 4

Lois usuelles

Exercice 1 *Fonction quantile.*

Soit X une variable aléatoire réelle, de fonction de répartition F. On définit G, appelé le pseudo-inverse de F, comme suit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq t\}.$$

1. Démontrer que :
   (a) Si F est continue, alors pour tout $t \in]0,1[, F(G(t)) = t$.
   (b) Si F est strictement croissante, alors pour tout $x \in \mathbb{R}, G(F(x)) = x$.
   (c) Si F est continue et strictement croissante, alors F est inversible et $G = F^{-1}$.
   (d) Donner une condition (non nécessaire) pour que ces deux propriétés soient vérifiées.
2. Prouver que si F est continue et strictement croissante, alors la variable aléatoire $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
3. Si Y suit la loi uniforme sur $[0,1]$, quelle est la fonction de répartition de $G(Y)$? *Indication : on pourra vérifier que* $\{G(U) \leq t\} = \cap_{n\geq 1}\{U < F(t+1/n)\}$.

Exercice 2 *Calcul de lois.*

1. On suppose que la loi de (X,Y) est $\mathcal{E}xp(1/2) \otimes \mathcal{U}([0,2\pi])$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.
2. On suppose que la loi de X est $\mathcal{U}([0,1])$. Déterminer la loi de $-\log(U)$
3. (Transformée de Box-Müller) Déduire un moyen de fabriquer une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)^{\otimes 2}$ à partir d'une paire $(U,V) \sim \mathcal{U}([0,1])^{\otimes 2}$.
4. On suppose que la loi de (X,Y) est $\mathcal{N}(0,1)^{\otimes 2}$. Déterminer la loi de $\frac{X}{Y}$.

Exercice 3 *Les moments ne caractérisent pas la loi*

On fixe un entier naturel $q \geq 2$, et l'on note $M_q = \{q^j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

1. Soit X la variable aléatoire à valeurs dans M_q dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X = q^j) = e^{-q}q^j/j!$. Calculer les moments de X.
2. Montrer que la fonction $h : z \mapsto \prod_{k=1}^{\infty}(1 - zq^{-k})$ est analytique sur $\mathbb{C}$.
3. Soit $z \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ son développement de Taylor au voisinage de 0. Définissons pour tout $j \geq 0, a_j = j!c_j$. Montrer que pour tout $k \geq 0$,
$$\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-q} q^{kj} a_j \frac{q^j}{j!} = 0.$$
4. En utilisant l'équation fonctionnelle $h(qz) = (1-z)h(z)$, montrer que $c_0 = 1$ et pour tout $j \geq 1$,
$$c_j = (-1)^j[(q-1)(q^2-1)\dots(q^j-1)]^{-1}.$$
5. Pour tout $\varepsilon \in [-1,1]$, soit X_ε une variable aléatoire à valeurs dans M_q dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X_\varepsilon = q^j) = (1+\varepsilon a_j)e^{-q}q^j/j!$. Pourquoi est-ce que cela est bien défini ? Calculer les moments de X_ε.

Exercice 4 Lois usuelles

Remplir le tableau suivant.

Variable aléatoire	$X(\Omega)$	Loi	Paramètres	Espérance	Variance	Fonction de répartition	Fonction caractéristique
Bernoulli	$\{0,1\}$	$\mathbb{P}(X=0)=p$, $\mathbb{P}(X=1)=1-p$	$0 \leq p \leq 1$				
Binomiale	$\{0,1,\dots,n\}$	$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}$	$0 \leq p \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$				
Géométrique	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{P}(X=k)=(1-p)^{k-1}p$	$0 \leq p \leq 1$				
Poisson	$\mathbb{N}$	$\mathbb{P}(X=k)=\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$	$\lambda > 0$				
Exponentielle	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{P}(X\in[a,b])=\int_a^b \lambda \exp(-\lambda x)dx$	$\lambda > 0$				
Cauchy	$\mathbb{R}$	$\mathbb{P}(X\in[a,b])=\pi^{-1}\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx$					