ENS de Lyon
L3 - Intégration et Probabilités

2$^{\text{nd}}$ semestre 2021-2022

TD 3

Moments, caractérisations de lois

Exercice 1 *Des probabilités à l'espérance*

Soit X une variable aléatoire positive. Soit $p > 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty p x^{p-1} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

Quel est le lien entre $X \in L^p$ et $\mathbb{P}(|X| > x) = o(x^r)$?

Exercice 2 *Inégalité de Paley-Zygmund.*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de carré intégrable. Pour tout $0 \leq c \leq 1$, montrer que

$$\mathbb{P}(X > c\mathbb{E}[X]) \geq (1-c)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Exercice 3 *Médianes, projection L^1, et variance.*

Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est une médiane de X si l'on a $\mathbb{P}(X < m) \leq 1/2 \leq \mathbb{P}(X \leq m)$.

1. Montrer que l'ensemble des médianes de X forme un intervalle compact non vide.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a
$$\mathbb{E}[|X-a|] = \int \left(\mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{1}_{x \leq a} + \mathbb{P}(X > x)\mathbb{1}_{x > a}\right) dx.$$
3. On suppose maintenant X intégrable. Déduire de la question précédente que les médianes de X sont exactement les minimiseurs de $a \mapsto \mathbb{E}[|X-a|]$.
4. Montrer que pour toute médiane m de X, on a
$$|\mathbb{E}[X] - m| \leq \sqrt{\mathrm{Var} X}.$$

Exercice 4 *Fonction quantile.*

Soit X une variable aléatoire réelle, de fonction de répartition F. On définit G, appelé le pseudo-inverse de F, comme suit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq t\}.$$

1. Démontrer que :
   (a) Si F est continue, alors pour tout $t \in]0,1[, F(G(t)) = t$.
   (b) Si F est strictement croissante, alors pour tout $x \in \mathbb{R}, G(F(x)) = x$.
   (c) Si F est continue et strictement croissante, alors F est inversible et $G = F^{-1}$.
   (d) Donner une condition (non nécessaire) pour que ces deux propriétés soient vérifiées.
2. Prouver que si F est continue et strictement croissante, alors la variable aléatoire $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
3. Si Y suit la loi uniforme sur $[0,1]$, quelle est la fonction de répartition de $G(Y)$? *Indication : on pourra vérifier que* $\{G(U) \leq t\} = \cup_{n\geq 1}\{U < F(t+1/n)\}$.

Exercice 5 *Les moments ne caractérisent pas la loi*

On fixe un entier naturel $q \geq 2$, et l'on note $M_q = \{q^j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

1. Soit X la variable aléatoire à valeurs dans M_q dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X = q^j) = e^{-q}q^j/j!$. Calculer les moments de X.
2. Montrer que la fonction $h : z \mapsto \prod_{k=1}^{\infty}(1 - zq^{-k})$ est analytique sur $\mathbb{C}$.
3. Soit $z \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ son développement de Taylor au voisinage de 0. Définissons pour tout $j \geq 0, a_j = j!c_j$. Montrer que pour tout $k \geq 0$,
$$\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-q}q^{kj}a_j\frac{q^j}{j!} = 0.$$
4. En utilisant l'équation fonctionnelle $h(qz) = (1-z)h(z)$, montrer que $c_0 = 1$ et pour tout $j \geq 1$,
$$c_j = (-1)^j[(q-1)(q^2-1)\ldots(q^j-1)]^{-1}.$$
5. Pour tout $\varepsilon \in [-1, 1]$, soit X_ε une variable aléatoire à valeurs dans M_q dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X_\varepsilon = q^j) = (1 + \varepsilon a_j)e^{-q}q^j/j!$. Pourquoi est-ce que cela est bien défini ? Calculer les moments de X_ε.