ENS de Lyon $\hfill$ 2^{nd} semestre 2021-2022
L3 - Intégration et Probabilités

TD 2

Variables aléatoires, lois, espérance.

Exercice 1 *Votre premier couplage*

Soit $p \in [0,1]$. Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p (c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(Y=0) = 1-p$ et $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(Y=1) = p$) définies sur le même espace probabilisé. Que peut être la loi de la variable aléatoire $Z := \max(X,Y)$?

Exercice 2 *Lois de variables aléatoires*

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ p.s. Montrer que X et Y ont même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
2. On suppose que X et Y ont même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement même loi.

Exercice 3 *Méthode du premier moment*

1. Soit $G = (V, E(G))$ un graphe fini ayant au moins r sommets. On dit qu'un sous-graphe $H = (V, E(H))$ de G est r-parti s'il existe une partition $V = \cup_{i=1}^r A_i$ (A_i disjoints) telle que si $x, y \in A_i$, $xy \notin E(H)$. Montrer qu'il existe un sous-graphe H qui soit r-parti, avec $\#E(H) \geq \frac{r-1}{r} \#E(G)$.
2. *(Plus longue sous-suite croissante)* Pour $n \geq 1$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose
$$L(\sigma) = \sup_{I \subset [n], \sigma|_I \text{ croissante}} \#I$$
Soit σ_n un élément uniforme de $\mathfrak{S}_n$. Montrer qu'il existe c tel que $\mathbb{P}(L(\sigma_n) > c\sqrt{n}) \to 0$, et que $\limsup \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}[L(\sigma_n)] \leq c$.

Exercice 4 *Des probabilités à l'espérance*

Soit X une variable aléatoire positive. Soit $p > 0$. Montrer que
$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty p x^{p-1} \mathbb{P}[X > x] dx.$$
Quel est le lien entre $X \in L^p$ et $\mathbb{P}(|X| > x) = o(x^r)$?

Exercice 5 *Le problème des chapeaux*

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $A_1, \dots, A_n$ des événements. Montrer la formule de Poincaré (ou "d'inclusion-exclusion") :
$$\mathbb{P}\big(\bigcup_{i=1}^n A_i\big) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}).$$
2. On considère un groupe de n personnes, chacun possédant un chapeau. On met tous les chapeaux dans un vestiaire sombre, si bien que les personnes en partant viennent l'une après l'autre prendre au hasard un chapeau (la i-ième personne prend l'un des $n-i+1$ chapeaux présents avec la même probabilité).

(a) Modéliser ce problème en termes probabilistes. Quelle est dans ce cadre la probabilité pour qu'une personne au moins retrouve son chapeau ? Calculer la limite de cette probabilité quand $n \to \infty$.

(b) En reformulant ce problème en terme de groupe symétrique $Sym(n)$, calculer la probabilité qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $Sym(n)$ uniforme (i.e. pour tout $\sigma \in Sym(n), \mathbb{P}(X = \sigma) = 1/n!$) ne possède pas de point fixe.

Exercice 6 *Paradoxe de Bertrand*

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1. On se propose, par trois méthodes différentes de calculer la probabilité qu'une corde de $\mathcal{C}$ choisie « au hasard » soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit, c'est-à-dire $\sqrt{3}$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des cordes de $\mathcal{C}$

1. *Extrémités aléatoires :* Construire une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathcal{E}$ qui correspond à tirer aléatoirement de façon uniforme et de façon indépendante chaque extrémité de la corde X. Caculer $\mathbb{P}(long(X) \geq \sqrt{3})$.
2. *Milieu aléatoire :* Construire une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathcal{E}$ qui correspond à tirer le milieu de la corde X de façon uniforme. Calculer $\mathbb{P}(long(Y) \geq \sqrt{3})$.
3. *Rayon aléatoire :* Construire une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathcal{E}$ qui correspond à tirer un rayon de $\mathcal{C}$ aléatoirement de façon uniforme, puis de choisir un point aéatoirement de façon uniforme sur ce rayon, qui sera le milieu de la corde Z. Calculer $\mathbb{P}(long(Z) \geq \sqrt{3})$.