ENS de Lyon — 2nd semestre 2021-2022

L3 - Intégration et Probabilités

TD 12

Marches aléatoires et révisions

Exercice 1 *Hitting time theorem*

Soit $\mathbb{P}_k$ la loi d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ qui débute au point $k \geq 0$. Soit $(Y_i)_{i\geq 0}$ des variables i.i.d. à valeurs entières, qui correspondent aux pas de la marche aléatoire, et soit S_n la position de la marche aléatoire après n pas, qui débute en k. Autrement dit, on a $S_n = k + Y_1 + \cdots + Y_n$, $\mathbb{P}_k$ p.s. Soit $H_0 = \inf\{n, S_n = 0\}$. On suppose par ailleurs que pour tout $i \geq 1, \mathbb{P}(Y_i \geq -1) = 1$. On souhaite démontrer par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}_n : \text{« pour tout } k \geq 0, \mathbb{P}_k(H_0 = n) = \frac{k}{n}\mathbb{P}_k(S_n = 0) \text{ ».}$$

1. Montrer $\mathcal{P}_1$.
2. Dans toute la suite, on suppose qu'il existe $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}_k(H_0 = n \mid Y_1 = s) = \frac{k+s}{n-1}\mathbb{P}_{k+s}(S_{n-1} = 0)$.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}_k(H_0 = n) = \sum_{s=-1}^{+\infty} \frac{k+s}{n-1}\mathbb{P}_{k+s}(S_{n-1} = 0)\mathbb{P}(Y_1 = s)$.
   (c) Montrer que $\mathbb{E}_k[Y_1 \mid S_n = 0] = -k/n$.
   (d) Conclure que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice 2

Soit X un ensemble fini. Soit G le graphe dont les sommets sont $\mathbb{Z}^2 \times X$, et les arêtes sont de la forme

- $(v, x) \leftrightarrow (v \pm (1, 0), x)$ pour tout $(v, x) \in \mathbb{Z}^2 \times X$,
- $(v, x) \leftrightarrow (v \pm (0, 1), x)$ pour tout $(v, x) \in \mathbb{Z}^2 \times X$,
- $(v, x) \leftrightarrow (v, y)$ pour tout $v \in \mathbb{Z}^2$ et $x, y \in X, x \neq y$.

Montrer que la marche aléatoire simple $(S_n)_{n\geq 0}$ sur G est récurrente.

Exercice 3 *Conséquence de l'inégalité d'Esseen*

On rappelle l'inégalité d'Esseen, démontrée dans le DM n°2 : il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute variable aléatoire réelle X et pour tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ de longueur 1,

$$\mathbb{P}(X \in I) \leq C \int_{|t|\leq 1} |\mathbb{E}[e^{itX}]| dt.$$

Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_0 = -1) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1/2$. Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $k \geq 0$ on ait $|a_k| \leq \delta$. Pour tout $n \geq 0$ on pose $S_n = \sum_{k\geq n} a_k X_k$.

1. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}(S_n = x) \leq C \prod_{k=1}^{n} \left(\int_{-1}^{1} |\cos(a_k t)|^n\right)^{1/n}.$$
2. En utilisant l'estimée de l'intégrale de Wallis $\int_0^{\pi/2} \cos(u)^n du = \sqrt{\pi/2n} + o(1/\sqrt{n})$, en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$),
$$\mathbb{P}(S_n \in [x - 1/2, x + 1/2]) = O(1/\sqrt{n}),$$
où le O est indépendant de x.

Exercice 4 *Quiz de révisions*

1. Soit $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $2 \leq k \leq n$, X_k est indépendant de $(X_1, ..., X_{k-1})$. Est-ce que la famille $(X_1, ..., X_n)$ est indépendante ?
2. Soit X une variable aléatoire réelle. Soient Y et Z deux variables aléatoires réelles indépendantes de X. Peut-on affirmer que X est indépendant de $Y + Z$?
   (a) Oui, tout le temps.
   (b) Oui, si l'on a de plus l'hypothèse Y indépendant de Z.
   (c) Non.
3. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles dans L^1. Peut-on affirmer que XY est dans L^1 ?
   (a) Oui, tout le temps.
   (b) Oui, si l'on a de plus l'hypothèse X indépendant de Y.
   (c) Non.
4. * Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes convergeant presque sûrement vers X. Est-ce que X est constante presque sûrement ? Même question en remplaçant la convergence presque sûre par la convergence en probabilité, puis la convergence en loi.
5. Soit X une variable aléatoire non presque-sûrement nulle, et $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite. Est-ce que la suite de variables aléatoires $(u_n X)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 ?
6. Si X et Y sont des variables aléatoires réelles à densité, est-ce que $X + Y$ est une variable aléatoire à densité ? Et si X et Y sont indépendantes ?
7. Si X et Y sont des variables aléatoires réelles à densité, est-ce que $\max(X, Y)$ est une variable aléatoire à densité ? Et si X et Y sont indépendantes ?
8. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un groupe fini G. On suppose que X est uniforme. Quel est la loi de XY ? À quelle condition sur Y est-ce que XY et Y sont indépendantes ?
9. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi, de variance finie, dont la somme a même loi qu'une transformation affine de X. Quelle est la loi de X ? *Indication : que dire d'une somme de 2^n copies de X i.i.d. ?*
10. * Si X est une variable aléatoire à densité et si g est une fonction continue strictement croissante, est-ce que $g(X)$ est une variable aléatoire à densité ?