ENS de Lyon 2^{nd} semestre 2021-2022
L3 - Intégration et Probabilités

TD 10

Transformée de Fourier, Vecteurs gaussiens

Exercice 1 *Inégalité de Le Cam.* On rappelle les définitions équivalentes de la distance en variation totale de deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ ainsi :

$$\|\mu-\nu\|_{TV} = 2 \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} |\mu(A)-\nu(A)| = 2\inf\{\mathbb{P}(X \neq Y) \mid (X,Y) \text{ v.a. dans } \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d, X \sim \mu, Y \sim \nu\}.$$

1. Montrer que pour des variables aléatoires dans $\mathbb{Z}$, la convergence en loi est équivalente à la convergence en variation totale.
2. Soit $p \in [0,1]$. Montrer qu'il existe un couple de variables aléatoires (X,Y) tel que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et Y suit une loi de Poisson de paramètre p et $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq p^2$.
3. Soit $(p_1, ..., p_n)$ une suite de réels de $[0,1]$. Soit S_n la somme de n variables aléatoires indépendantes de lois de Bernoulli de paramètres $p_1, ..., p_n$. On note μ_n la loi de S_n. On note μ la loi de Poisson de paramètre λ où $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$. Montrer que
$$\|\mu_n - \mu\|_{TV} \leq 2\sum_{i=1}^n p_i^2$$
4. En déduire une majoration de la vitesse de convergence (pour la distance de variation totale) de $\text{Bin}(n, \lambda/n)$ vers $\mathcal{P}(\lambda)$.

Dans ce TD, si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une fonction intégrable, sa transformée de Fourier est définie par la formule
$$\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

Exercice 2 *Transformée de Fourier de la gaussienne*

Soit $\sigma > 0$, $f_\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, définie par $f_\sigma(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^d \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right)$.

1. Justifier que $\forall\xi \in \mathbb{R}^d, \quad \hat{f}_\sigma(\xi) = \hat{f}_1(\sigma\xi)$.
2. Montrer que pour $d = 1$, $\hat{f}_1$ est solution de l'équation différentielle $f'(\xi) = -\xi f(\xi)$.
3. En déduire que
$$\forall\xi \in \mathbb{R}^d, \hat{f}_\sigma(\xi) = \exp\left(-\frac{\sigma^2|\xi|^2}{2}\right)$$

Exercice 3 *Espace de Schwartz*

L'espace de Schwartz en dimension d est défini par

$$\mathcal{S} := \left\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d),\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall\alpha \text{ multi-indice}, |x|^k D_\alpha f(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\},$$

où $D_\alpha f$ désigne la dérivée partielle de f par rapport au multi-indice α. Montrer que l'espace de Schwartz est stable par la transformée de Fourier, au sens où

$$\hat{\mathcal{S}} := \{\hat{f}, f \in \mathcal{S}\} \subset \mathcal{S}.$$

Puis, montrer que $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.

Exercice 4 *Formule sommatoire de Poisson (d'avril)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$ converge absolument, et qu'il existe C tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$ est absolument convergente, et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n).$$

   On pourra justifier l'existence de $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ et utiliser la théorie des séries de Fourier.

2. Application : Pour $x > 0$, montrer l'égalité suivante,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{x^2+n^2} = \frac{\pi}{x} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi|n|x} = \frac{\pi}{x}\frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}},$$

   et en déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$.

Exercice 5 *Théorème de Cochran et statistique des échantillons gaussiens*

Soit $X \sim \mathcal{N}_d(0, \sigma^2 I_d)$ vecteur gaussien. Soit $\mathbb{R}^d = E_1 \bigoplus E_2$ une décomposition orthogonale de R^d avec $n_i = \dim(E_i)$. Soit $X_i = p_i(X)$ où p_i est la projection orthogonale sur E_i.

1. Justifier qu'il existe U matrice orthogonale telle que $p_i = U I^i_{n_i} U^*$ avec

$$I^1_{n_1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad I^2_{n_2} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

2. Quelle est la loi de U^*X ?
3. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes et déterminer la loi de $\|X_i\|^2$.
4. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de variables aléatoires iid de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On note

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

   Montrer que $\bar{X}$ et S^2 sont indépendantes et de lois respectives $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ et $\sigma^2\frac{\chi^2(n-1)}{n-1}$. *En statistiques, $\bar{X}$ est une "estimation empirique" de la moyenne et S^2 une "estimation empirique" de la variance.*

5. On note $T(n)$ la loi de $\frac{N}{\sqrt{Z/n}}$ où N et Z sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(0,1)$ et $\chi^2(n)$. Construire une suite de variables aléatoires T_n à partir de $\bar{X}, \mu, S$ de loi $T(n-1)$. *En statistiques, la connaissance des lois de $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2$ et de T_n permet de construire des intervalles de confiance pour les "estimations empiriques"*