ENS de Lyon — 2^{nd} semestre 2021-2022

L3 - Intégration et Probabilités

TD 1

Espaces de probabilité

Espaces de probabilité

Définition. *Un espace de probabilité est un triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, où* X *est un ensemble,* $\mathcal{F}$ *est une tribu sur* X *et* $\mathbb{P}$ *est une mesure sur* $\mathcal{F}$ *telle que* $\mathbb{P}(X) = 1$*. Une telle mesure est appelée une mesure de probabilité.*

Exercice 1 *Une infinité de lancer de pièces*

On note $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. Pour tout $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$, on note

$$A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega \mid \omega_1 = \varepsilon_1, \dots, \omega_n = \varepsilon_n\}.$$

Soit $\mathcal{F}$ la plus petite tribu qui rend mesurable les ensembles $A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}$ pour tout choix de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. On cherche à construire une mesure de probabilité $\mathbb{P}$, telle que

$$\mathbb{P}(A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}) = 2^{-n}, \text{ pour tout } \varepsilon_1, \dots \varepsilon_n \in \{0,1\}.$$

Une telle mesure $\mathbb{P}$ modélise une infinité de lancer de pièces indépendantes.

1. Pourquoi est-ce qu'une telle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est unique ?
2. Pour tout $i \geq 1$, on note $\omega_i : [0,1[\to \{0,1\}$ la fonction définie par $\omega_i(x) = \lfloor 2^i x \rfloor - 2\lfloor 2^{i-1} x \rfloor$. Démontrer que la fonction $\varphi : x \mapsto (\omega_1(x), \omega_2(x), \dots)$ de $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[)$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ est mesurable.
3. Soit Leb la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$. Démontrer que la mesure image $\varphi_*\text{Leb}$ est une mesure de probabilité sur Ω qui modélise une infinité de lancer de pièces indépendantes.

Exercice 2 *Une infinité de lancer de pièces biaisées*

On reprend les notations de l'exercice précédent. Soit $p \in]0,1[$. Construire une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui modélise une infinité de lancer de pièces biaisées indépendantes, c'est-à-dire telle que pour tout $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$,

$$\mathbb{P}(A_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}) = p^{\#\{i \mid \varepsilon_i = 1\}} (1-p)^{\#\{i \mid \varepsilon_i = 0\}}.$$

Exercice 3 *Lemme de Borel-Cantelli*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty.$$

On note $\limsup_n A_n$ l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n\}$.

1. Soit $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$. Montrer que $\mathbb{P}(B_n) \to 0$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

Exercice 4 *Construction d'espaces de probabilité*

1. Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ telles que A ou A^c est dénombrable. On pose pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = 0$ si A est dénombrable et $\mathbb{P}(A) = 1$ si A^c est dénombrable. Montrer que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.

2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. On pose, pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = 1$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]1/2, 1/2 + \varepsilon]$ est inclus dans A, et $\mathbb{P}(A) = 0$ sinon. Est-ce que $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité ?

Exercice 5 *Un lemme de Zorn mesurable*

Soit $(X, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}$. On suppose que pour toute suite $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ qui vérifie $\mathbb{P}(A_n \setminus A_{n+1}) = 0$ pour tout $n \geq 0$, il existe un ensemble $B \in \mathcal{C}$, tel que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n \setminus B\right) = 0.$$

Démontrer qu'il existe $M \in \mathcal{C}$ un élément maximal, au sens où si $M' \in \mathcal{C}$ vérifie $\mathbb{P}(M \setminus M') = 0$, alors $\mathbb{P}(M' \setminus M) = 0$.

Exercice 6 *Espace de probabilité non-atomique*

Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit non-atomique si pour tout $A \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(A) > 0$, il existe $B \in \mathcal{F}, B \subset A$ tel que $0 < \mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A)$.

1. Montrer que $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ est non-atomique.

On fixe désormais $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité non-atomique.

2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $B \subset A$ et $0 < \mathbb{P}(B) < \varepsilon$.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}$ et pour tout $x \in [0, \mathbb{P}(A)]$, il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $B \subset A$ et $\mathbb{P}(B) = x$.
4. En déduire que pour toute suite $(p_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs telle que $\sum_{n\geq 1} p_n = 1$, il existe $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que

$$\Omega = \bigsqcup_{n\geq 1} B_n \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ \mathbb{P}(B_n) = p_n.$$

Exercice 7 *Ensemble à densité asymptotique*

Un ensemble $A \subset \mathbb{N}^*$ admet une densité asymptotique si la suite $(|A \cap \{1, \ldots, n\}|/n)_{n\geq 1}$ est convergente. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$ admettant une densité asymptotique. Est-ce que $\mathcal{A}$ est une tribu ?