ENS de Lyon — 2nd semestre 2021-2022

L3 - Intégrations et Probabilités

DM 2

DM à rendre pour le vendredi 8 avril, lors du cours de probabilité. Il est attendu que les réponses soient justifiées avec le plus grand soin.

Consigne : *Compte tenu de la longueur excessive du DM, vous traiterez* ***au choix*** *:*

— *soit l'exercice 1 et l'exercice 2,*

— *soit l'exercice 2 et l'exercice 3.*

Exercice 1.

(1) Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante qui tend vers 0, on pose $\phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k \sin(kt)$. Montrer que ϕ_n converge localement uniformément sur $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. On note ϕ sa limite et $R_n = \phi - \phi_n$. Montrer que $|R_n(t)| \leq \frac{b_n}{\sin(t/2)}$.

(2) Montrer que ϕ_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $nb_n \to 0$.

(3) Soit $C^{-1} = \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k^2 \log(k)}$, μ la distribution de probabilité sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$\mu(n) = \frac{C}{2n^2 \log(|n|)}$$

Montrer que ϕ sa fonction caractéristique est C^1 mais que $\mathbb{E}\left(|\mu|\right) = \infty$.

Exercice 2.

(1) Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(t)dt \right) d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[e^{itX}] f(t)dt.$$

(2) Construire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à valeurs positives, telle que les conditions suivantes soient satisfaites :

(a) $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$,

(b) la transformée de Fourier de f est à valeurs positives,

(c) il existe une constante $C > 0$ telle que $\hat{f} \geq$ sur $[-1/2, 1/2]$.

(3) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute variable aléatoire réelle X, et pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ de longueur 1,

$$\mathbb{P}(X \in I) \leq C \int_{|t|\leq 1} |\mathbb{E}[e^{itX}]| dt.$$

Exercice 3. Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de variable aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_k = -1) = \mathbb{P}(X_k = 1) = 1/2$. Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $k \geq 0, |a_k| \geq \delta$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k\leq n} a_k X_k$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(S_n \in [x - 1/2, x + 1/2]) = O(1/\sqrt{n}),$$

où le O est indépendant de x.

Indication : on pourra admettre et utiliser l'estimée de l'intégrale de Wallis $\int_0^{\pi/2} \cos(u)^n du = \sqrt{\pi/2n} + o(1/\sqrt{n})$.