ENS de Lyon $2^{\text{eme}}$ semestre 2021-2022

L3 - Probabilités

**DM 1**

*DM à rendre pour le mardi $1^{er}$ mars.*

*Il est attendu que les réponses soient justifiées avec le plus grand soin.*

**Exercice 1.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$M_n = \max_{k\in[\![1,n]\!]} X_k.$$

(1) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty}\left\{\frac{M_n}{\ln(n)} > \frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right\}\right) = 1.$$

(2) Pour tout $k \geq 0$, on pose $n_k = 2^k$. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ sufisament petit,

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{k\to+\infty}\left\{\frac{M_{n_k}}{\ln(n_k)} \leq \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right\}\right) = 1.$$

(3) En déduire que $\dfrac{M_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \dfrac{1}{\lambda}$.