IX. Groupe de Poincaré

Exercices

Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathbf{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{B}^n$ la boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$.

$$\mathbf{S}^{n-1} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\},$$
$$\mathbf{B}^{n} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Exercice IX.1.

1. Soit X et Y deux espaces topologiques. Soient $x \in X$ et $y \in X$. Démontrer que les groupes $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ et $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ sont isomorphes.
2. En déduire le groupe de Poincaré de $\mathbf{S}^1 \times \cdots \times \mathbf{S}^1$.

Exercice IX.2 (De l'importance de fixer les extrémités). Soit $X = \mathbf{C} - \{-1, 1\}$. Soient $\gamma : [0, 1] \to X$ et $\delta : [0, 1] \to X$ les lacets définis respectivement par $\gamma(t) = \exp(2i\pi t) - 1$ et $\delta(t) = \exp(i\pi(2t + 1)) + 1$. Démontrer qu'il existe une homotopie libre par lacets entre $\gamma\delta$ et $\delta\gamma$. *Remarque : on pourrait montrer que $[\gamma\delta]$ et $[\delta\gamma]$ sont distincts dans $\pi_1(X, 0)$.*

Exercice IX.3 (Groupe fondamental d'un groupe topologique).

Soit G un *groupe topologique*, c'est-à-dire un groupe muni d'une topologie qui rend continue les applications $(g, h) \in G^2 \mapsto gh \in G$ et $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$. On note $\mathscr{L}(G, e)$ l'ensemble des lacets basés en l'élément neutre e de G. Pour $\gamma, \delta \in \mathscr{L}(G, e)$, on note $\gamma \times \delta$ le lacet $t \mapsto \gamma(t)\delta(t)$.

1. Démontrer que $\times$ passe au quotient en une application $\times : \pi_1(G, e) \times \pi_1(G, e) \to \pi_1(G, e)$
2. Démontrer que pour tout $\gamma, \delta, \gamma', \delta' \in \mathscr{L}(G, e)$, on a
$$([\gamma] * [\delta]) \times ([\gamma'] * [\delta']) = ([\gamma] \times [\delta]) * ([\gamma'] \times [\delta']),$$
où $*$ désigne la loi de groupe usuelle sur $\pi_1(G, e)$.
3. En déduire que pour tout $\gamma, \delta \in \mathscr{L}(G, e)$, $[\gamma] \times [\delta] = [\gamma] * [\delta] = [\delta] \times [\gamma]$. *Indication : on pourra concaténer les lacets γ et δ avec le lacet constant égal à e.*
4. En déduire que $\pi_1(G, e)$ est abélien.

Exercice IX.4.

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que toute partie convexe de E est simplement connexe.

Exercice IX.5.

On fixe un entier $n \geqslant 2$.

1. Montrer que tout lacet à valeurs dans la sphère $\mathbf{S}^n$ privée d'un point est strictement homotope à un lacet constant.
2. Soit x, y deux points distincts de $\mathbf{S}^n$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x dans $\mathbf{S}^n - \{y\}$ tel que V soit homéomorphe à $\mathbf{B}^n$.
3. Montrer que $\mathbf{S}^n$ est simplement connexe.
   Indication : Partant d'un lacet à valeurs dans $\mathbf{S}^n$, utiliser la question précédente pour construire une homotopie stricte vers un lacet évitant au moins un point.
4. Existe-t-il des lacets surjectifs sur la sphère $\mathbf{S}^n$?

Exercice IX.6.

1. Montrer que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^n$ ne sont pas homéomorphes pour $n \geqslant 2$.
2. Montrer que pour $n \geqslant 2$, $\mathbf{R}^n$ privé d'un point est homéotope à $\mathbf{S}^{n-1}$.
3. Montrer que $\mathbf{R}^n$ privé d'un point est simplement connexe pour $n \geqslant 3$, mais pas pour $n = 2$. En déduire que $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$ ne sont pas homéomorphes pour $n \geqslant 3$.