VIII. Homotopie et Homéotopie

Exercices

Exercice VIII.1. Soit X un espace topologique.

1. Montrer que deux applications continues $f, g : X \to \mathbf{R}^n$ sont toujours homotopes.
2. Soient $f, g : X \to \mathbf{R}^n - \{0\}$ deux applications continues telles que pour tout $x \in X$,
$$\|f(x) - g(x)\| < \|f(x)\|.$$
Montrer que f et g sont homotopes.
3. Soient P, Q deux polynômes complexes de même degré. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $r \geqslant R$, les applications induites $P_{|C(0,r)} : C(0,r) \to \mathbf{C}^*$ et $Q_{|C(0,r)} : C(0,r) \to \mathbf{C}^*$ sont homotopes.

Exercice VIII.2 (Projection stéréographique)**.** Soit $\mathbf{S}^n$ l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $\|x\| = 1$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^{n+1}$. On note N le point $(0, \ldots, 0, 1)$. Soit $p_N : \mathbf{S}^n - \{N\} \to \mathbf{R}^n$ l'application définie par
$$p_N(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n).$$
Démontrer que p_N est un homéomorphisme.

Exercice VIII.3. Soit $\mathbf{S}^n$ l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $\|x\| = 1$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^{n+1}$. Soit X un espace topologique.

1. Soit $f : X \to \mathbf{S}^n$ une application continue non surjective. Montrer que f est homotope à une application constante.
2. Soient $f, g : X \to \mathbf{S}^n$ continues, telles que pour tout $x \in X$,
$$\|f(x) - g(x)\| < 2.$$
Montrer que f et g sont homotopes.
3. Soit $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ continue sans point fixe. Montrer que f est homotope à $-\mathrm{id}_{\mathbf{S}^n}$.
4. Soit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. On considère l'application d'inclusion $\iota : \mathbf{S}^k \to \mathbf{S}^n$ définie pour tout $x \in \mathbf{S}^k$ par $\iota(x) = (x, 0, \ldots, 0)$. Montrer que ι est homotope à une application constante. On dit que $\mathbf{S}^k$ est *contractile dans* $\mathbf{S}^n$.

Exercice VIII.4 (Indice d'un lacet, cas $\mathscr{C}^1$). Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ et $\gamma\colon [0,1] \to \mathbf{C} - \{z_0\}$ un lacet $\mathscr{C}^1$. On note U l'ouvert $\mathbf{C} - \{z_0\}$. On appelle *indice* de γ par rapport à z_0 la quantité

$$\operatorname{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}.$$

1. Montrer que $\operatorname{Ind}(\gamma, z_0) \in \mathbf{Z}$. *On pourra considérer l'application* $t \in [0,1] \mapsto (\gamma(t) - z_0)\mathrm{e}^{-l(t)}$ *où l'on note* $l(t) = \int_{\gamma|_{[0,t]}} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$.
2. Prouver que $z \mapsto \operatorname{Ind}(\gamma, z)$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbf{C} - \operatorname{im}\gamma$, et qu'elle est nulle sur la composante connexe non bornée.
3. Soient γ_0, γ_1 des lacets $\mathscr{C}^1$ de U. On suppose qu'il existe une *homotopie par lacets (libres)* $\mathscr{C}^1$ *dans* U entre γ_0 et γ_1, c'est-à-dire une homotopie H entre les chemins γ_0 et γ_1 telle que pour tout $s \in [0,1]$, $H(s, \cdot\,)$ est un lacet $\mathscr{C}^1$ de U. Montrer que γ_0 et γ_1 ont même indice par rapport à z_0.
4. Réciproquement, montrer que deux lacets $\mathscr{C}^1$ de U de même indice sont *homotopes par lacets* $\mathscr{C}^1$ *dans* U.
   On pourra se ramener à $z_0 = 0$ *puis* relever *les lacets par l'exponentielle, c'est-à-dire construire des chemins* $\widetilde{\gamma}_i\colon [0,1] \to \mathbf{C}$ *tels que* $\gamma_i = \exp\circ\widetilde{\gamma}_i$, $i = 0, 1$.
5. Proposer un ouvert U et deux lacets $\mathscr{C}^1$ de même origine qui sont *homotopes par lacets* $\mathscr{C}^1$ *dans* U, mais qui ne sont pas *strictement homotopes* (au sens du cours).

Exercice VIII.5.
1. Montrer que $\mathbf{S}^n$ et $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ sont homéotopes. Sont-ils homéomorphes ?
2. Démontrer que $\mathbf{S}^n - \mathbf{S}^k$ et $\mathbf{S}^{n-k-1}$ sont homéotopes pour $0 \leqslant k < n$.