VII. Fonctions méromorphes

Exercices

Exercice VII.1. La fonction $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ définie par $f(z) = \exp(1/z)$ si $z \neq 0$ et $f(0) = \infty$ est-elle méromorphe ?

Exercice VII.2. Développer en série de Laurent la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

sur les ouvert $\mathbf{D}$, $\{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ et $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 2\}$.

Exercice VII.3. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ telle que $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$. On suppose qu'il existe $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $f(z) \neq \infty$ pour tous $z \in \mathbf{C} - B(0, R)$.

1. Démontrer que f n'a qu'un nombre fini de pôles dans $\mathbf{C}$.
2. On note $z_1, \dots, z_p$ ces pôles et $m_1, \dots, m_p$ leur multiplicités respectives. On considère le polynôme
$$P = \prod_{i=1}^{p} (T - z_i)_i^m$$
Démontrer que la fonction $g : z \mapsto P(z)f(z)$ se prolonge en une fonction entière.
3. On définit la fonction $h : z \mapsto g\left(\frac{1}{z}\right)$. Démontrer que h induit une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle en 0.
4. En déduire que f est définie par une fraction rationnelle $P/Q \in \mathbf{C}(T)$.

Exercice VII.4 (Projection stéréographique)**.** On considère la sphère unité

$$\mathbf{S}^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

Soit $\varphi : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{S}^2$ l'application définie par

$$z \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{|z|^2+1} \left(|z|^2 - 1, 2\Re(z), 2\Im(z)\right) & \text{si } z = x + iy \text{ avec } x, y \in \mathbf{R}, \\ (1, 0, 0) \text{ si } z = \infty. \end{cases}$$

Démontrer que φ est un homéomorphisme.

Exercice VII.5 (Quelques révisions)**.** Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, et $f \in \mathscr{H}(U)$. Il existe $g \in \mathscr{U}$ tel que $g' = f$.

2. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert convexe, et $f \in \mathscr{H}(U)$. Il existe $g \in \mathscr{U}$ tel que $g' = f$.
3. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert, et $f \in \mathscr{H}(U)$. Pour tout $a \in U$ et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$, on a $\int_{C(a,r)} f(z)dz = 0$.
4. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert convexe, et $f \in \mathscr{H}(U)$. Pour tout $a \in U$ et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$, on a $\int_{C(a,r)} f(z)dz = 0$.
5. Soit $a \in \mathbf{C}$ et $r > 0$. Soit $f : \overline{B}(a,r) \to \mathbf{C}$ une fonction continue, holomorphe sur $B(a,r)$. Alors $f(a) = \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-a} dz$.