VI. Principe du maximum, forme locale et conséquences

Exercice VI.1. Soit $\mathbf{U}$ le cercle unité fermé de $\mathbf{C}$. Soit Ω un ouvert connexe contenant $\mathbf{U}$

1. Soit $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ telle que pour tout $z \in \mathbf{U}$, $f(z) \in \mathbf{R}$. Démontrer que f est constante. *Indication : on pourra considérer les applications* $\exp(if)$ *et* $\exp(-if)$.
2. Soient $f, g \in$ deux fonctions qui ne s'annulent pas. On suppose que pour tout $z \in \mathscr{U}$, $|f(z)| = |g(z)|$. Démontrer qu'il existe un nombre complexe $\lambda \in \mathbf{U}$ tel que $f = \lambda g$ sur Ω. Le résultat reste-t il vrai si l'on ne suppose plus que f et g ne s'annulent pas ?

Exercice VI.2. Soient $\omega_1, \ldots, \omega_n$ des nombres complexes de module 1. Démontrer qu'il existe un nombre complexe ω de module 1 tel que

$$\prod_{k=1}^{n} |\omega - \omega_k| = 1.$$

Exercice VI.3 (Lemme de Schwarz-Pick). 1. Montrer que le groupes des automorphismes bianalytiques du disque unité agit transitivement sur le disque.

2. En utilisant le lemme de Schwarz, démontrer que pour toute fonction holomorphe $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, et pour tout $z, w \in \mathbf{D}$, on a

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(z)} f(w)} \right| \leqslant \left| \frac{z - w}{1 - \overline{z} w} \right|$$

3. En déduire que pour toute fonction holomorphe $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, et pour tout $z \in \mathbf{D}$, on a

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Quels sont les cas d'égalité ?

Remarque : ce résultat implique que toute fonction holomorphe $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$ *est contractante, lorsque l'on munit le disque unité de la métrique hyperbolique à courbure constante égale à* -1.

Exercice VI.4. 1. Soit $f \in \mathscr{H}(\mathbf{D})$, telle que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ pour un certain entier $n \geqslant 1$. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $z \in \mathbf{D}$, $|f(z)| \leqslant C$. Démontrer que l'application $g : z \mapsto f(z) z^{-n}$ définie une fonction holomorphe sur $\mathbf{D}$, et en déduire que pour tout $z \in \mathbf{D}$, on a $|f(z)| \leqslant C|z|^n$.

2. Soit $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ une fonction holomorphe, qui s'étend en une fonction continue sur $\overline{\mathbf{D}}$. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{D}$ et $m_1, \ldots, m_n$ des entiers $\geqslant 1$ tels que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\nu_{a_k}(f) \geqslant m_k$. Démontrer la majoration
$$|f(0)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{m_k}.$$
Indication : on pourra diviser f par un produit d'automorphismes bianalytiques du disque bien choisis.