V. Conséquences de la formule de Cauchy

Exercice V.1 (Liouville polynomial). Soit f une application entière. On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $|f(z)| = o_{|z|\to\infty}(|z|^n)$. Montrer que f est une application polynomiale de degré $< n$.

Exercice V.2 (Vers les théorèmes de Picard).

1. Montrer que l'image d'une application entière non constante est dense dans $\mathbf{C}$.
2. On fixe $z_0 \in \mathbf{C}$, trouver une application entière non constante d'image $\mathbf{C} - \{z_0\}$.

Exercice V.3 (Un lemme de dynamique holomorphe). Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbf{C}$ et $f : \Omega \to \Omega$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = z_0$.

1. Montrer que $|f'(z_0)| \leqslant 1$. (Indication : Appliquer la formule de Cauchy à $(f^{\circ n})'$, où $f^{\circ n} = f \circ f \cdots \circ f$, n fois.)
2. On suppose que $f'(z_0) = 1$. Montrer que $f = \mathrm{id}_\Omega$. (Indication : développer f en série entière).

Exercice V.4 (Polynômes de Legendre). Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit $P_n \in \mathbf{C}[X]$ par la formule

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n} \left[(X^2 - 1)^n\right].$$

À l'aide de la formule de Cauchy, démontrer que pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1}\cos(\theta))^n \mathrm{d}\theta.$$

On précisera le sens à donner à la racine apparaissant dans l'intégrande.
Indication : on pourra appliquer la formule de Cauchy au cercle $C(z, \sqrt{|z^2 - 1|})$.

Exercice V.5 (Intégrale de Fresnel). L'objectif de cet exercice est de prouver les égalités

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

1. On considère la fonction $f : z \mapsto \exp(-z^2)$. Démontrer que f est la dérivée d'une fonction $F \in \mathscr{H}(\mathbf{C})$.

Pour tout $R \in \mathbf{R}_+^*$, on note

$$D_R = \left\{ re^{\mathrm{i}\theta}, r \in [0, R], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \right\},$$

un huitième du disque de rayon R centré en 0, et ∂D_R son bord.

2. Démontrer que l'intégrale
$$\int_{\partial D_R} f(z)\mathrm{d}z$$
est nulle pour tout $R \in \mathbf{R}_+^*$.
3. Démontrer que l'intégrale de f sur l'intersection de ∂D_R avec le cercle de centre 0 et de rayon R tend vers 0 quand R tend vers l'infini.
4. Déterminer l'intégrale de f sur la demi-droite réelle $\mathbf{R}_+$, puis conclure.