IV. Intégration, Formule de Cauchy

Exercices

Exercice IV.1 (Fonction holomorphes sur une couronne). Soient r et R des nombres réels tels que $0 < r < R$ et soit f une fonction holomorphe sur la *couronne* ouverte

$$C = \{ z \in \mathbf{C} \mid r < |z| < R \}.$$

Pour tout $r' \in]r, R[$, on note $\gamma_{r'}$ le cercle de centre 0 et de rayon r', orienté dans le sens trigonométrique. Soit f une fonction holomorphe sur C.

1. Trouver une fonction holomorphe f sur C qui ne vérifie pas la formule de Cauchy, c'est-à-dire qu'il existe $r < r' < R$ et $z \in C$ avec $|z| < r'$ tels que

$$f(z) \neq \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(u)}{u-z} \frac{\mathrm{d}u}{2\pi\mathrm{i}}.$$

2. Démontrer que pour tous $r_1, r_2 \in]r, R[$, on a l'égalité

$$\int_{\gamma_{r_1}} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\gamma_{r_2}} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

3. Soient $r_1, r_2 \in]r, R[$ et $z \in C$ tels que $r_1 < |z| < r_2$. Démontrer que

$$f(z) = \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(u)}{u-z} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} - \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(u)}{u-z} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}.$$

   On pourra éventuellement considérer la fonction g_z définie sur C par

$$u \mapsto \begin{cases} \frac{f(u)-f(z)}{u-z} \text{ si } u \neq z, \\ f'(z) \text{ si } u = z. \end{cases}$$

4. En déduire que l'on peut décomposer f de manière unique sous la forme

$$f(z) = f_1(z) + f_2\left(\frac{1}{z}\right)$$

   où f_1 est une fonction holomorphe sur le disque ouvert $B(0, R)$ et f_2 une fonction holomorphe sur le disque ouvert $B(0, \frac{1}{r})$ avec $f_2(0) = 0$.

5. En déduire que si f est un fonction holomorphe sur le disque épointé $B(0, R) - \{0\}$ et bornée sur un voisinage épointé de 0, alors l'application f se prolonge par continuité en une fonction holomorphe sur $B(0, R)$. On dit que *la singularité en* 0 *est effaçable*.

Exercice IV.2 (Intégrale de Fresnel). L'objectif de cet exercice est de prouver les égalités

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\cdot$$

1. On considère la fonction $f : z \mapsto \exp(-z^2)$. Démontrer que f est la dérivée d'une fonction $F \in \mathscr{H}(\mathbf{C})$.

Pour tout $R \in \mathbf{R}_+^*$, on note

$$D_R = \left\{ re^{\mathrm{i}\theta}, r \in [0, R], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \right\},$$

un huitième du disque de rayon R centré en 0, et ∂D_R son bord.

2. Démontrer que l'intégrale
$$\int_{\partial D_R} f(z)\,\mathrm{d}z$$
est nulle pour tout $R \in \mathbf{R}_+^*$.
3. Démontrer que l'intégrale de f sur l'intersection de ∂D_R avec le cercle de centre 0 et de rayon R tend vers 0 quand R tend vers l'infini.
4. Déterminer l'intégrale de f sur la demi-droite réelle $\mathbf{R}_+$, puis conclure.

Exercice IV.3 (Indice d'un lacet). Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ et $\gamma\colon [0,1] \to \mathbf{C} - \{z_0\}$ un lacet C^1 par morceaux, c'est-à-dire un chemin C^1 par morceaux tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$. On appelle *indice* de γ par rapport à z_0 la quantité

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}.$$

1. Montrer que $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) \in \mathbf{Z}$. *On pourra considérer l'application* $t \in [0,1] \mapsto (\gamma(t) - z_0)\mathrm{e}^{-l(t)}$ *où l'on note* $l(t) = \int_{\gamma|_{[0,t]}} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$.
2. Prouver que $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbf{C} - \mathrm{im}\,\gamma$, et qu'elle est nulle sur la composante connexe non bornée.
3. On dit que deux lacets γ_0 et γ_1 de classe C^1 par morceaux sont *homotopes* dans un ouvert U de $\mathbf{C}$ s'il existe une application continue $H\colon [0,1] \times [0,1] \to U$ telle que $H(0,\cdot) = \gamma_0$, $H(1,\cdot) = \gamma_1$ et pour tout $s \in [0,1]$, $H(s,\cdot)$ est un lacet C^1 par morceaux. Montrer que deux lacets C^1 par morceaux sont homotopes dans $\mathbf{C} - \{z_0\}$ si et seulement si ils ont le même indice par rapport à z_0.
Pour le sens réciproque, on pourra se ramener à $z_0 = 0$ *puis* relever *les lacets par l'exponentielle, c'est-à-dire construire des chemins* $\widetilde{\gamma}_i\colon [0,1] \to \mathbf{C}$ *tels que* $\gamma_i = \exp \circ \widetilde{\gamma}_i$, $i = 0, 1$.