XII. Théorèmes de Montel, d'uniformisation de Riemann

Exercices

Exercice XII.1. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbf{C}$ uniformément bornée sur tout compact de Ω. On suppose que l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ pour lesquels la suite $(f_n(z))_{n\geqslant 0}$ converge admet un point d'accumulation. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout compact de Ω.

Exercice XII.2. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbf{C}$. On suppose que pour tout $n \geqslant 1, z \in \Omega, |f_n(z)| \leqslant 1$. Soit $(F_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définie par

$$\forall n \geqslant 0, z \in \Omega, \quad F_n(z) = \prod_{k=1}^{n} f_k(z).$$

On suppose qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que la suite $(F_n(z_0))_{n\geqslant 1}$ admet une limite non nulle. Montrer que $(F_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction holomorphe non identiquement nulle.

Exercice XII.3. Pour chacune des parties suivantes de $\mathbf{C}$, fournir un biholomorphisme vers le disque unité ouvert $\mathbf{D}$ ou le demi-plan de Poincaré $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im(z) > 0\}$, au choix.

1. le quadrant $\{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) > 0, \Im(z) > 0\}$
2. le secteur angulaire d'angle $\theta \in]0, \pi[$ défini comme $\{z \in \mathbf{C} - \{0\} \mid \operatorname{Arg}(z) \in]0, \theta[\}$
3. la bande $\{z \in \mathbf{C} \mid \Im(z) \in]a, b[\}$ pour $a < b$ des réels

Exercice XII.4 (Biholomorphismes du demi-plan de Poincaré).

Soit $\mathbf{D}$ le disque unité ouvert, et $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré.

1. Démontrer que l'application $z \mapsto (z - i)/(z + i)$ est un biholomorphisme de $\mathbf{H}$ vers $\mathbf{D}$.
2. En déduire que le groupe des biholomorphismes de $\mathbf{H}$ s'identifie naturellement à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\{\pm I_2\}$.

Exercice XII.5.

Soit f un biholomorphisme du disque unité ouvert vers un d-gone régulier centré en 0, tel que $f(0) = 0$. On note $(a_n)_{n\geqslant 0}$ les coefficients du développement en série entière en 0 de f. Montrer que pour tout $z \in \mathbf{D}$, $f(e^{2i\pi/d}z) = e^{2i\pi/d}f(z)$. En déduire que si $n-1$ n'est pas divisible par d, alors le coefficient a_n est nul.

Exercice XII.6.

1. Soit E un espace préhilbertien réel de dimension infinie. Montrer que ses boules fermées ne sont jamais compactes. *Cela reste vrai pour tout espace vectoriel normé de dimension infinie (Théorème de Riesz).*
2. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. L'ensemble des fonctions holomorphes sur U et bornées par 1 sur U est-il compact pour la norme uniforme sur U ?
3. Soit K un compact de $\mathbf{C}$. L'ensemble des fonctions holomorphes sur un voisinage de K et bornées par 1 sur K est-il compact pour la norme uniforme sur K ?
4. Soit K un compact de $\mathbf{C}$. L'ensemble des fonctions holomorphes sur un voisinage de K et bornées par 1 sur ce voisinage est-il compact pour la norme uniforme sur K ?
5. Expliquer en quoi le théorème de Montel ne contredit pas le *Théorème de Riesz* mentionné en question 1.

Exercice XII.7 (Petit théorème de Picard).

On souhaite démontrer le petit théorème de Picard, qui affirme que *toute fonction entière non constante omet au plus une valeur*. On admet le résultat suivant.

Théorème (Bloch). Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $r > 0$, $a \in \mathbf{C}$ et $f : B(a, r) \to \mathbf{C}$ holomorphe, l'ensemble $f(B(a, r))$ contient un disque ouvert de rayon $Cr|f'(a)|$, qui est l'image biholomorphe d'un ouvert U de $B(a, r)$.

1. Dans cette question, on fixe un ouvert $U \subset \mathbf{C}$ simplement connexe, et une fonction $f : U \to \mathbf{C}$ telle que $f(U) \subset \mathbf{C} - \{-1, 1\}$. On veut montrer qu'il existe une fonction holomorphe $g : U \to \mathbf{C}$ vérifiant $f = \cos(g)$.
   (a) Montrer qu'il existe une détermination holomorphe de $\sqrt{f^2 - 1}$ sur U.
   (b) Montrer qu'il existe $\tilde{g} : U \to \mathbf{C}$ holomorphe vérifiant $\exp(\tilde{g}) = f + \sqrt{f^2 - 1}$.
   (c) Conclure.
2. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe qui évite au moins deux valeurs. On cherche à montrer que f est constante.
   (a) Montrer que l'on peut supposer $f(\mathbf{C}) \cap \{-1, 1\} = \varnothing$.
   (b) Montrer qu'il existe une fonction entière h telle que $f = \cos(\pi \cos(\pi h))$ et pour tout $z \in \mathbf{C}$, $\cos(\pi h(z)) \notin \mathbf{Z}$.
   (c) Déterminer les solutions de l'équation $\cos(\pi z) = n$, où $n \in \mathbf{N}^*$.
   (d) En déduire l'existence d'un réel $R > 0$ tel que pour tout disque de rayon R, il existe un entier $n > 0$ pour lequel l'équation $\cos(\pi z) = n$ admet une solution dans ce disque.
   (e) Conclure que f est constante.