XI. Formule des résidus (bis)

Exercices

Exercice XI.1. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x, \text{ pour } a>0.$$

Exercice XI.2. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x, \text{ pour } 0<a<1.$$

Indication : on pourra intégrer la fonction : $z \mapsto e^{az}/(1+e^z)$ sur le bord du domaine rectangulaire de sommets $-R, R, R+2i\pi$ et $-R+2i\pi$.

Exercice XI.3. Soit $P, Q \in \mathbf{C}[X] - \{0\}$ tels que $\deg(P) \leqslant \deg(Q) - 2$ et P et Q premier entre eux. On suppose que Q n'a pas de zéro réel, et l'on note $a_1, \ldots, a_r$ ses zéros de partie imaginaire strictement positive. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2i\pi \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_{a_k}(P/Q).$$

Exercice XI.4. Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments non nuls du disque unité ouvert $\mathbf{D}$, telle que $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-|\alpha_n|) < +\infty$.

1. Montrer que
$$z \mapsto \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n} z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$$
définit une fonction holomorphe bornée $\mathbf{D} \mapsto \mathbf{D}$, qui s'annule exactement sur les α_n.
2. En déduire l'existence d'une fonction holomorphe bornée sur $\mathbf{D}$, qui n'admet d'extension holomorphe à aucun ouvert rencontrant le bord de $\mathbf{D}$.