# X. Théorème des résidus

## Exercices

**Exercice X.1.** Calculer les intégrales suivantes :

1.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x.$$
*Indication : intégrer* $z \mapsto e^{iz}/z$ *sur le bord du domaine* $\{r \leqslant |z| \leqslant R, \Im(z) \geqslant 0\}$.

2.
$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) \mathrm{d}x \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(x^2) \mathrm{d}x.$$
*Indication : intégrer* $z \mapsto e^{-z^2}$ *sur le bord de* $\{re^{i\theta} \mid r \in [0, R], \theta \in [0, \pi/4]\}$.

3.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^n}, \text{ pour } n \geqslant 2.$$
*Indication : intégrer* $z \mapsto 1/(1+z^n)$ *sur le bord de* $\{re^{i\theta} \mid r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi/n]\}$.

4.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x, \text{ pour } a > 0.$$

**Exercice X.2.** Soit $P, Q \in \mathbf{C}[X] - \{0\}$ tels que $\deg(P) \leqslant \deg(Q) - 2$ et $P$ et $Q$ premier entre eux. On suppose que $Q$ n'a pas de zéro réel, et l'on note $a_1, \ldots, a_r$ ses zéros de partie imaginaire strictement positive. Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x = 2i\pi \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_{a_k}(P/Q).$$