I. Quelques révisions

Exercices

Exercice I.1 (Convergences de séries de fonctions).

1. Construire une série $\sum f_n$ de fonctions continues positives sur $[-1,1]$ qui converge...
   (a) ...*simplement* mais pas *uniformément*
   (b) ...*uniformément* mais pas *normalement*
2. Construire une série $\sum f_n$ de fonctions continues positives sur $]-1,1[$ qui converge...
   (a) ...*simplement* mais pas *uniformément sur les compacts*
   (b) ...*uniformément sur les compacts* mais pas *uniformément*
   (c) ...*uniformément* mais pas *normalement sur les compacts*
3. ($\star$) Construire une série $\sum f_n$ de fonctions continues positives sur $]-1,1[$ qui converge...
   (a) ...*simplement* mais *uniformément sur aucun intervalle* $[a,b]$ *avec* $a<b$
   (b) ...*uniformément* mais *normalement sur aucun intervalle* $[a,b]$ *avec* $a<b$

Exercice I.2 (Convergence de séries de fonctions, bis). Étudier le mode de convergence des séries entières suivantes sur le disque unité ouvert et sur $[0,1[$

1. $\sum F(n)z^n$ selon le degré de la fonction rationnelle F.
2. $\sum (-1)^n n^{-\beta} z^n$ selon la valeur de $\beta>0$.
3. $\sum e^{2i\pi n\theta} n^{-\beta} z^n$ selon la valeur de $\beta>0$, et du réel θ.

Exercice I.3 (Rappels sur l'exponentielle complexe). Pour tout $z\in\mathbf{C}$, on définit

$$\exp(z)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}.$$

Déterminer la type de convergence de la série ci-dessus, puis démontrer les relations suivantes

1. $\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)$ pour tous $a,b\in\mathbf{C}$;
2. $\overline{\exp(z)}=\exp(\overline{z})$ pour $z\in\mathbf{C}$;
3. $|\exp(z)|=\exp(\Re(z))$ pour $z\in\mathbf{C}$.

Exercice I.4 (Parties localement finies). Une partie non-vide X d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie E est dite discrète si ses singletons sont des ouverts de X, c'est-à-dire si pour tout $x \in X$ existe un ouvert V de E tel que $V \cap X = \{x\}$.

Soit U un ouvert de E. Une partie X de U est dite localement finie si pour tout $a \in U$, il existe un ouvert V de U contenant a tel que $V \cap X$ est fini.

1. Montrer l'équivalence des assertions suivantes
   (a) *X est localement finie dans U.*
   (b) *X est fermée dans U et discrète.*
   (c) *X n'a pas de points d'accumulation dans U.*
   (d) *Pour tout compact K de U, $K \cap X$ est fini.*
2. Donner un exemple d'ouvert U, et d'une partie discrète $X \subset U$ qui n'est pas localement finie
3. Donner un exemple d'ouvert U, et d'une partie localement finie X de U telle que X n'est pas fermée dans E.
4. ($\star$) Soit U un ouvert non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie E. Construire une partie X localement finie de U dont l'ensemble des points d'accumulation est précisément ∂U

Exercice I.5 (Un théorème de Whitney). On souhaite démontrer que tout fermé de $\mathbf{R}^2$ est le lieu d'annulation d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs réelles.

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbf{R}^2$ est une réunion dénombrable de boules ouvertes.
2. Soit F un fermé de $\mathbf{R}^2$. Soient $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de points de $\mathbf{R}^2$ et $(r_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels > 0 tels que
$$F = \mathbf{R}^2 - \bigcup_{n\geqslant 0} \mathbf{B}(x_n, r_n).$$
Soit f_n une fonction $\mathscr{C}^\infty$, strictement positive sur $\mathbf{B}(x_n, r_n)$ et dont le support est égal à $\overline{\mathbf{B}(x_n, r_n)}$ (on donnera un exemple explicite d'une telle fonction).
$$M_n = \sup_{x\in\mathbf{R}^2, |\alpha|\leqslant n} \left| \frac{\partial^\alpha f_n}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}(x) \right|,$$
où $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. Montrer que la fonction
$$f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n! M_n} f_n(x)$$
est lisse, et que $f^{-1}(0) = F$.

Exercice I.6 (Connexité dans $\mathbf{R}^2$). Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.

1. Toute fonction continue $f : U \to \{0, 1\}$ est constante.
2. Pour tout $x, y \in U$, il existe une fonction continue $\gamma : [0, 1] \to U$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.
3. Pour tout $x, y \in U$, il existe une fonction $\gamma : [0, 1] \to U$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Exercice I.7 (Transformation de Möbius). On note $\mathbf{D}$ le disque ouvert unité et $\mathcal{H} = \{ z \in \mathbf{C} \mid \Im(z) > 0 \}$ le demi-plan de Poincaré, et $\overline{\mathcal{H}}$ son image par la conjugaison. Considérons l'homographie :

$$h : z \longmapsto \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}.$$

1. Démontrer que $1 \notin \mathrm{Im}(h)$ et $h(\mathbf{R}) = \partial\mathbf{D} - \{1\}$. En déduire que
$$h(\mathcal{H}) \cup h(\overline{\mathcal{H}} - \{-\mathrm{i}\}) = \mathbf{C} - \partial\mathbf{D}$$
Déterminer $h(\mathcal{H})$ à l'aide d'un argument de connexité.
2. Soit λ un nombre complexe de module 1 et $a \in \mathbf{D}$. Considérons l'homographie
$$h_{\lambda,a} : z \longmapsto \lambda\frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$
Démontrer que $h_{\lambda,a}(\partial\mathbf{D}) \subset \partial\mathbf{D}$. En cherchant l'expression de l'application réciproque de $h_{\lambda,a}$, démontrer que $h_{\lambda,a}(\partial\mathbf{D}) = \partial\mathbf{D}$ puis démontrer que $h_{\lambda,a}(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$.