ENS de Lyon — 1er semestre 2021-2022

L3 - Analyse complexe

DM 2

DM à rendre pour le vendredi 16 décembre.

Tous les résultats vus en TD peuvent être utilisés, à condition de les mentionner explicitement. Il est attendu que les réponses soient justifiées avec le plus grand soin.

Exercice 1. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ qui contient 0. Soit $f : U \to U$ holomorphe, telle que $f(0) = 0$ et $0 < |f'(0)| < 1$. On note $f^{\circ n}$ l'itérée n-ième de f, et l'on pose $\lambda = f'(0)$.

(1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $r > 0$ tel que
$$(|\lambda| - \varepsilon)^n |z| \leq |f^{\circ n}(z)| \leq (|\lambda| + \varepsilon)^n |z|,$$
pour tout $z \in B(0, r)$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$.

(2) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\varphi_n = f^{\circ n}/\lambda^n$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que la série de terme général $|\varphi_{n+1} - \varphi_n|$ converge normalement sur $B(0, r)$.

(3) En déduire qu'il existe $r > 0$ et un biholomorphisme $\varphi : B(0, r) \to V \subset \mathbf{C}$ tel que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ et $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.

Exercice 2. On note cot la fonction *cotangente*, méromorphe sur $\mathbf{C}$, définie par
$$\cot(z) = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

(1) On note f la fonction méromorphe définie par $f(z) = \pi \cot(\pi z)$. Vérifier qu'elle est 1-périodique et identifier ses pôles ainsi que leurs ordres et résidus respectifs.

(2) Pour $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$, on note
$$g(z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}.$$
Montrer que g s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, 1-périodique, et identifier ses pôles ainsi que leurs ordres et résidus respectifs.

(3) Montrer que $f - g$ est holomorphe et bornée. En déduire l'identité pour tout $z \in \mathbf{C}$,
$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}.$$

(4) Soit h une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, possédant un nombre fini de pôles, supposés non entiers. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $|h(z)| = O(|z|^{-\alpha})$ lorsque $|z| \to \infty$. Montrer que la famille $(h(n))_{n \in \mathbf{Z}}$ est sommable et que
$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} h(n) = - \sum_{a \text{ pôle de } h} \mathrm{Res}_a(z \mapsto h(z)\pi\cot(\pi z)).$$

(5) En déduire à nouveau la relation démontrée dans la question 3.