ENS de Lyon — 1^{er} semestre 2021-2022

L3 - Analyse complexe

DM 1

DM à rendre pour le vendredi 22 octobre.

Tous les résultats vus en TD peuvent être utilisés, à condition de les mentionner explicitement. Il est attendu que les réponses soient justifiées avec le plus grand soin.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ qui sont holomorphes, bijectives, et de réciproque f^{-1} holomorphe.
Indication : Si f est une telle fonction, on pourra considérer la fonction $z \mapsto 1/f(1/z)$ sur un voisinage de 0. On pourra par ailleurs utiliser le résultat suivant, même s'il n'a pas encore été démontré en cours.

Théorème (Liouville)**.** *Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une application holomorphe. S'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $f(z) = o(|z|^n)$ lorsque $|z| \to +\infty$, alors f est une application polynomiale de degré $< n$.*

Exercice 2. Soit $\mathbf{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ centré en 0. Soit $f : \overline{\mathbf{D}} \to \mathbf{C}$ une fonction continue sur le disque fermé $\overline{\mathbf{D}}$, et holomorphe sur le disque ouvert $\mathbf{D}$. On suppose que les coefficients du développement de Taylor de f en 0 sont des entiers. Montrer que f est une fonction polynomiale. La conclusion subsiste-t-elle si f est seulement continue sur $\overline{\mathbf{D}} \setminus \{1\}$ et holomorphe sur $\mathbf{D}$?
Indication : on pourra utiliser sans démonstration le lemme de Riemann-Lebesgue, qui affirme que pour toute fonction $g : [a, b] \to \mathbf{C}$ continue sur un segment $[a, b] \subset \mathbf{R}$, l'intégrale $\int_a^b g(t)e^{ixt}dt$ tend vers 0 lorsque $x \mapsto \pm\infty$.