ENS de Lyon
L3 - Intégration et Probabilités

2nd semestre 2020-2021

TD 7

Théorème central limite, variation totale, vecteurs gaussiens

Théorème central limite

Exercice 1 *Convergence en loi de couples de variables aléatoires*

Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ deux suites de variables alétoires réelles convergeant en loi vers des variables aléatoires X et Y.

1. On suppose que pour tout $n \geq 0, X_n$ et Y_n sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi. Est-ce que la limite est la loi de (X, Y) ?
2. Sans supposer d'indépendance, est-ce que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi ?
3. *(Lemme de Slutsky)* On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $Y = c$ p.s.
   (a) Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers Y.
   (b) Montrer que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers (X, Y).
4. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de moyenne nulle et telles que $\mathbb{E}Z_1^2 < +\infty$. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}, M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} Z_k \quad \text{et} \quad \Sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} Z_k^2$$
Montrer que
$$\frac{\sqrt{n}M_n}{\Sigma_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$
Ce résultat est utilisé en statistiques quand on ne connaît pas la variance σ^2 et qu'on doit la remplacer par Σ_n^2, une "estimation empirique" de la variance.

Exercice 2 *Étude de suite*

On pose, pour n entier et α réel positif,
$$T_n(\alpha) = e^{-n}\sum_{k=0}^{\lfloor \alpha n\rfloor} \frac{n^k}{k!}.$$

1. Soient X, Y deux variables de Poisson indépendantes, de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Montrer que $X + Y$ suit encore une loi de Poisson, dont on précisera le paramètre.
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} T_n(\alpha) = 0$ si $\alpha < 1$, et $\lim_{n\to\infty} T_n(\alpha) = 1$ si $\alpha > 1$.
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} T_n(1) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 *Sommes de variables de Bernoulli*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. de loi Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On considère $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer la limite de $\mathbb{P}(S_n \in I_n)$ quand n tend vers l'infini, lorsque

1. $I_n = [0, pn]$;
2. $I_n = [pn - 4\sqrt{n}, pn - \sqrt{n}]$;
3. $I_n = [pn - n^{1/3}, pn]$.

Exercice 4 *Changement de signe*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telle que $\mathbb{E}[X_1] = 0, \mathbb{E}[X_1^2] = 1$. On note S_n la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer la limite lorsque n tend vers l'infini de la probabilité de l'intersection des événements $S_n < 0$ et $S_{2n} > 0$.

Convergence en variation totale

Exercice 5 *Variation totale et convergence en loi de variables discrètes.*
On définit la distance en variation totale de deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ ainsi :

$$\|\mu-\nu\|_{TV} = 2\sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} |\mu(A)-\nu(A)| = \sup_{\substack{f:\mathbb{R}^d\to[-1,1]\\ f \text{ mesurable}}} |\mu(f)-\nu(f)| = \sup_{\substack{f:\mathbb{R}^d\to[-1,1]\\ f \text{ continue}}} |\mu(f)-\nu(f)|$$

1. Justifier toutes ces égalités.
2. Montrer que la convergence en variation totale implique la convergence en loi. Donner un exemple de convergence en loi qui n'est pas en variation totale.
3. Montrer que pour des variables aléatoires dans $\mathbb{Z}$, la convergence en loi est équivalente à la convergence en variation totale.
4. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires dans $\mathbb{Z}$, telle que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(X=k)$ converge. Est-ce que X_n converge en loi ?

Exercice 6 *Variation totale et couplages.*
On définit la distance en variation totale de deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ ainsi :

$$\|\mu-\nu\|_{TV} = 2\sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} |\mu(A)-\nu(A)|$$

1. Soit X variable aléatoire de loi μ et Y variable aléatoire de loi ν. Montrer que
$$\frac{1}{2}\|\mu-\nu\|_{TV} \le \mathbb{P}(X\neq Y)$$
2. Montrer que l'on peut construire un couple (X,Y) de lois marginales μ, ν tel que
$$\mathbb{P}(X\neq Y) \le \frac{1}{2}\|\mu-\nu\|_{TV}$$
3. En déduire que
$$\|\mu-\nu\|_{TV} = 2\inf\{\mathbb{P}(X\neq Y), X\sim\mu, Y\sim\nu\}$$

Vecteurs gaussiens

Exercice 7 *Vecteur gaussien*
Soit $(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3$ un vecteur gaussien. On pose $U=X+Y+Z$ et $V=X-Y$.

1. Montrer que $(U,V)\in\mathbb{R}^2$ est gaussien.
2. A quelle condition sur la matrice de covariance de (X,Y,Z) les variables U et V sont-elles indépendantes ?