ENS de Lyon $\hfill$ 2$^{\text{nd}}$ semestre 2020-2021

L3 - Intégration et Probabilités

TD 3

Lois usuelles, caractérisations de lois, moments

Exercice 1 *La main à la pâte*

Calculer la fonction de répartition, la fonction caractéristique, l'espérance et la variance des variables aléatoires de Bernoulli, binomiales, géométriques, de Poisson, exponentielles et de Cauchy.

Exercice 2 *Fonction quantile*

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F. On définit G, pseudo-inverse de F comme suit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ : \ G(t) = \inf\{x | F(x) \geq t\}.$$

1. Prouver que :
   (a) Si F est continue, alors pour tout $t \in]0,1[$, $F(G(t)) = t$.
   (b) Si F est strictement croissante, alors pour tout x réel, $G(F(x)) = x$.
   (c) Si F est continue et strictement croissante, alors F est inversible et $G = F^{-1}$.
   (d) Donner une condition (non nécessaire) pour que ces deux propriétés soient vérifiées.
2. Prouver que si F est continue et strictement croissante, alors la variable aléatoire $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
3. Si Y suit la loi uniforme sur $[0,1]$, quelle est la fonction de répartition de $G(Y)$? *(On pourra vérifier que* $\{G(U) \leq t\} = \cap_{n\geq 1}\{U \leq F(t + 1/n)\}$*).*

Exercice 3 *Les moments ne caractérisent pas la loi*

On fixe un entier naturel $q \geq 2$, et l'on note $M_q = \{q^j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

1. Soit X la variable aléatoire à valeurs dans M_q dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X = q^j) = e^{-q}q^j/j!$. Calculer les moments de X.
2. Montrer que la fonction $h : z \mapsto \prod_{k=1}^{\infty}(1 - zq^{-k})$ est analytique sur $\mathbb{C}$.
3. Soit $z \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ son développement de Taylor au voisinage de 0. Définissons pour tout $j \geq 0, a_j = j!c_j$. Montrer que pour tout $k \geq 0$,
$$\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-q}q^{kj}a_j\frac{q^j}{j!} = 0.$$
4. En utilisant l'équation fonctionnelle $h(qz) = (1 - z)h(z)$, montrer que $c_0 = 1$ et pour tout $j \geq 1$,
$$c_j = (-1)^j[(q-1)(q^2-1)\dots(q^j-1)]^{-1}.$$
5. Pour tout $\varepsilon \in [-1,1]$, soit X_ε une variable aléatoire à valeurs dans M_q dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X_\varepsilon = q^j) = (1 + \varepsilon a_j)e^{-q}q^j/j!$. Pourquoi est-ce que cela est bien défini ? Calculer les moments de X_ε.

Exercice 4 *Calcul de lois*

1. On suppose que la loi de (X, Y) est $\mathcal{E}xp(\frac{1}{2}) \otimes \mathcal{U}([0, 2\pi])$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.
2. On suppose que la loi de X est $\mathcal{U}([0, 1])$. Déterminer la loi de $-\log(U)$.
3. *(Transformée de Box-Müller)* Déduire un moyen de fabriquer une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)^{\otimes 2}$ en partant d'une paire $(U, V) \sim \mathcal{U}([0, 1])^{\otimes 2}$.
4. *(Loi de Cauchy)* On suppose que la loi de (X, Y) est $\mathcal{N}(0, 1)^{\otimes 2}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.