ENS de Lyon
L3 - Intégration et Probabilités

2$^{\text{nd}}$ semestre 2019-2020

TD 2

Variables aléatoires, lois, espérance.

Exercice 1 *Votre premier couplage*

Soit $p \in [0,1]$. Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p définies sur le même espace probabilisé. Que peut être la loi de la variable aléatoire $Z := \max(X,Y)$?

Exercice 2 *Lois de variables aléatoires*

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que la loi de (X,Y) est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.
2. Si X et Y sont à densité, est-ce que (X,Y) est à densité ?
3. On suppose que $X = Y$ p.s. Montrer que X et Y ont même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
4. On suppose que X et Y ont même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement même loi.

Exercice 3 *Méthode du premier moment*

1. Montrer que dans tout graphe fini G ayant au moins r sommets il existe un sous-graphe H qui soit r-parti, avec $\#E(H) \geq \frac{r-1}{r} \#E(G)$.
2. *(Plus longue sous-suite croissante)* Pour $n \geq 1$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose

$$L(\sigma) = \sup_{I \subset [n], \sigma|_I \text{ croissante}} \#I$$

   Soit σ_n un élément uniforme de $\mathfrak{S}_n$. Montrer qu'il existe c tel que $\mathbb{P}(L(\sigma_n) > c\sqrt{n}) \to 0$, et que $\limsup \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}[L(\sigma_n)] \leq c$.

Exercice 4 *Des probabilités à l'espérance*

Soit X une variable aléatoire positive. Soit $p > 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty p x^{p-1} \mathbb{P}[X > x] dx.$$

Quel est le lien entre $X \in L^p$ et $\mathbb{P}(|X| > x) = o(x^r)$?

Exercice 5 *Inégalité de Paley-Zygmund.*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de carré intégrable. Pour tout $0 \leq c \leq 1$, montrer que

$$\mathbb{P}(X > c\mathbb{E}[X]) \geq (1-c)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Exercice 6 *Médianes, projection L^1, et variance.*

Soit X une variable aléatoire réelle. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est une médiane de X si l'on a $\mathbb{P}(X < m) \leq 1/2 \leq \mathbb{P}(X \leq m)$.

1. Montrer que l'ensemble des médianes de X forme un intervalle compact non vide.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}[|X-a|] = \int (\mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{1}_{x \leq a} + \mathbb{P}(X > x)\mathbb{1}_{x>a})\, dx.$$

3. On suppose maintenant X intégrable. Déduire de la question précédente que les médianes de X sont exactement les minimiseurs de $a \mapsto \mathbb{E}[|X-a|]$.
4. Montrer que pour toute médiane m de X, on a

$$|\mathbb{E}[X] - m| \leq \sqrt{\mathrm{Var} X}.$$

Exercice 7 *Fonction quantile.*

Soit X une variable aléatoire réelle, de fonction de répartition F. On définit G, appelé le pseudo-inverse de F, comme suit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq t\}.$$

1. Démontrer que :
   (a) Si F est continue, alors pour tout $t \in]0,1[, F(G(t)) = t$.
   (b) Si F est strictement croissante, alors pour tout $x \in \mathbb{R}, G(F(x)) = x$.
   (c) Si F est continue et strictement croissante, alors F est inversible et $G = F^{-1}$.
   (d) Donner une condition (non nécessaire) pour que ces deux propriétés soient vérifiées.
2. Prouver que si F est continue et strictement croissante, alors la variable aléatoire $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
3. Si Y suit la loi uniforme sur $[0,1]$, quelle est la fonction de répartition de $G(Y)$? *Indication : on pourra vérifier que* $\{G(U) \leq t\} = \cup_{n \geq 1}\{U < F(t+1/n)\}$.