ENS de Lyon $\hfill$ 2^{nd} semestre 2020-2021
L3 - Intégration et Probabilités

TD 12
Révisions

Exercice 1 *Quiz de révisions*

1. Soit $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $2 \leq k \leq n$, X_k est indépendant de $(X_1, ..., X_{k-1})$. Est-ce que la famille $(X_1, ..., X_n)$ est indépendante ?
2. Soit X une variable aléatoire réelle. Soient Y et Z deux variables aléatoires réelles indépendantes de X. Peut-on affirmer que X est indépendant de $Y + Z$?
   (a) Oui, tout le temps.
   (b) Oui, si l'on a de plus l'hypothèse Y indépendant de Z.
   (c) Non.
3. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles dans L^1. Peut-on affirmer que XY est dans L^1 ?
   (a) Oui, tout le temps.
   (b) Oui, si l'on a de plus l'hypothèse X indépendant de Y.
   (c) Non.
4. * Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes convergeant presque sûrement vers X. Est-ce que X est constante presque sûrement ? Même question en remplaçant la convergence presque sûre par la convergence en probabilité, puis la convergence en loi.
5. Soit X une variable aléatoire non presque-sûrement nulle, et $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite. Est-ce que la suite de variables aléatoires $(u_n X)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 ?
6. Si X et Y sont des variables aléatoires réelles à densité, est-ce que $X + Y$ est une variable aléatoire à densité ? Et si X et Y sont indépendantes ?
7. Si X et Y sont des variables aléatoires réelles à densité, est-ce que $\max(X, Y)$ est une variable aléatoire à densité ? Et si X et Y sont indépendantes ?
8. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un groupe fini G. On suppose que X est uniforme. Quel est la loi de XY ? À quelle condition sur Y est-ce que X et Y sont indépendantes ?
9. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi, de variance finie, dont la somme a même loi qu'une transformation affine de X. Quelle est la loi de X ? *Indication : que dire d'une somme de 2^n copies de X i.i.d. ?*
10. * Si X est une variable aléatoire à densité et si g est une fonction continue strictement croissante, est-ce que $g(X)$ est une variable aléatoire à densité ?

Exercice 2 *Une convergence d'intégrale*

Déterminer la limite lorsque $n \to \infty$ de

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} x^{n-1} f(x/n) e^{-x} dx,$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée.

Exercice 3 *Loi de la progéniture totale*

Soit $(X_{n,i})_{n,i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi μ sur $\mathbb{N}$. Posons $Z_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$,

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}.$$

On note $T = \sum_{n\geq 0} Z_n$ la taille totale de la population. En utilisant le *hitting time theorem* démontré lors du dernier TD, montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n = n - 1),$$

où $(X_i)_{i\geq 1}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi μ.

Exercice 4 *Théorème de Cochran et statistique des échantillons gaussiens*

On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique, et l'on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$. On note p_E, resp. $p_{E^\perp}$, la projection orthogonale sur E, resp. $E^\perp$. Soit X un vecteur aléatoire gaussien de $\mathbb{R}^d$ de loi $\mathcal{N}_d(0, I_d)$.

1. Démontrer que les variables aléatoires $p_E(X)$ et $p_{E^\perp}(X)$ sont indépendantes et déterminer leurs lois.
2. *(Théorème de Cochran)* Soient $N_1, \ldots, N_d$ des variables aléatoires gaussiennes i.i.d. centrées réduites. On note χ^2_d la loi de $N_1^2 + \cdots + N_d^2$, appelée la *loi du* χ^2 *à* d *degrés de liberté*. Montrer que les variables aléatoires $\|p_E(X)\|^2$ et $\|p_{E^\perp}(X)\|^2$ sont indépendantes et qu'elles suivent respectivement les lois $\chi^2_{\dim(E)}$ et $\chi^2_{\dim(E^\perp)}$.

$$p_E(X) \sim \chi^2_{\dim(E)} \text{ et}$$

3. Soient $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On note
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$
Montrer que $\bar{X}$ et S^2 sont indépendantes et de lois respectives $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ et $\sigma^2 \frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}$.
En statistiques, $\bar{X}$ *est une "estimation empirique" de la moyenne et* S^2 *une "estimation empirique" de la variance.*

4. On note T_n la loi de $\frac{N}{\sqrt{Z/n}}$ où N et Z sont des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(0, 1)$ et χ^2_n. Construire une suite de variables aléatoires T_n à partir de $\bar{X}, \mu, S$ de loi T_{n-1}.
En statistiques, la connaissance des lois de $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2$ *et de* T_n *permet de construire des intervalles de confiance pour les "estimations empiriques".*