ENS de Lyon 2nd semestre 2020-2021
L3 - Intégration et Probabilités

TD 10

Transformée de Fourier et de Fourier-Plancherel

Dans ce TD, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, sa transformée de Fourier est définie par la formule
$$\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$
Par ailleurs, on note $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier-Plancherel.

Exercice 1 *Inégalité d'anti-concentration d'Esseen*

1. Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable,
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(t) dt \right) d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[e^{itX}] f(t) dt.$$
2. Construire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à valeurs positives, telle que $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, telle que la transformée de Fourier de f soit à valeurs positives et $\hat{f} \geq C > 0$ sur $[-1/2, 1/2]$.
3. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute variable aléatoire réelle X, et pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ de longueur 1,
$$\mathbb{P}(X \in I) \leq C \int_{|t| \leq 1} |\mathbb{E}[e^{itX}]| dt.$$

Exercice 2 *Inégalité de Heisenberg*

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace de Schwartz, composé des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que
$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad |x^n| f^{(k)}(x) \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f^2 = 1$.

1. Montrer que
$$2 \int_{\mathbb{R}} x f'(x) f(x) dx = -1.$$
2. En déduire que
$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
3. Dans quels cas a-t on égalité ?

Exercice 3 *Échantillonage de Shannon*

On note I l'intervalle $[-1, 1]$. Soit B l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ telles que le support de $\mathcal{F}(f)$ est inclus dans I. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : x \mapsto \exp(i\pi n x)/\sqrt{2}$. On note sinc la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$.

1. Démontrer que B est un espace de Hilbert, et que l'on a une isométrie bijective entre B et $L^2(\mathbb{R}/2\mathbb{Z}, Leb)$.
   Indication : un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert.
2. Rappeler pourquoi $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/2\mathbb{Z}, Leb)$, puis en déduire une base hilbertienne de B.
3. En déduire que pour tout $f \in B$, la série
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\pi) \mathrm{sinc}\,(x - n\pi)$$
converge normalement (pour la norme sur B) vers la fonction f.
4. Démontrer que la série de la question précédente converge normalement pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 4 *Formule sommatoire de Poisson*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$ converge absolument, et qu'il existe C tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$ est absolument convergente, et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n).$$

   On pourra justifier l'existence de $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ et utiliser la théorie des séries de Fourier.

2. Application : Pour $x > 0$, montrer l'égalité suivante,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{x^2+n^2} = \frac{\pi}{x} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi|n|x} = \frac{\pi}{x} \frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}},$$

   et en déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$.