ENS de Lyon — 2^{nd} semestre 2020-2021
L3 - Intégration et Probabilités

TD 1
Espaces de probabilité, probabilités discrètes.

Espaces de probabilité

Exercice 1 *Une infinité de lancer de pièces biaisées*

Construire un espace de probabilité qui modélise une infinité de lancer de pièces biaisées (la probabilité d'obtenir pile vaut $p \in [0,1]$, la probabilité d'obtenir face vaut $1-p$) avec la propriété supplémentaire suivante : pour tout $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$, la probabilité de l'événement « la première pièce tombe sur ε_1 et ... et la n^e pièce tombe sur ε_n » est égale à

$$p^{\#\{i|\varepsilon_i=1\}}(1-p)^{\#\{i|\varepsilon_i=0\}}.$$

Exercice 2 *Construction d'espaces de probabilité*

1. Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ telles que A ou A^c est dénombrable. On pose pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = 0$ si A est dénombrable et $\mathbb{P}(A) = 1$ si A^c est dénombrable. Montrer que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.
2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. On pose, pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = 1$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]1/2, 1/2+\varepsilon]$ est inclus dans A, et $\mathbb{P}(A) = 0$ sinon. Est-ce que $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité ?

Exercice 3 *Lemme de Borel-Cantelli*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$ telle que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty.$$

On note $\limsup_n A_n$ l'ensemble $\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n\}$.

1. Soit $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$. Montrer que $\mathbb{P}(B_n) \to 0$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

Exercice 4 *Espace de probabilité non-atomique*

Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit non-atomique si pour tout $A \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(A) > 0$, il existe $B \in \mathcal{F}, B \subset A$ tel que $0 < \mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A)$.

1. Montrer que $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ est non-atomique.

On fixe désormais $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité non-atomique.

2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $B \subset A$ et $0 < \mathbb{P}(B) < \varepsilon$.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}$ et pour tout $x \in [0, \mathbb{P}(A)]$, il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $B \subset A$ et $\mathbb{P}(B) = x$.
4. En déduire que pour toute suite $(p_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs telle que $\sum_{n\geq 1} p_n = 1$, il existe $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que

$$\Omega = \bigsqcup_{n\geq 1} B_n \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ \mathbb{P}(B_n) = p_n.$$

Exercice 5 *Ensemble à densité asymptotique*

Un ensemble $A \subset \mathbb{N}^*$ admet une densité asymptotique si la suite $(|A \cap \{1, \ldots, n\}|/n)_{n\geq 1}$ est convergente. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$ admettant une densité asymptotique. Est-ce que $\mathcal{A}$ est une tribu ?

Probabilités discrètes

Exercice 6 *Le problème des chapeaux*

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Montrer la formule de Poincaré (ou "d'inclusion-exclusion") :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}).$$

2. On considère un groupe de n personnes, chacun possédant un chapeau. On met tous les chapeaux dans un vestiaire sombre, si bien que les personnes en partant viennent l'une après l'autre prendre au hasard un chapeau (la i-ième personne prend l'un des $n - i + 1$ chapeaux présents avec la même probabilité).
   (a) Modéliser ce problème en termes probabilistes. Quelle est dans ce cadre la probabilité pour qu'une personne au moins retrouve son chapeau ? Calculer la limite de cette probabilité quand $n \to \infty$.
   (b) En reformulant ce problème en terme de groupe symétrique $Sym(n)$, calculer la probabilité qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $Sym(n)$ uniforme (i.e. pour tout $\sigma \in Sym(n), \mathbb{P}(X = \sigma) = 1/n!$) ne possède pas de point fixe.

Exercice 7 *Permutations dans un wagon*

Dans une voiture de chemin de fer, les places sont numérotées de 1 à n.

1. Le premier passager ne connait pas son numéro de place (*pour simplifier, on pourra supposer qu'il est censé s'asseoir à la place numéro 1*). Il choisit alors une place uniformément au hasard parmi les n places disponibles.
2. Supposons que k passagers soient déjà installés (pour $k \in [\![1; n-1]\!]$). Le $k+1^{\text{e}}$, qui connaît son numéro de place, arrive (*pour simplifier, on pourra supposer qu'il est à la place numéro* $k+1$). Si sa place est libre, il s'y assied. Sinon, il choisit une place uniformément au hasard parmi les $n - k$ places restantes.

Modéliser en termes probabilistes le problème ci-dessus. Quelle est la probabilité que le dernier passager (le n^{e}) s'asseye à sa place ?

Exercice 8 *Paradoxe de Bertrand*

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1. On se propose, par trois méthodes différentes de calculer la probabilité qu'une corde de $\mathcal{C}$ choisie « au hasard » soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit, c'est-à-dire $\sqrt{3}$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des cordes de $\mathcal{C}$

1. *Extrémités aléatoires :* Construire une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathcal{E}$ qui correspond à tirer aléatoirement de façon uniforme et de façon indépendante chaque extrémité de la corde X. Caculer $\mathbb{P}(long(X) \geq \sqrt{3})$.
2. *Milieu aléatoire :* Construire une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathcal{E}$ qui correspond à tirer le milieu de la corde X de façon uniforme. Calculer $\mathbb{P}(long(Y) \geq \sqrt{3})$.
3. *Rayon aléatoire :* Construire une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathcal{E}$ qui correspond à tirer un rayon de $\mathcal{C}$ aléatoirement de façon uniforme, puis de choisir un point aéatoirement de façon uniforme sur ce rayon, qui sera le milieu de la corde Z. Calculer $\mathbb{P}(long(Z) \geq \sqrt{3})$.