ENS de Lyon $\hfill$ 2nd semestre 2020-2021

L3 - Intégrations et Probabilités

DM 2

DM à rendre pour le vendredi 16 avril, soit en main propre, soit sur le portail des études.

Il est attendu que les réponses soient justifiées avec le plus grand soin.

Exercice 1.

(1) On note $\mathcal{S}$ l'espace de Schwartz, composé de l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telles que

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad |x^n| f^{(k)}(x) \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer que si f est dans l'espace de Schwartz, il en est de même de $\hat{f}$.

(2) On fixe un paramètre $b > 1$. Justifier l'existence d'une fonction ψ dans $\mathcal{S}$ telle que $\hat{\psi}$ soit à valeurs réelles strictement positives sur $]1/b, b[$, et nulle en dehors. Justifier également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x) dx = 0$.
Indication : utiliser la formule d'inversion de Fourier.

(3) Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\psi_k : x \mapsto b^{2k} \psi(b^k x)$. Montrer que si f est une fonction continue bornée et dérivable en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, alors on a

$$f \star \psi_k(x_0) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(4) **Application :** On choisit maintenant $a \in]0, 1[$ tel que $ab \geq 1$, et on définit la fonction de Weierstrass $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$W(x) = \sum_{n \geq 0} a^n \cos(b^n x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que W est bien définie et est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable nulle part.