ENS de Lyon — 2nd semestre 2020-2021

L3 - Intégrations et Probabilités

DM 1

DM à rendre pour le vendredi 5 mars, soit en main propre, soit sur le portail des études.

Il est attendu que les réponses soient justifiées avec le plus grand soin.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On suppose, sauf dans la dernière question, que les variables X_n sont d'espérance nulle et de variance finie $\mathrm{Var}(X_n) = u_n$, où (u_n) est le terme général d'une série convergente. On se propose d'étudier la convergence presque sûre de la suite S_n.

(1) Soit c une constante strictement positive quelconque, et $m \geq 0$. Justifier l'inégalité suivante

$$\forall n > m, \quad \mathbb{P}(|S_n - S_m| \geq c) \leq \frac{1}{c^2}\mathbb{E}[(S_n - S_m)^2] \leq \frac{1}{c^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k. \tag{1}$$

(2) On introduit $T_{m,c} := \inf\{k > m, |S_k - S_m| \geq c\}$, avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Montrer que l'on a, pour $n \geq k > m$,

$$\mathbb{P}(T_{m,c} = k) \leq \frac{1}{c^2}\mathbb{E}[(S_k - S_m)^2 \mathbb{1}_{\{T_{m,c}=k\}}] \leq \frac{1}{c^2}\mathbb{E}[(S_n - S_m)^2 \mathbb{1}_{\{T_{m,c}=k\}}].$$

(3) En déduire l'amélioration suivante de l'inégalité (1) :

$$\mathbb{P}(\exists k > m, |S_k - S_m| \geq c) \leq \frac{1}{c^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k.$$

(4) Montrer que la suite (S_n) est presque sûrement de Cauchy donc convergente.

(5) Dans cette question les hypothèses d'intégrabilité et de moments de la suite (X_n) sont remplacées par les hypothèses suivantes :

(a) $\sum \mathbb{P}(|X_n| > 1) < \infty$.

(b) La série des $\mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq 1}]$ converge.

(c) $\sum \mathrm{Var}(X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq 1}) < \infty$.

Montrer que la suite (S_n) est encore presque sûrement convergente.

Remarque : *On vient de donner une condition suffisante pour que (S_n) converge. Elle est en fait également nécessaire (et on pourra le supposer dans la suite). Par ailleurs, le nombre 1 qui apparaît dans chacune des séries (introduites dans la question 5) pourrait être remplacé par un nombre réel strictement positif quelconque.*

(6) *Application.* Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Cauchy, et (a_n) une suite tendant vers 0. Montrer que

$$\sum a_n X_n^3 \text{ converge p.s} \iff \sum |a_n|^{1/3} < \infty.$$