IX. Théorème des résidus

Exercices

Exercice IX.1. Après avoir justifié leurs existences, calculer les intégrales suivantes :

1. $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x.$$
   Indication : intégrer $z \mapsto e^{iz}/z$ sur le bord du domaine $\{r \leqslant |z| \leqslant R, \Im(z) \geqslant 0\}$.
2. $$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) \mathrm{d}x \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(x^2) \mathrm{d}x.$$
   Indication : intégrer $z \mapsto e^{-z^2}$ sur le bord de $\{re^{i\theta} \mid r \in [0, R], \theta \in [0, \pi/4]\}$.
3. $$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}, \text{ pour } n \geqslant 2.$$
   Indication : intégrer $z \mapsto 1/(1+z^n)$ sur le bord de $\{re^{i\theta} \mid r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi/n]\}$.
4. $$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2} \mathrm{d}x, \text{ pour } a > 0.$$

Exercice IX.2. Soit $P, Q \in \mathbf{C}[X] - \{0\}$ tels que $\deg(P) \leqslant \deg(Q) - 2$ et P et Q premier entre eux. On suppose que Q n'a pas de zéro réel, et l'on note $a_1, \ldots, a_r$ ses zéros de partie imaginaire strictement positive. Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x = 2i\pi \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Res}_{a_k}(P/Q).$$

Exercice IX.3.

1. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une fonction entière qui ne s'annule pas. Montrer qu'il existe une fonction entière $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ telle que $f = \exp \circ g$.
2. On cherche à montrer le théorème de Thron (1956) : « *Il n'existe pas de fonction entière $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ telle que* $\exp = f \circ f$. » En raisonnant par l'absurde, montrer qu'une telle fonction f ne s'annule pas, puis conclure.