VIII. Homotopies et groupe de Poincaré

Exercices

Exercice VIII.1 (Indice d'un lacet). Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}^*$ un lacet continu.

1. On suppose dans cette question que $\gamma(t) = (1 + t(1-t))e^{4i\pi t}$ pour $t \in [0,1]$. Que vaut $\mathrm{Ind}_0(\gamma)$?
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Notant $g(z) = z^n$, montrer que $\mathrm{Ind}_0(g \circ \gamma) = n\mathrm{Ind}_0(\gamma)$.
3. Montrer que l'indice en 0 de γ (*supposé seulement continu*) se calcule selon la formule
$$\mathrm{Ind}_0(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

Exercice VIII.2. Soit X un espace topologique.

1. Montrer que deux applications continues $f, g : X \to \mathbf{R}^n$ sont toujours homotopes.
2. Soient $f, g : X \to \mathbf{R}^n - \{0\}$ continues vérifiant pour tout $x \in X$,
$$\|f(x) - g(x)\| < \|f(x)\|.$$
Montrer que f et g sont homotopes.
3. Soient P, Q deux polynômes complexes de même degré $d \geqslant 1$. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $r \geqslant R$ les applications induites $p, q : \partial B(0,r) \to \mathbf{C}^*$ définies pour tout z par $p(z) = P(z)$ et $q(z) = Q(z)$ sont homotopes.

Exercice VIII.3. Soient X, Y deux espaces topologiques, $x \in X$ et $y \in Y$.

1. Montrer que $\pi_1(X \times Y, (x,y))$ est isomorphe à $\pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$.
2. Calculer le π_1 d'un cylindre infini, du tore $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, et plus généralement de $(\mathbf{S}^1)^n$.

Exercice VIII.4. On définit la sphère unité $\mathbf{S}^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ de dimension n comme l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $\|x\| = 1$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. Soit X un espace topologique.

1. Soit $f : X \to \mathbf{S}^n$ continue non surjective. Montrer que f est homotope à une application constante.
2. Soient $f, g : X \to \mathbf{S}^n$ qui vérifient pour tout $x \in X$
$$\|f(x) - g(x)\| < 2.$$
Montrer que f et g sont homotopes.
3. Soit $f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ continue sans point fixe. Montrer que f est homotope à $-id_{\mathbf{S}^n}$.

4. Soit $0 \leqslant k < n$. On considère l'application d'inclusion $i : \mathbf{S}^k \to \mathbf{S}^n$ définie pour tout $x \in \mathbf{S}^k$ par $i(x) = (x, 0, \ldots, 0)$. Montrer que i est homotope à une application constante. On dit alors que $\mathbf{S}^k$ *est contractile dans* $\mathbf{S}^n$.

Exercice VIII.5 (Bestiaire sur la sphère). 1. Montrer que $\mathbf{S}^n$ et $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ sont homéotopes. Sont-ils homéomorphes ?

2. Prouver que $\mathbf{S}^n - \mathbf{S}^k$ et $\mathbf{S}^{n-k-1}$ sont homéotopes pour $0 \leqslant k < n$.