# VII. Applications méromorphes, Résidus

## Exercices

**Exercice VII.1.** 1. Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbf{C}$. Soient $f, g$ deux fonctions holomorphes sur $\Omega$, et $z_0 \in \Omega$ tel que $g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$. Montrer que

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f/g) = f(z_0)/g'(z_0).$$

2. Calculer les résidus de $z \mapsto 1/\sin(z)$ en chacun de ses pôles.

**Exercice VII.2.** Déterminer si les fonctions suivantes sont méromorphes. Si oui, calculer leurs résidus.

$$z \longmapsto \exp(1/z), \qquad z \longmapsto \frac{1}{\sin(z)} - \frac{1}{z}, \qquad z \longmapsto \frac{1}{\exp(z) - 1} - \frac{1}{z}, \qquad z \longmapsto \sin\left(\frac{1}{\sin(1/z)}\right).$$

**Exercice VII.3.** À l'aide du théorème des résidus, calculer, pour $a \in ]1, +\infty[$,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + \sin(\theta)}.$$

On pourra, pour cela, poser $z = e^{i\theta}$ et exprimer $\sin(\theta)$ en termes de $z$.

**Exercice VII.4.** Soit $R = P/Q$ une fraction rationnelle avec $\deg Q \geqslant \deg P + 2$. Déterminer la valeur de

$$\sum_{a \in \mathbf{C}} \mathrm{Res}_a(R).$$

**Exercice VII.5 (Continuité des racines d'un polynôme).** 1. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme de degré $n$. Soit $a \in \mathbf{C}$, et $r > 0$ tel que $P$ ne s'annule pas sur $C(a, r)$. Déterminer la valeur de

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{P'(z)}{P(z)} \mathrm{d}z.$$

2. Montrer que si $(P_k)_{k \geqslant 0}$ est une suite de polynômes complexes de degré $n$ qui tend vers $P$, en notant $(a_1^k, \ldots, a_n^k)$ les zéros de $P_k$ comptés avec multiplicités, et $(b_1, \ldots, b_n)$ les zéros de $P$ comptés avec multiplicité, alors

$$\min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\ell=1}^{n} |a_\ell^k - \sigma(b_\ell)| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$