VI. Applications méromorphes

Exercices

Exercice VI.1 (Fonction holomorphes sur une couronne). Soient r et R des nombres réels tels que $0 < r < R$ et soit f une fonction holomorphe sur la *couronne* ouverte

$$C = \{ z \in \mathbf{C} \mid r < |z| < R \}.$$

Pour tout $r' \in]r, R[$, on note $\gamma_{r'}$ le cercle de centre 0 et de rayon r', orienté dans le sens trigonométrique. Soit f une fonction holomorphe sur C.

1. Trouver une fonction holomorphe f sur C qui ne vérifie pas la formule de Cauchy, c'est-à-dire qu'il existe $r < r' < R$, $z \in C$ avec $|z| < r'$ tel que
$$f(z) \neq \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(u)}{u-z} \frac{\mathrm{d}u}{2\pi \mathrm{i}}.$$
2. Démontrer que pour tous $r_1, r_2 \in]r, R[$, on a l'égalité
$$\int_{\gamma_{r_1}} f(u)\mathrm{d}u = \int_{\gamma_{r_2}} f(u)\mathrm{d}u.$$
3. Soient $r_1, r_2 \in]r, R[$ et $z \in C$ tels que $r_1 < |z| < r_2$. Démontrer que
$$f(z) = \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(u)}{u-z} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} - \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(u)}{u-z} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}}.$$
On pourra éventuellement considérer la fonction g_z définie sur C par
$$u \mapsto \begin{cases} \frac{f(u)-f(z)}{u-z} \text{ si } u \neq z, \\ f'(z) \text{ si } u = z. \end{cases}$$
4. En déduire que l'on peut décomposer f de manière unique sous la forme
$$f(z) = f_1(z) + f_2\left(\frac{1}{z}\right)$$
où f_1 est une fonction holomorphe sur le disque ouvert $B(0, R)$ et f_2 une fonction holomorphe sur le disque ouvert $B(0, \frac{1}{r})$ avec $f_2(0) = 0$.
5. En déduire que si f est un fonction holomorphe sur le disque épointé $B(0, R) - \{0\}$ et bornée sur un voisinage épointé de 0, alors l'application f se prolonge par continuité en une fonction holomorphe sur $B(0, R)$. On dit que *la singularité en* 0 *est effaçable*.

Exercice VI.2. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ telle que $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$. On suppose qu'il existe $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $f(z) \neq \infty$ pour tous $z \in \mathbf{C} - B(0, R)$.

1. Démontrer que f n'a qu'un nombre fini de pôles dans $\mathbf{C}$.
2. On note $z_1, \dots, z_p$ ces pôles et $m_1, \dots, m_p$ leur multiplicités respectives. On considère le polynôme
$$P = \prod_{i=1}^{p} (T - z_i)_i^m$$
Démontrer que la fonction $g : z \mapsto P(z)f(z)$ se prolonge en une fonction entière.
3. On définit la fonction $h : z \mapsto g\left(\frac{1}{z}\right)$. Démontrer que h induit une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle en 0.
4. En déduire que f est définie par une fraction rationnelle $P/Q \in \mathbf{C}(T)$.

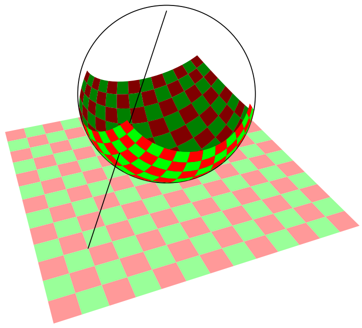

FIGURE 1. La sphère de Riemann

Exercice VI.3 (Projection stéréographique)**.** On considère la sphère unité
$$\mathbf{S}^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$
Soit $\varphi : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{S}^2$ l'application définie par
$$z \longmapsto \begin{cases} \left(\frac{4x}{x^2+y^2+4}, \frac{4y}{x^2+y^2+4}, \frac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4}\right) & \text{si } z = x + iy \text{ avec } x, y \in \mathbf{R}, \\ (0, 0, 1) & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

1. Prouver que φ est un homéomorphisme.
2. Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Que peut-on dire des points $S = (0, 0, 1)$, $\varphi(x+iy)$ et $(x, y, -1)$? En déduire une description géométrique de φ (*cf.* figure 1).